

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра "Вища математика"

Схвалено на засіданні НМК ННІТІП

15 квітня 2026 р.

Протокол № 6

Директор ННІТІП



Андрій ІВАНОВ

04 2026

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

Навчально-методичний посібник

Навчально-методичний посібник розроблено кандидатом фізико-математичних наук **Сиваш Світланою Борисівною** – доцентом кафедри «Вища математика» Одеського національного морського університету та **Соколовською Галиною Володимирівною** – старшим викладачем тієї ж кафедри. Навчально-методичний посібник призначений для використання здобувачами вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальностями С1 Економіка та міжнародні економічні відносини (Економіка підприємства, Міжнародна економіка), D2 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансовий та інвестиційний менеджмент), D3 Менеджмент (Логістичний менеджмент, Проектний менеджмент, Морський бізнес), D5 Маркетинг (Маркетинг і бізнес-аналітика), J2 Готельно-ресторанна справа та кейтерінг (Готельно-ресторанна справа), J3 Туризм і рекреація (Туризм (морський та річковий)), J5 Морський та внутрішній водний транспорт (Організація перевезень та управління на транспорті) при вивченні вибіркової навчальної дисципліни загальноуніверситетського каталогу «Додаткові розділи вищої математики для економістів та управлінців».

Навчально-методичний посібник схвалено кафедрою «Вища математика» ОНМУ (протокол № 7 засідання кафедри ВМ від 27.03.2026 р.).

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент С.О. Кирилов,
канд. фіз.-мат. наук, доцент Ю.О. Григор'єв.

Розділ 1.

§1. Матриці, визначники та їх властивості

Означення. Матрицею розміру $m \times n$ називають прямокутну таблицю, що містить $m \times n$ чисел, розташованих у m рядках і n стовпцях. Ці числа називають елементами матриці. Якщо $m = n$, матрицю називають **квадратною матрицею** порядку n . Зазвичай матриці позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – відповідними малими літерами з подвійними індексами, де перший індекс означає номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких стоїть цей елемент. Наприклад, квадратну матрицю A третього порядку позначають так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Кажуть, що елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ матриці, елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} - побічну діагональ.

Матрицю розміру $1 \times n$ називають матрицею – рядком; матрицю розміром $m \times 1$ називають матрицею-стовпцем.

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке називають **визначником (детермінантом)** цієї матриці. Визначник позначають Δ або $\det A$ і записують у прямолінійних дужках.

Правила обчислення визначників. Визначник матриці другого порядку обчислюють за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.1)$$

Визначник матриці третього порядку обчислюють за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

Отримані визначники другого порядку обчислюють за формулою (1.1).

Приклади.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = -2 \cdot 10 - (-5) \cdot 3 = -20 + 15 = -5.$

2. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

$$3. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \\ = 2(5 + 6) + 1(1 - 8) + 3(-3 - 20) = 22 - 7 - 69 = -54.$$

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} даного визначника називають визначник, отриманий з даного викресленням i -го рядка та j -го стовпця (на перетині яких стоїть елемент a_{ij}).

$$\text{У прикладі 3: } M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2.$$

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають його мінор, якщо $(i + j)$ – парне число, і мінор, узятий з протилежним знаком, якщо $(i + j)$ – непарне число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Так, для прикладу 3

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 11, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = 2.$$

Тепер бачимо, що формулу (1.2) можна подати у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot A_{1k}. \quad (1.3)$$

Цю формулу називають розкладанням визначника за елементами першого рядка.

Обчислення визначника будь-якого порядку n виконують аналогічно:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k} \quad (1.4)$$

Таким чином, визначник порядку n виражається через визначники порядку $(n-1)$. Застосовуючи формулу (1.4) до визначників A_{1k} і повторюючи процедуру розкладання, прийдемо врешті-решт до визначників 2-го порядку.

Зауваження. Обчислення будь-якого визначника можна виконувати розкладанням його за елементами не лише першого, а й будь-якого іншого рядка або стовпця.

Приклад. 4. Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$, розклавши його за

елементами другого стовпця. Маємо: $\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} =$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3(-4 - 8) + 4(-8 + 8) + 3(4 + 2) = 36 + 18 = 54.$$

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо замінити його рядки стовпцями з тим же номером (таке перетворення називають *транспонуванням*).

Дійсно, формула (1.4) дозволяє безпосередньо це перевірити. Ця властивість встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника відносно будь-яких властивостей.

2. Якщо поміняти місцями два будь-яких рядка (стовпця) визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Зауваження. Властивості 1 і 2 дозволяють обґрунтувати твердження про те, що обчислення визначника можна здійснювати розкладанням його за елементами будь-якого рядка чи стовпця, тобто формулу (1.4) можна узагальнити так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{li} A_{li}, \quad (1.5)$$

де i або j - будь-яке з чисел $1, \dots, n$.

3. Визначник, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

6. Якщо кожний елемент k -го рядка (k -го стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, один з яких містить у k -му рядку (k -му стовпці) перші з цих доданків, а інший - другі; всі інші елементи трьох визначників незмінні.

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого його рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число.

8. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Справді, сума добутків елементів, наприклад, j -го рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів i -го рядка $\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot A_{ik}$ є згідно з формулою (1.5) розкладанням визначника, в якому i -й та j -й рядки однакові, тож за властивістю 3 він дорівнює нулю.

Властивість 8 дозволяє записати формулу (1.5) у вигляді

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \cdot A_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{lj} \cdot A_{li} = \begin{cases} \Delta, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \quad (1.6)$$

Зауваження. Використання властивості 7 часто дозволяє спростити його обчислення.

Приклад. 5. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

Додамо до елементів другого стовпця елементи першого, помножені на -2, а до елементів третього стовпця відповідні елементи першого, помножені на -1. Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2+(-2) & 1+(-1) \\ 3 & 4+(-6) & 5+(-3) \\ 6 & 7+(-12) & 8+(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = -4 + 10 = 6.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Обчисліть визначники: а) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \\ -7 & 3 & -8 \end{pmatrix}$. Обчисліть: а) $\det A$; б) M_{13} ;

в) $A_{32} + A_{21}$.

Відповіді: 1.а) -4; б) 102. 2.а) $\det A = 3$; б) $M_{13} = 1$; в) $A_{32} + A_{21} = 0$.

Лінійні дії над матрицями

Означення. Нульовою називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю.

Означення. Матрицю, одержану з даної матриці A заміною рядків відповідними стовпцями (або навпаки), називають **транспонованою матрицею** та позначають A^T .

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, тоді $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$.

Легко бачити, що $(A^T)^T = A$. Також для квадратної матриці $\det A = \det A^T$.

Означення. Квадратну матрицю називають *діагональною*, якщо всі її елементи, окрім діагональних, дорівнюють нулю.

Означення. Діагональну матрицю називають *одиничною*, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Позначають одиничну матрицю E . Зрозуміло, що $\det A = 1$.

Означення. Квадратну матрицю A називають *симетричною*, якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх значень i та j .

Вочевидь, для симетричної матриці $A^T = A$.

Означення. Квадратну матрицю A називають *трикутною*, якщо всі її елементи, розташовані над (або під) головною чи побічною діагоналлю, дорівнюють нулю.

До лінійних дій над матрицями відносять додавання (і пов'язане з ним віднімання) та множення матриці на число.

Означення. *Сумою двох матриць* однакових розмірів називають матрицю того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумах відповідних елементів матриць-доданків.

Наприклад, нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$.

Тоді $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Властивості додавання.

- 1) $A + B = B + A$ (комутативність);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативність);
- 3) $A + O = O + A = A$, де O – нуль-матриця.

Матриці A і B називають *взаємно протилежними*, якщо $A + B = O$, де O – нуль-матриця.

Матрицю, протилежну до матриці A , позначають $-A$. Її елементи протилежні відповідним елементам матриці A .

Різниця матриць: $A - B = A + (-B)$.

Означення. Добутком матриці A на число α називають матрицю, елементи якої є добутками елементів матриці A на це число.

Позначають такий добуток αA . Він має такі властивості:

- 1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ - асоціативність відносно числових множників;
- 2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ - дистрибутивність відносно числового множника;
- 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ - дистрибутивність відносно матричного множника;
- 4) $0 \cdot A = O$ для будь-якої матриці A ;
- 5) $\alpha \cdot O = O$ для будь-якого числа α ;

б) $1 \cdot A = A$, $-1 \cdot A = -A$ для будь-якої матриці A .

Таким чином лінійні дії над матрицями мають усі властивості лінійних дій над векторами.

Приклад. Для матриць $M = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ знайдемо матрицю $M - 2P$. Маємо: $2P = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. Тоді $M - 2P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Лінійна залежність рядків та стовпців

Всі означення та твердження в цьому пункті буде подано для матриць-рядків (для матриць-стовпців вони є аналогічними).

Означення. Лінійною комбінацією рядків A_1, A_2, \dots, A_k з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ називають рядок, що визначається рівністю $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$.

Означення. Систему рядків A_1, A_2, \dots, A_k називають **лінійно залежною**, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 > 0$), що відповідна лінійна комбінація є нульовим рядком. Умова $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_k^2 > 0$ означає, що серед коефіцієнтів лінійної комбінації обов'язково є відмінні від нуля.

Якщо ж лінійна комбінація $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$ дорівнює нульовому рядку лише за умови рівності нулю усіх її коефіцієнтів, то систему рядків називають **лінійно незалежною**.

Теорема 1.1. Система рядків A_1, A_2, \dots, A_k лінійно залежна тоді й тільки тоді, коли один з рядків є лінійною комбінацією інших.

Доведення. Необхідність. Нехай система A_1, A_2, \dots, A_k лінійно залежна. Тоді можна так підібрати коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ лінійної комбінації, що хоча б один з них не дорівнює нулю а лінійна комбінація є нульовим рядком. Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді $A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_3 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} A_k$, тобто рядок A_1 є лінійною комбінацією інших.

Достатність. Якщо деякий рядок, наприклад A_1 , є лінійною комбінацією інших рядків, тобто виконується рівність $A_1 = \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \dots + \alpha_k A_k$, то перепишемо її у вигляді $A_1 - \alpha_2 A_2 - \alpha_3 A_3 - \dots - \alpha_k A_k = O$, (O - нульовий рядок). тоді за означенням система рядків A_1, A_2, \dots, A_k є лінійно залежною, адже $\alpha_1 = 1 \neq 0$.

Теорема 1.2. Система рядків, яка містить нульовий рядок, лінійно залежна.

Доведення. Якщо серед рядків A_1, A_2, \dots, A_k один, наприклад A_1 , нульовий, то взявши $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_k = 0$, отримаємо $1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \dots + 0 \cdot A_k = O$. За означенням система рядків є лінійно залежною.

Множення матриць. Обернена матриця

Означення. Добутком матриці A на матрицю B називають матрицю $C = A \cdot B$, будь-який елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B .

Якщо $A = \{a_{ij}\}$ для $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ і $B = \{b_{jk}\}$ для $j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p$, то добуток $A \cdot B = C = \{c_{ik}\}$, де

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad (1.7)$$

де $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p$.

Для існування добутку $A \cdot B$ необхідно, щоб розміри множників були **узгоджені**: число стовпців матриці A має дорівнювати числу рядків матриці B .

Зауваження. Правило множення матриць легко запам'ятати, якщо сформулювати його так: елемент c_{ij} матриці $C = A \cdot B$, якій стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця, є скалярним добутком i -го вектор-рядка матриці A і j -го вектор-стовпця матриці B .

Приклади. 1. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицю

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Матриця A розміру 2×3 , матриця B розміру 3×3 . Отже

матриці-множники узгоджені, добуток існує та має розмір 2×3 . За правилом (1.7)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 21 & 28 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що добуток $B \cdot A$ не існує через неузгодженість розмірів.

2. Знайти добутки $A \cdot B$ і $B \cdot A$ для матриць $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що $A \cdot B \neq B \cdot A$, тобто множення матриць не комутативне.

Властивості множення матриць

1) В загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$, що випливає з наведених прикладів. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, матриці A і B називають **переставними (комутативними)**.

2) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ - асоціативність відносно множення на число.

3) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$ - дистрибутивність відносно додавання.

4) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ - асоціативність множення матриць.

5) $A \cdot E = E \cdot A = A$. Одинична матриця відіграє роль одиниці при множенні на будь-яку матрицю A .

6) $O \cdot A = A \cdot O = O$ для будь-якої матриці A .

7) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

8) Для квадратних матриць $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Означення. Матрицю A^{-1} називають **оберненою** до матриці A , якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Означення. Квадратну матрицю A називають **невиродженою**, якщо $\det A \neq 0$ і **виродженою**, якщо $\det A = 0$.

Теорема 1.3. Для того, щоб квадратна матриця мала обернену, необхідно і достатньо, щоб вона була неvirодженою.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці A існує обернена A^{-1} . Тоді $A \cdot A^{-1} = E$. За властивістю 8 $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$, отже $\det A \neq 0$ і $\det A^{-1} \neq 0$. Отже, матриця A є неvirодженою. При цьому $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Достатність доводиться безпосередньою побудовою оберненої матриці. Процес побудови проілюструємо на прикладі квадратної матриці третього порядку. Зауважимо, що алгоритм залишається в силі для матриці будь-якого порядку.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Для побудови оберненої матриці A^{-1}

потрібно:

1. Обчислити визначник $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Якщо $\det A \neq 0$, то

матриця A не вироджена і має обернену.

2. У матриці A кожний елемент a_{ij} замінити його алгебраїчним доповненням A_{ij} . Отримаємо матрицю $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$.

3. Транспонувати матрицю \tilde{A} : $(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - це так звана

приєднана матриця.

4. Кожний елемент отриманої матриці розділити на визначник даної матриці A , внаслідок чого і отримаємо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\tilde{A})^T \quad (1.8)$$

Перевіримо, що отримана матриця справді є оберненою для матриці A .

Обчислимо добуток матриць A і A^{-1} :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{\det A} (A \cdot \tilde{A}^T) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ тому що } \sum_{k=1}^n c_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot A_{kj} = \begin{cases} \det A, \text{ якщо } i = k, \\ 0, \text{ якщо } i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно перевіряється рівність $A^{-1} \cdot A = E$.

Відзначимо деякі властивості невироджених матриць:

1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Дійсно, $B^{-1} A^{-1} \cdot (AB) = B^{-1} \cdot (A^{-1} A) B = B^{-1} \cdot E \cdot B = B^{-1} \cdot B = E$.

2. $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ - випливає з попередньої властивості.

Приклади. 1. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Обчислимо $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 40 = 2 \neq 0$.

2) Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

3) Транспонуємо матрицю з алгебраїчних доповнень:

$$(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -8 & 6 & -5 \\ 10 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Знаходимо обернену матрицю за формулою (1.8):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\tilde{A})^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -3 \\ -8 & 6 & -5 \\ 10 & -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1,5 \\ -4 & 3 & -2,5 \\ 5 & -4 & 3,5 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1,5 \\ -4 & 3 & -2,5 \\ 5 & -4 & 3,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1,5 \cdot 2 & -2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - 1,5 \cdot 4 & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 1,5 \cdot 4 \\ -4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2,5 \cdot 2 & -4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 2,5 \cdot 4 & -4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 2,5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 3,5 \cdot 2 & 5 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 + 3,5 \cdot 4 & 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 3,5 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити матрицю $C = A^2 - 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Отже, } C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = C$,

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Помножимо обидві частини матричного рівняння зліва на матрицю A^{-1} :
 $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$, звідки за означенням оберненої матриці $X = A^{-1} \cdot C$.
 Обчислимо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0, \text{ отже обернена матриця існує і задача є розв'язною.}$$

Алгебраїчні доповнення елементів матриці A є такими числами:

$A_{11} = a_{22} = 1$, $A_{12} = -a_{21} = -1$, $A_{21} = -a_{12} = -2$, $A_{22} = a_{11} = 3$. Приєднана матриця має вигляд $(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Оскільки $\det A = 1$, то $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайдемо

$$\text{добуток } A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$. Пропонуємо самостійно зробити перевірку.

4. Обчислити матрицю $C = A(A + E) - 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Розв'язання. Матриця } A \text{ третього порядку, тому } E -$$

одинична матриця третього порядку. Отже,

$$\begin{aligned} A + E &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A \cdot (A + E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ -4 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) & -4 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & -4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -12 & -6 & -4 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 \\ -12 & -6 & -4 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Для даних матриць $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ знайти:

а) $M + C$; б) $M - C$; в) $C^T \cdot M$.

2. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти:

а) $B - 2A$; б) $A^{-1}B$; в) $A \cdot (A - B)$; г) $(A - E) \cdot B$.

3. Для даної матриці $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ знайти обернену.

4. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,
де $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.

Відповіді: 1. а) $M + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, б) $M - C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $C^T \cdot M = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6 \\ 19 & 25 & -3 \\ 5 & -5 & -17 \end{pmatrix}$.

2. а) $B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, б) $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

в) $A \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, г) $(A - E) \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}$.

3. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{12} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. 4. $X = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$.

Ранг матриці

Означення. *Елементарними перетвореннями* матриці називають такі перетворення:

1. Перестановка рядків (стовпців).
2. Множення кожного елемента будь-якого рядка (стовпця) на відмінне від нуля число.
3. Додавання до елементів довільного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне відмінне від нуля число.

Означення. *Рангом* матриці (квадратної або прямокутної) називають максимальне число її лінійно незалежних рядків (стовпців). Ранг матриці A позначають $\text{rang } A$.

Ранг матриці можна визначити як найвищий порядок відмінних від нуля її мінорів.

Нуль-матриці приписують нульовий ранг. Транспонування матриці не змінює її рангу.

Означення. Матриці A і B називають *еквівалентними* (пишуть $A \sim B$), якщо від однієї з них можна перейти до іншої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Вочевидь, для еквівалентних матриць виконано: $\text{rang } A = \text{rang } B$.

Таким чином, найпростіше знаходити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють її ранг. Цей метод полягає у зведенні заданої матриці до еквівалентної їй матриці трапецеїдального або трикутного вигляду, для якої значення рангу є очевидним.

Приклади. 1. Знайти ранг матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & 9 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Помножимо перший рядок на -2 і додаємо до

другого; помножимо перший рядок на -3 і додаємо до третього; помножимо

перший рядок на -1 і додаємо до четвертого: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Переставимо

другий рядок на місце останнього: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Одержана матриця має

трапецеїдальний вид і її ранг дорівнює двом. Цей результат впливає також із

2. Множення обох частин рівняння на одне й те ж відмінне від нуля число.

3. Додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне відмінне від нуля число.

Метод Крамера

$$\text{Визначник } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ що складається зі стовпців}$$

коефіцієнтів при невідомих, називають **основним** визначником системи.

Розглянемо також визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Як бачимо, визначник Δ_i утворюється із основного визначника системи шляхом заміни стовпця коефіцієнтів при i -тому невідомому стовпцем правих частин рівнянь системи.

Теорема 1.4 (теорема Крамера). Якщо основний визначник Δ системи (1.9) не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок (ϵ визначеною). Розв'язок системи знаходять за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.10)$$

Доведення. Виконаємо низку елементарних перетворень системи рівнянь (1.9). Помножимо обидві частини кожного (i – того) рівняння системи на відповідне алгебраїчне доповнення $A_{i1}, i = \overline{1, n}$, елемента першого стовпця її основного визначника. Додавши відповідні частини отриманих рівнянь, дістанемо рівняння

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}) + \dots + x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}. \quad (1.11)$$

Згідно з формулою (1.6) коефіцієнти при всіх невідомих окрім коефіцієнта при x_1 , який дорівнює основному визначнику системи Δ , дорівнюють нулю. Права частина рівняння (1.11) є розвиненням визначника Δ_1 за елементами першого стовпця, тобто дорівнює Δ_1 . Отже (1.11) можна записати у вигляді

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1. \quad (1.12)$$

Аналогічно дістанемо рівняння

$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \quad \Delta \cdot x_3 = \Delta_3, \quad \dots, \quad \Delta \cdot x_n = \Delta_n, \quad (1.13)$$

помноживши кожне рівняння системи на алгебраїчне доповнення відповідного елемента другого, третього, ..., n -го стовпця. Оскільки за умовою $\Delta \neq 0$, то з формул (1.12), (1.13) одержимо єдиний розв'язок системи у вигляді (1.10).

Приклад. Розв'язати методом Крамера систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Основний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -54 \neq 0$,

тому система має єдиний розв'язок. Знаходимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -108, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 54. \text{ За}$$

формулами (1.10) маємо $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-108}{-54} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-54} = 0$,

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{-54} = -1.$$

Матричний метод

Для системи (1.9) запишемо матрицю коефіцієнтів при невідомих $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, її називають **основною матрицею** системи. Розглянемо

також матриці-стовпці $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Запишемо систему (1.9) у

матричному вигляді

$$A \cdot X = B. \quad (1.14)$$

Якщо основний визначник Δ відмінний від нуля, тобто матриця A невинроджена, то вона має обернену матрицю A^{-1} . Помножимо обидві частини матричного рівняння (1.14) на A^{-1} зліва. Тоді

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ тобто } X = A^{-1}B.$$

Таким чином, щоб знайти розв'язок системи n лінійних рівнянь з n невідомими, основний визначник якої не дорівнює нулю, треба знайти обернену матрицю до матриці коефіцієнтів і помножити її на стовпець правих частин. В результаті дістанемо стовпець – розв'язок даної системи рівнянь.

Приклад. Розв'яжіть матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Розв'язання. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$. Знайдемо обернену

матрицю $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ та розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \cdot 9 - \frac{5}{6} \cdot 14 + \frac{13}{6} \cdot 16 \\ \frac{5}{3} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 14 - \frac{4}{3} \cdot 16 \\ \frac{1}{3} \cdot 9 - \frac{1}{6} \cdot 14 - \frac{1}{6} \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть кожну з систем рівнянь двома способами: методом Крамера і матричним методом:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 17, \\ 3x + 4y - z = -3, \\ x + 7y + 2z = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 6y + z = 7, \\ 3x + 4y - 2z = -1, \\ 2x - 2y - z = 4. \end{cases}$

Відповіді: а) $x = 5$, $y = 1$; б) $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$; в) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$.

Метод Гаусса

Для системи (1.9) запишемо основну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

приєднаємо до неї справа стовпець правих частин і отримаємо матрицю

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right), \text{ яку назвемо } \textit{розширеною матрицею} \text{ системи. Для}$$

спрощення записів елементарні перетворення системи можна оформлювати як відповідні дії з рядками її розширеної матриці.

Приклад. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо перше рівняння до другого та третього, помноживши обидві його частини на -2 та -3 відповідно. Маємо:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & 7 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & 7 & 4 \end{array} \right). \text{ Додавши до третього рівняння друге,}$$

помножене на -1 , дістанемо: $A^* \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right)$. Таким чином, система рівнянь

$$\text{набула вигляду: } \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 9x_2 + 7x_3 = -4, \text{ отже є несумісною.} \\ 0 = 8, \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо елементарні перетворення розширеної матриці

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -9 & 4 & 7 \\ 0 & -9 & 4 & 7 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -9 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Маємо систему рівнянь}$$

Запишемо основну матрицю системи (1.15) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ та її

розширену матрицю $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$

Теорема 1.5 (теорема Кронекера-Капеллі). Для того, щоб система (1.15) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи дорівнював рангу її розширеної матриці.

Доведення. Необхідність. Нехай система (1.15) сумісна і $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ - її розв'язок. Тоді $\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m, \end{cases}$,

звідки випливає, що стовпець правих частин B є лінійною комбінацією інших стовпців матриці A^* , що є стовпцями матриці A . Тому $\text{rang} A^* \leq \text{rang} A$. Але, з іншого боку $\text{rang} A \leq \text{rang} A^*$. Тому $\text{rang} A = \text{rang} A^*$, що й треба було довести.

Достатність. Нехай $\text{rang} A = \text{rang} A^* = r$. Припустимо, що відмінний від нуля мінор порядку r розташований у верхньому лівому кутку:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Це припущення не обмежує загальності міркувань, адже елементарні перетворення завжди дають можливість цього досягти. Тоді перші r рядків розширеної матриці лінійно незалежні, а решта є лінійною комбінацією перших r рядків. Це означає, що в системі (1.15) перші r рівнянь незалежні, а інші – їх наслідки. Тому розв'язком системи (1.15) є розв'язок системи, яка складається з перших r рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Приклад. Знайти яку-небудь фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи рівнянь
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$
 та її загальний розв'язок.

Розв'язання. Застосуємо метод Гаусса

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & -2 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & -6 & 0 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отримали систему двох рівнянь з чотирма невідомими. Нехай x_3 і x_4 - вільні невідомі, x_1 та x_2 - базисні, тоді систему запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - 2x_4, \\ -5x_2 = 13x_3 + 6x_4, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = -\frac{2x_3 + 4x_4}{5}, \\ x_2 = -\frac{13x_3 + 6x_4}{5}. \end{cases} \text{ При виборі фундаментальної}$$

системи розв'язків вільним невідомим зазвичай надають таких значень, щоб утворена з цих стовпців (тут $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$) матриця була одиничною. Тому нехай

спочатку $x_3 = 1, x_4 = 0$, маємо розв'язок $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тепер навпаки $x_3 = 0, x_4 = 1$, тоді

$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{16}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Щоб уникнути дробів у значеннях базисних змінних, помножимо

отримані стовпці на -5 . Отже фундаментальну систему розв'язків складають

стовпці $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, загальний розв'язок: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$, де C_1, C_2 -

довільні числа.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} x - 2y - 4z = -20, \\ 3x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y - z = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} x - 5y - 2z = 4, \\ 3x + y - 6z = 12, \\ 2x + 3y - 4z = 8. \end{cases} \end{array}$$

Відповіді: 1. а) $x = 2, y = 3, z = 4$; б) $x = 2z - 1, y = z + 1, z \in R$; в) система не має розв'язків; г) $x = 2z + 4, y = 0, z \in R$.

2. Дослідити сумісність системи рівнянь. Знайти всі її розв'язки.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Відповіді:

$$\text{а) } \text{rang } A = \text{rang } A^*, x_1 = \frac{10 - 18x_3 + x_4 - x_5}{6}, x_2 = \frac{8 - 42x_3 - 7x_4 + 7x_5}{6}, x_3, x_4, x_5 \in R;$$

б) $\text{rang } A = 2, \text{rang } A^* = 3 \Rightarrow$ система несумісна.

3. Знайдіть яку-небудь фундаментальну систему розв'язків однорідної системи

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Відповіді: а) } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2.

§1. Лінійний простір. Базис і вимірність лінійного простору

Множину M (елементи якої позначатимемо a, b, c, \dots) з введеними на ній операціями додавання та множення на число назвемо **лінійним (або векторним) простором над полем R** , якщо вона задовольняє такі умови:

1. Для будь-якого елемента a множини M і будь-якого числа $\alpha \in R$ $\alpha a \in M$.
2. Для будь-яких елементів a і b множини M $a + b \in M$.
3. $a + b = b + a$ для всіх $a, b \in M$.
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$ для всіх $a, b, c \in M$.
5. У множині M існує нейтральний елемент $\bar{0}$ такий, що $a + \bar{0} = a$ для всіх $a \in M$.
6. Для будь-якого $a \in M$ існує протилежний елемент $(-a)$: $a + (-a) = \bar{0}$.
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для всіх $a, b \in M$, $\alpha \in R$.
8. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ для всіх $a \in M$, $\alpha, \beta \in R$.
9. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для всіх $a \in M$, $\alpha, \beta \in R$.

Елементи множини M будемо називати **векторами** незалежно від їх природи. Прикладами векторних просторів можуть бути: множина дійсних чисел, множина векторів у площині, множина всіх геометричних векторів, множина функцій $C_{[a;b]}$, неперервних на заданому відрізку $[a;b]$, множина матриць однакового розміру тощо.

Приклади. Перевірити, чи утворюють лінійний простір над полем R такі множини:

- 1) Множина матриць виду $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in R$. Так, оскільки умови 1-9 виконано.
- 2) Множина матриць виду $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in R$. Ні, адже матриця αA не належить вказаній множині, якщо $\alpha \neq 1$ (не виконано умову 1).
- 3) Множина многочленів третього степеня. Ні, адже сума таких многочленів може мати нижчий степінь (порушено умову 2).
- 4) Множина многочленів степеня не вище третього. Так.

Лінійною комбінацією векторів a_1, a_2, \dots, a_n з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ($\alpha_k \in R$, $k = \overline{1, n}$) називають суму

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Вектори a_1, a_2, \dots, a_n називають **лінійно залежними**, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких обов'язково є відмінні від нуля

$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0)$, що лінійна комбінація цих векторів з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дорівнює нейтральному елементу (нульовому вектору)

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0}.$$

Якщо ця рівність є правильною лише за умови, що всі коефіцієнти $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то вектори a_1, a_2, \dots, a_n називають **лінійно незалежними**.

Теорема 2.1. Якщо хоча б один з векторів a_1, a_2, \dots, a_n нульовий, то ці вектори лінійно залежні.

Доведення. Дійсно, нехай $a_1 = \bar{0}$. Тоді для будь-яких векторів є правильною рівність:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0},$$

якщо $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Отже, a_1, a_2, \dots, a_n лінійно залежні.

Теорема 2.2. Якщо до системи лінійно залежних векторів приєднати ще один вектор, то отримана система векторів є лінійно залежною.

Доведення. Нехай вектори a_1, a_2, \dots, a_{n-1} лінійно залежні. Тобто існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 > 0)$, що $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} = \bar{0}$. Нехай a_n довільний вектор, і $\alpha_n = 0$. Тоді $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0}$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 > 0)$, отже, вектори a_1, a_2, \dots, a_n лінійно залежні.

Теорема 2.3. Вектори a_1, a_2, \dots, a_n лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них можна подати у вигляді лінійної комбінації інших.

Доведення. Необхідність. Нехай вектори a_1, a_2, \dots, a_n лінійно залежні. Тоді існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0)$, що $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0}$. Припустимо, що саме α_n відмінний від нуля. Тоді

$$a_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} a_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} a_{n-1}.$$

Отже вектор a_n подано у вигляді лінійної комбінації векторів a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .

Достатність. Нехай, наприклад, $a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}$. Тоді $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} - a_n = \bar{0}$. Це означає, що лінійна комбінація векторів a_1, a_2, \dots, a_n дорівнює $\bar{0}$, і принаймні один з коефіцієнтів відмінний від нуля, адже $\alpha_n = -1$. Отже, ця система векторів лінійно залежна.

Вправи для самостійного розв'язування

Доведіть такі твердження:

1) Якщо система a_1, \dots, a_k є лінійно-незалежною, а система a_1, \dots, a_k, a_{k+1} – лінійно-залежною, то a_{k+1} є лінійною комбінацією векторів a_1, \dots, a_k .

2) Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи векторів є лінійно незалежною.

3) Якщо деяка підсистема даної системи векторів є лінійно залежною, то і вся система є лінійно залежною.

Базисом лінійного простору M називають впорядковану систему векторів e_1, e_2, \dots, e_n , що має такі властивості:

1) вона є лінійно незалежною;

2) будь-який вектор a цього простору можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів e_1, e_2, \dots, e_n : $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.

Коефіцієнти вказаної лінійної комбінації називають координатами вектора a в

даному базисі. Пишуть $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Теорема 2.4. Якщо e_1, e_2, \dots, e_n – базис лінійного простору, то координати будь-якого вектора a цього простору визначаються однозначно.

Доведення. Уявімо, що $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ та $a = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ – два розвинення одного й того ж вектора по одному й тому ж базису. Тоді $a - a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n - (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$. Останнє можливо лише за умови: $\alpha_i = \beta_i, i = \overline{1, n}$, адже e_1, e_2, \dots, e_n лінійно незалежні

Теорема 2.5. Якщо в даному базисі $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\lambda \in R$, то в цьому

базисі $\lambda a = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \dots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix}$, $a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$.

Доведіть самостійно.

Наслідок. Вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли лінійно залежні їх координатні стовпці.

Теорема 2.6. Якщо в лінійному просторі існує базис з n векторів, то будь-який інший базис також складається з n векторів.

Доведення. Припустимо, що e_1, e_2, \dots, e_n та f_1, f_2, \dots, f_m - два різних базиси, при цьому $m > n$. Розкладемо кожен з векторів f_1, f_2, \dots, f_m по базису e_1, e_2, \dots, e_n і розглянемо матрицю, стовпцями якої будуть отримані координатні стовпці. Ця матриця має розміри $n \times m$, тож її ранг не перевищує n (адже $n < m$). Тоді її стовпці лінійно залежні, отже, лінійно залежні й вектори f_1, f_2, \dots, f_m . Тоді ця система векторів не є базисом.

Лінійний простір, базис якого містить n векторів, називають n -*вимірним*, а число n - *вимірністю (або розмірністю) простору*. Пишуть $\dim M = n$.

Приклад. Визначте вимірність лінійного простору. Наведіть приклад базису цього простору.

1) Множина геометричних векторів паралельних одній площині.

Це двовимірний простір. Базисом можуть бути будь-які два неколінеарні вектори.

2) Множина матриць виду $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in R$.

Цей простір тривимірний. Його базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Дійсно, по-перше, ці матриці лінійно незалежні, адже $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

лише за умови $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. По-друге, для будь-якої матриці

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in R$, є правильною рівність $A = a e_1 + b e_2 + c e_3$.

1) Множина многочленів степеня не вище третього.

Це чотиривимірний простір, базис якого $1, x, x^2, x^3$.

Підмножину L лінійного простору M називають *лінійним підпростором* простору M , якщо вона сама є простором. Це означає, що вона 1) замкнена відносно лінійних операцій, визначених в цьому просторі, тобто $\lambda a \in L$, $a + b \in L$ для будь-яких елементів a і b множини L і будь-якого дійсного числа λ , 2) містить нейтральний елемент і протилежний елемент для кожного вектора. Решта умов, які має задовольняти лінійний простір, для будь-якої підмножини простору M виконані автоматично. Нехай e_1, e_2, \dots, e_k - лінійно незалежна система векторів n -вимірного простору M . Зрозуміло, що $k \leq n$. Розглянемо множину $L(e_1, e_2, \dots, e_k)$ всіх можливих лінійних комбінацій цих векторів. Ця множина замкнена відносно операцій додавання та множення на число, містить нейтральний елемент (лінійну комбінацію з нульовими коефіцієнтами) і протилежний елемент для будь-якого елемента (лінійну комбінацію з протилежними коефіцієнтами). Лінійний підпростір $L(e_1, e_2, \dots, e_k)$

простору M назвемо *лінійною оболонкою*, натягнутою на вектори e_1, e_2, \dots, e_k . Ці вектори утворюють його базис. Отже, $\dim L(e_1, e_2, \dots, e_k) = k$.

Розглянемо множину, що складається лише з одного нульового вектора $\{\bar{0}\}$. Легко бачити, що $\{\bar{0}\} = L(\bar{0})$ - лінійна оболонка, натягнута на нульовий вектор отже є підпростором. Його називають *нульовим* або *тривіальним* підпростором.

Вправи для самостійного розв'язування

Визначте, чи є задана множина лінійним підпростором. У випадку ствердної відповіді вкажіть який-небудь його базис.

1) Множина квадратних матриць виду $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ -b & b \end{pmatrix}$, $a, b \in R$.

2) Множина усіх неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій, значення яких в точці a дорівнює нулю.

3) Множина всіх многочленів не вище другого степеня $P_2(x)$, що задовольняють умову $P_2(0) = 0$.

4) Множина всіх многочленів не вище другого степеня $P_2(x)$, що задовольняють умову $P_2(0) = 5$.

Відповіді:

1) Так, це лінійний підпростір простору усіх матриць розміру 2×2 . Базис: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Так, це нескінченновимірний лінійний підпростір простору $C_{[a;b]}$.

3) Так, це лінійний підпростір простору многочленів степеня не вище другого. Базис: x^2, x .

4) Ні, ця множина не є лінійним підпростором. Вона не містить нульового елемента.

§2. Дійсний евклідовий простір

Лінійний простір над полем дійсних чисел називають *дійсним евклідовим простором*, якщо в ньому визначена операція скалярного добутку двох будь-яких векторів, тобто будь-якій парі векторів a і b простору ставиться у відповідність дійсне число (a, b) . При цьому для будь-яких векторів простору мають виконуватися умови (аксіоми):

1. $(a, b) = (b, a)$;

2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$;

3. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$, $\lambda \in R$;
4. $(a, a) > 0$, якщо $a \neq \bar{0}$; $(a, a) = 0$ лише при $a = \bar{0}$.

Звернімо увагу на наслідки аксіом 1-4, що справджуються для будь-яких векторів та чисел :

1. $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;
2. $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$, $\lambda \in R$;
3. $\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, b \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i, b)$, $\left(a, \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a, b_i)$;
4. $(a, \bar{0}) = 0$.

Приклади.

1) Для геометричних векторів (напрямлених відрізків) можна визначити скалярний добуток як добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

2) У лінійному просторі стовпців $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ скалярний добуток

визначимо формулою $(a, b) = a^T G b$, де $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевіримо виконання

аксіом 1-4.

$$(a, b) = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 - a_2 \quad -a_1 + 2a_2 \quad a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 - a_2)b_1 + (-a_1 + 2a_2)b_2 + a_3b_3 = a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_3b_3 - a_1b_2 - a_2b_1. \quad \text{Вочевидь,}$$

аксіому 1 виконано. Перевіримо аксіоми 2 та 3.

$$(a + b, c) = (a_1 + b_1)c_1 + 2(a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 - (a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1 =$$

$$= a_1c_1 + 2a_2c_2 + a_3c_3 - a_1c_2 - a_2c_1 + b_1c_1 + 2b_2c_2 + b_3c_3 - b_1c_2 - b_2c_1 = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$

$$(\lambda a, b) = \lambda a_1 b_1 + 2\lambda a_2 b_2 + \lambda a_3 b_3 - \lambda a_1 b_2 - \lambda a_2 b_1 = \lambda(a, b).$$

Знайдемо (a, a) :

$$(a, a) = a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0. \quad (a, a) = 0 \text{ лише за умови}$$

$$a_1 - a_2 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0. \text{ Аксіоми 1-4 виконано.}$$

3) На множині функцій, неперервних на проміжку $[a; b]$, скалярний

добуток визначимо формулою: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ для будь-яких двох

функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ з $C_{[a,b]}$. Справедливість аксіом 1-4 випливає з властивостей визначеного інтеграла.

Лінійний простір називають **нормованим**, якщо кожному вектору a цього простору поставлено у відповідність число $\|a\|$ (його **норма або довжина**), що задовольняє умови (аксіоми):

- 1) $\|a\| \geq 0$, $\|a\| = 0$ лише при $a = \bar{0}$;
- 2) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;
- 3) $\|\lambda a\| \leq |\lambda| \cdot \|a\|$ для всіх векторів та чисел.

У лінійному евклідовому просторі норму визначають за формулою: $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$. Можна довести, що визначена таким чином норма задовольняє аксіоми 1-3.

Кут між двома векторами a і b евклідового простору називають таке число φ (де $\varphi \in [0; \pi]$), що $\cos \varphi = \frac{(a,b)}{\|a\| \cdot \|b\|}$. Вектори a і b називають **ортогональними (перпендикулярними)**, якщо $(a,b) = 0$.

Приклад. Чи будуть ортогональні функції $f(x) = \sin x$ та $g(x) = \sin 2x$ у лінійному евклідовому просторі неперервних на проміжку $[0; \pi]$ функцій, де скалярний добуток визначено як у прикладі 3?

Розв'язання:

$$(f, g) = \int_0^{\pi} \sin x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos x - \cos 3x) dx = \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right) \Big|_0^{\pi} = 0. \quad \text{Отже,}$$

функції ортогональні.

Ортонормований базис

Систему векторів a_1, a_2, \dots, a_n назвемо ортонормованою, якщо ці вектори попарно ортогональні, а їх довжини дорівнюють одиниці: $(a_i, a_j) = 0$, при $i \neq j$ та $(a_i, a_i) = 1$ для всіх номерів.

Теорема 2.7. Ортонормована система векторів лінійно незалежна.

Доведення. Розглянемо рівність $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \bar{0}$. Помножимо обидві її частини скалярно на a_i (i -будь-який номер), маємо: $\alpha_i (a_i, a_i) = \alpha_i = 0$. Усі доданки лівої частини окрім одного дорівнюють нулю. Таким чином, указана рівність є правильною лише за умови рівності нулю всіх коефіцієнтів лінійної комбінації. Отже вектори лінійно незалежні.

Нехай у n -вимірному евклідовому просторі є ортонормована система n векторів. Тоді згідно з теоремою 2.7 вона є базисом. Будемо називати цей базис **ортонормованим**.

Теорема 2.8. У n -вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис.

Доведення проводимо методом математичної індукції. Якщо $n=1$ і a - будь-який ненульовий вектор, то вектор $e = \frac{1}{\|a\|}a$ є одиничним, отже утворює ортонормований базис.

Тепер припустимо, що у будь-якому $(n-1)$ -вимірному евклідовому просторі існує ортонормований базис і доведемо аналогічне твердження для будь-якого n -вимірного евклідового простору. Нехай a_1, a_2, \dots, a_n - його довільний базис. Розглянемо лінійну оболонку, натягнуту на перші $(n-1)$ векторів a_1, a_2, \dots, a_{n-1} цього базису. Це $(n-1)$ -вимірний лінійний евклідовий простір, у якому, згідно з припущенням, існує ортонормований базис e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . Розглянемо вектор $b_n = a_n - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \dots - \alpha_{n-1} e_{n-1}$, у якому коефіцієнти $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$, вибрано так, щоб він був ортогональний до кожного з векторів e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . Оскільки ця система векторів ортонормована, то $(b_n, e_i) = (a_n, e_i) - \alpha_i$, звідки $\alpha_i = (a_n, e_i), i = \overline{1, n-1}$. Тепер розглянемо вектор $e_n = \frac{1}{\|b_n\|}b_n$ одиничної довжини, що ортогональний кожному з векторів e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . Тож система векторів $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n$ є ортонормованим базисом.

Вправи для самостійного розв'язування

1. У просторі $C_{[0;1]}$ з визначеним формулою $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ скалярним добутком знайдіть: а) скалярний добуток (x, x^2) ; б) $\|2x - 1\|$.

2. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. У просторі матриць-стовпців висоти 2 визначено скалярний добуток за формулою $(x, y) = x^T A y$ для будь-яких двох векторів $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ та $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Знайдіть косинус кута між векторами $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді: 1. а) $(x, x^2) = \frac{1}{4}$, б) $\|x\| = \frac{1}{3}$; 2. $\cos \varphi = 1$.

§3. Комплексні числа

Комплексні числа виникають при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь. Наприклад, розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + 2x + 10 = 0.$$

Оскільки дискримінант $D = 4 - 40 = -36$ цього рівняння від'ємний, то дійсних коренів немає. Припустимо, що існує число i таке, що $i^2 = -1$. Число i назвали *уявною одиницею*. Тоді $D = 36i^2$ і $\sqrt{D} = 6i$. Отже, рівняння має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i.$$

Числа такого виду назвали комплексними числами.

Комплексними числами називають числа виду: $z = a + bi$, де a і b – дійсні числа, i – уявна одиниця. Число a називають *дійсною частиною* комплексного числа, b – його *уявною частиною*. Пишуть $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Дії над комплексними числами

Дії над комплексними числами виконують так само, як з буквенними виразами. Але треба пам'ятати, що $i^2 = -1$.

Додавання: $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Віднімання: $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Множення:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Комплексні числа $a + bi$ і $a - bi$ називають *комплексно спряженими або спряженими*. Число спряжене з числом z позначають так: \bar{z} . Добуток спряжених чисел – дійсне число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2.$$

Маємо формулу:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

Ділення. Щоб виконати ділення комплексних чисел, потрібно чисельник і знаменник помножити на комплексне число, яке спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Приклади. Дано: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 4i$. Виконайте дії:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad z_1 : z_2.$$

Розв'язання. $z_1 + z_2 = 3 + 2i + 1 - 4i = 4 - 2i$, $z_1 - z_2 = 3 + 2i - 1 + 4i = 2 + 6i$,

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 + 8 - 10i = 11 - 10i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 4i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} = \frac{3 + 12i + 2i - 8}{1 + 16} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

Вправи для самостійного розв'язування

Дано: $z_1 = -5 + 2i$, $z_2 = 3 + i$. Виконайте дії: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$.

Відповіді:

$$z_1 + z_2 = -2 + 3i, \quad z_1 - z_2 = -8 + i, \quad z_1 \cdot z_2 = -17 + i, \quad z_1 : z_2 = -1,3 + 1,1i.$$

Геометричний зміст комплексного числа

Нехай дано комплексне число $z = a + bi$. Поставимо йому у відповідність точку на площині xOy з координатами $(a; b)$ (рис. 1). Зауважимо, що будь-яке дійсне число a також може бути подано у вигляді $a + ib$, а саме: $a = a + 0i$. Отже, дійсне число вважаємо окремим видом комплексного числа. Тоді числу a у цій площині відповідає точка $(a; 0)$. Отже комплексні числа зображуються точками на площині, зокрема дійсні числа – точками на дійсній осі (Ox).

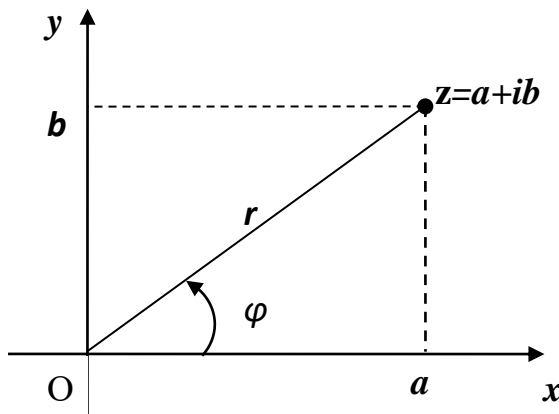


Рис. 1

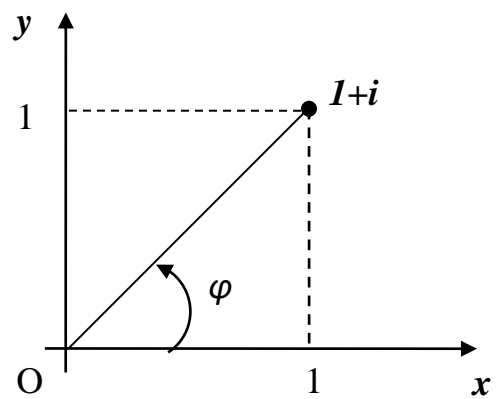


Рис. 2

Відстань від точки z до початку координат називають модулем комплексного числа і позначають так: r або $|z|$. Вочевидь,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.1)$$

Кут між додатним напрямом осі Ox і відрізком Oz називають аргументом комплексного числа і позначають φ або $\arg z$. Маємо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (2.2)$$

Тригонометрична форма запису комплексного числа

Нехай дано модуль r і аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$. За рис. 1 знайдемо: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

Тоді комплексне число можна записати так: $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$, або

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.3)$$

Цей запис називають **тригонометричною формою комплексного числа** а вже відому нам форму $z = a + bi$ - **алгебраїчною**.

Якщо відомі a і b , то r можна знайти за формулою (2.1), а φ - за формулою (2.2) і рисунком.

Показникова форма комплексного числа

Розглянемо функцію, що задана формулою (**формулою Ейлера**):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Формулу (2.3) тепер можна записати у вигляді:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Це **показникова форма запису** комплексного числа.

Властивості функції $e^{i\varphi}$.

Властивості функції $e^{i\varphi}$ схожі на властивості показникової функції дійсної змінної, а саме:

$$1) e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$2) e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}.$$

Доведення ґрунтується на формулі Ейлера:

$$1) e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$2) \frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Дії над комплексними числами в показниковій формі

Нехай дано два комплексних числа, що записані в показниковій формі:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{і} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$\mathbf{Множення:} \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Щоб помножити два комплексних числа треба перемножити модулі цих чисел, а аргументи додати.

Ділення: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Щоб виконати ділення комплексних чисел, треба розділити модуль діленого на модуль дільника, а їх аргументи відняти.

Піднесення до степеня.

Степенем комплексного числа z з натуральним показником n називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює z .

Нехай $z = re^{i\varphi}$, тоді $z^n = re^{i\varphi} \cdot re^{i\varphi} \cdot \dots \cdot re^{i\varphi} = r^n e^{i(\varphi + \varphi + \dots + \varphi)} = r^n e^{in\varphi}$.

При піднесенні комплексного числа z до натурального степеня n треба піднести до степеня n модуль числа, а аргумент помножити на n .

Добування кореня.

Коренем n -го степеня з комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ назвемо комплексне число $w = \rho e^{i\theta}$ таке, що $w^n = z$:

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \rho e^{i\theta} \Rightarrow (\rho e^{i\theta})^n = re^{i\varphi} \Rightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}.$$

Якщо два комплексних числа рівні, то їх модулі рівні, а аргументи можуть відрізнятися на число кратне 2π (рис. 1). Таким чином $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, де k – ціле число. Звідси маємо: $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$. Отже

отримали формулу для знаходження усіх значень кореня $\sqrt[n]{re^{i\varphi}}$:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

У цій формулі k вже не є довільним цілим числом, адже при довільному k серед нескінченної кількості комплексних чисел, які тут записані, лише n є різними. Числу k тут надаються лише послідовні значення $0, 1, 2, \dots, n-1$, за яких формула (2.4) задає n різних комплексних чисел. Формулу (2.4) називають **формулою Муавра (Моавра)**.

Приклади. Виконати дії:

1) $(1+i)^{14}$.

Розв’язання. Запишемо комплексне число $z = 1+i$ в показниковій формі $z = re^{i\varphi}$. З рис. 2 видно, що

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Тому в показниковій формі це число записується так:

$$z = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Тепер виконаємо дії

$$(1+i)^{14} = (\sqrt{2})^{14} e^{14 \cdot \frac{\pi}{4} i} = 2^7 e^{\frac{7\pi}{2} i} = 128 e^{\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) i} = 128 e^{\frac{3\pi}{2} i} = -128i.$$

$$2) \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^2}.$$

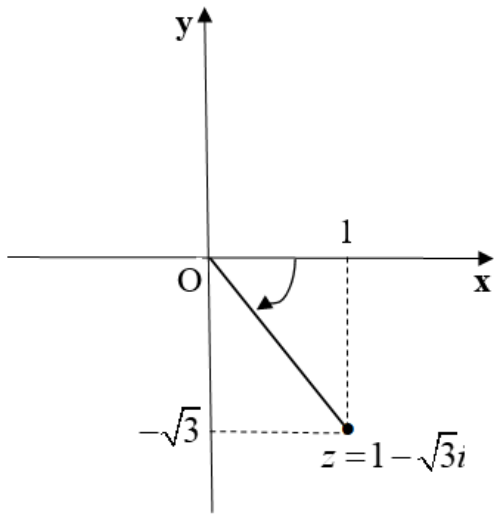


Рис.3

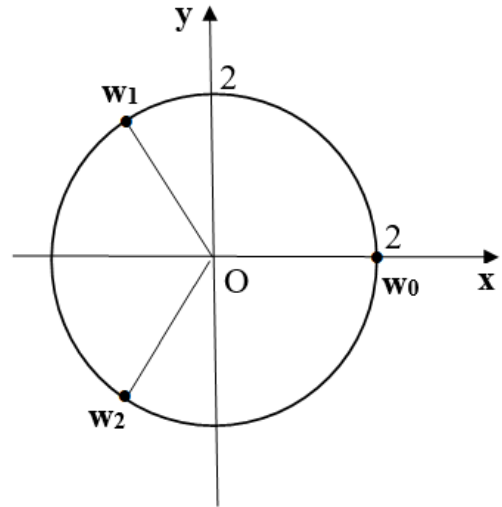


Рис.4

Розв'язання. Запишемо комплексні числа в показниковій формі. Знайдемо модуль і аргумент числа $1 - \sqrt{3}i$:

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}.$$

Враховуючи рис. 3, знайдемо: $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Тому $1 - \sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

З попереднього прикладу $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Тепер виконаємо дії

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^2} = \frac{\left(2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^3}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2} = \frac{8e^{-\pi i}}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} = 4e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 4e^{\frac{\pi}{2}i} = 4i.$$

$$3) \sqrt[3]{8}.$$

Розв'язання. Запишемо 8 в показниковій формі $8 = 8 \cdot e^{0i}$ і скористаємось формулою Муавра:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8 \cdot e^{0i}} = 2e^{\frac{2\pi k}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Отримаємо три значення кореня:

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2 \cdot e^{0i} = 2;$$

$$k=1 \Rightarrow w_1 = 2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -1 + \sqrt{3} i ;$$

$$k=2 \Rightarrow w_2 = 2 \cdot e^{\frac{4\pi i}{3}} = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -1 - \sqrt{3} i .$$

Всі одержані числа мають однаковий модуль, який дорівнює 2. Це означає, що відповідні точки комплексної площини розташовані на колі радіуса 2. При цьому числа мають такі аргументи, що точки ділять це коло на три рівні частини (рис. 4). Взагалі з формули (2.4) випливає, що коренями степеня n з комплексного числа є такі n комплексних чисел, що мають однаковий модуль $\sqrt[n]{r}$. Це означає, що відповідні точки розташовані на колі з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$. Аргументи у коренів такі, що вони ділять це коло на n рівних частин. Таким чином, точки комплексної площини, що відповідають кореням степеня n з комплексного числа, знаходяться в вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$.

Вправи для самостійного розв'язування

Виконати дії у показниковій формі:

1) $(-\sqrt{3} + i)^{11}$; 2) $\frac{i}{-1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{8i}$.

Відповіді: 1) $2^{11} e^{-\frac{5\pi i}{6}} = -1024\sqrt{3} - 1024i$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

3) $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$;

4) $w_0 = 2e^{\frac{\pi i}{6}} = \sqrt{3} + i$, $w_1 = 2e^{\frac{5\pi i}{6}} = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = 2e^{\frac{3\pi i}{2}} = -2i$.

Комплексний евклідовий простір

Лінійний простір над полем комплексних чисел називають **комплексним евклідовим (унітарним) простором**, якщо в ньому визначена операція скалярного добутку двох будь-яких векторів, тобто будь-якій парі векторів x і y простору ставиться у відповідність комплексне число (x, y) . При цьому для будь-яких векторів x, y та w простору і будь-якого комплексного числа λ повинні виконуватися умови (аксіоми).

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (перестановка множників перетворює скалярний добуток на комплексно спряжене число);

2. $(x + y, w) = (x, w) + (y, w)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) > 0$, якщо $x \neq \bar{0}$; $(x, x) = 0$ лише при $x = \bar{0}$.

Зауважимо, що скалярний квадрат вектора (x, x) завжди є дійсним числом, адже за умовою 1: $(x, x) = \overline{(x, x)}$ (комплексне число (x, x) дорівнює спряженому числу), а це можливо лише для дійсного числа.

З аксіом 1 та 3 випливає також правило винесення числового коефіцієнта з другого множника у скалярному добутку $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y)$. Отже, $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$.

Довжину (норму) вектора в унітарному просторі визначають так само, як в дійсному випадку. Довжина завжди дійсна та невід'ємна. Два вектори називають **ортogonalними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Можна довести, що у скінченновимірному унітарному просторі існує ортонормований базис. Він може бути отриманий з будь-якого базиса методом ортогоналізації, наведеним у доведенні теореми 2.8.

§4 Лінійні оператори: основні означення

Нехай V та W – лінійні простори (обидва дійсні або комплексні) вимірності n і m відповідно. Кажуть, що у просторі V задано **оператор (відображення) A** , якщо кожному вектору x , ($x \in V$) поставлено у відповідність тільки один вектор y простору W . Пишуть $A: V \rightarrow W$, $A(x) = y$. При цьому y називають образом вектора x , а x – прообразом вектора y . Оператор A називають лінійним, якщо для будь-яких векторів x_1 та x_2 ($x_1, x_2 \in V$) і будь-якого числа λ виконано

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), \quad A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

З цього випливає, що лінійна комбінація векторів простору V відображається у лінійну комбінацію векторів простору W , але лінійні комбінації в цих просторах можуть бути визначені по-різному.

Вправи для самостійного розв'язування

Доведіть, що є лінійними такі оператори:

1) Нехай α - деяке число, оператор A кожному вектору x лінійного простору V ставить у відповідність вектор αx . Легко перевірити лінійність такого оператора:

$A(x_1 + x_2) = \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 = A(x_1) + A(x_2)$, $A(\lambda x) = \alpha \lambda x = \lambda A(x)$. Його називають оператором подібності.

2) Нульовий оператор кожному вектору ставить у відповідність нульовий вектор $\mathbf{A}(x) = \bar{0}$.

3) У лінійному просторі $C_{[0;1]}$ функцій, неперервних на проміжку $[0;1]$ задано відображення, яке кожній функції $y = f(x)$ ставить у відповідність її первісну $y = F(x)$, що задовольняє умову $F(0) = 0$.

4) Диференціальний оператор $\frac{d}{dx}: f(x) \rightarrow f'(x)$ заданий на множині $C_{(a;b)}^1$ диференційованих на проміжку $(a;b)$ функцій.

Теорема 2.9. При лінійному відображенні $\mathbf{A}: V \rightarrow W$ підпростір V^* простору V відображається в підпростір $W^* = \mathbf{A}(V^*)$ простору W . При цьому вимірність образу $\mathbf{A}(V^*)$ не перевищує вимірності V^* .

Доведення. Нехай e_1, e_2, \dots, e_k - базис в V^* . Для будь-якого вектора x з V^* маємо: $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k$, $\mathbf{A}(x) = x_1 \mathbf{A}(e_1) + x_2 \mathbf{A}(e_2) + \dots + x_k \mathbf{A}(e_k)$. Отже, довільний елемент множини $\mathbf{A}(V^*)$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{A}(e_1), \mathbf{A}(e_2), \dots, \mathbf{A}(e_k)$ і навпаки, кожна така лінійна комбінація є образом деякого вектора з V^* . Таким чином, $\mathbf{A}(V^*)$ - лінійна оболонка, натягнута на вектори $\mathbf{A}(e_1), \mathbf{A}(e_2), \dots, \mathbf{A}(e_k)$, отже є підпростором простору W . При цьому $\dim \mathbf{A}(V^*) = k = \dim V^*$, якщо $\mathbf{A}(e_1), \mathbf{A}(e_2), \dots, \mathbf{A}(e_k)$ лінійно незалежні, і $\dim \mathbf{A}(V^*) < k$ у протилежному випадку.

Надалі розглядатимемо лише лінійні оператори, що відображають n -вимірний лінійний простір V у цей самий простір.

Матриця лінійного оператора

Нехай \mathbf{A} - лінійний оператор, що відображає базисні вектори e_1, e_2, \dots, e_n у вектори $\mathbf{A}(e_1), \mathbf{A}(e_2), \dots, \mathbf{A}(e_n)$, де

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n,$$

$$\mathbf{A}(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n,$$

...

$$\mathbf{A}(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n.$$

Матрицю, стовпцями якої є координати образів векторів базису, називають матрицею лінійного оператора

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що кожен лінійний оператор має лише одну матрицю і навпаки, кожній матриці розміру $n \times n$ відповідає тільки один лінійний оператор.

Зв'язок між координатами вектора та його образу

Розглянемо вектор $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ та його образ $y = \mathbf{A}(x)$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. За означенням лінійного оператора маємо:
 $\mathbf{A}(x) = x_1 \mathbf{A}(e_1) + x_2 \mathbf{A}(e_2) + \dots + x_n \mathbf{A}(e_n) = x_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) +$
 $+ x_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n) + \dots + x_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) =$
 $(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) e_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}) e_2 + \dots$
 $\dots + (x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{nn}) e_n = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Отже,

$$Y = AX, \tag{2.5}$$

де A -матриця лінійного оператора, X та Y - стовпці координат векторів x та y .

Приклад. В просторі R^3 лінійний оператор заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Знайдіть образ вектора } x = 2e_1 - 5e_2 + e_3.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}, y = 15e_2 - 12e_3.$$

Ранг та ядро лінійного оператора.

При відображенні $\mathbf{A}: V \rightarrow V$ вимірність образу $\mathbf{A}(V)$ називають **рангом** лінійного оператора \mathbf{A} .

Теорема 2.10. Ранг лінійного оператора дорівнює рангу його матриці.

Доведення. Нехай ранг матриці A оператора \mathbf{A} дорівнює r , а j_1, j_2, \dots, j_r - номери базисних стовпців. Це означає, що вектори $\mathbf{A}(e_{j_1}), \mathbf{A}(e_{j_2}), \dots, \mathbf{A}(e_{j_r})$ лінійно незалежні, а кожен з векторів $\mathbf{A}(e_i), i = \overline{1, n}$ є їх лінійною комбінацією. Тоді будь-який вектор $y = \mathbf{A}(x)$ можна виразити через вектори $\mathbf{A}(e_{j_1}), \mathbf{A}(e_{j_2}), \dots, \mathbf{A}(e_{j_r})$. Отже $\text{rang} \mathbf{A} = \text{rang} A = r$.

Ядром лінійного оператора ($\ker \mathbf{A}$) назвемо множину векторів простору V , які він відображає в нульовий вектор. Легко бачити, що ядро оператора є лінійним підпростором. Зрозуміло, що ядро не може бути порожньою множиною, тому що воно містить принаймні нульовий вектор (адже $A\bar{0} = \bar{0}$).

Теорема 2.11. Якщо при лінійному відображенні $\mathbf{A}: V \rightarrow V$, $\dim V = n$, ранг оператора дорівнює r , то $\dim(\ker \mathbf{A}) = n - r$.

Доведення. З рівності (2.5) випливає, що ядро лінійного оператора визначається однорідною системою n рівнянь з n невідомими $Ax = \bar{0}$, множина розв'язків якої має розмірність $n - r$.

Різницю $n - r$ називають **дефектом** оператора.

Приклад. Знайдіть вимірність та базис ядра лінійного оператора

$$\mathbf{A}: R^4 \rightarrow R^4, \text{ що заданий матрицею } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему рівнянь $AX = \bar{0}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$x_1 = -2x_3 - 2x_4$, $x_2 = -x_3$, x_3, x_4 - довільні числа. Надамо вільним змінним x_3, x_4 -

таких значень, щоб відповідні стовпці $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ утворювали стандартний базис $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ у R^2 . Знайдемо таким чином фундаментальну систему розв'язків:

1) $x_3 = 1, x_4 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1$, 2) $x_3 = 0, x_4 = 1, x_1 = -2, x_2 = 0$, тобто такі два розв'язки системи, що будь-який її розв'язок є їх лінійною комбінацією.

Отже базисом ядра оператора є вектори $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\ker \mathbf{A}) = 2$, а

ядро оператора – це лінійна оболонка $L\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, натягнута на ці вектори.

Зв'язок між матрицями лінійних операторів у різних базисах

Нехай у просторі V задано лінійний оператор з матрицею A в базисі e_1, e_2, \dots, e_n . Розглянемо інший базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n цього простору, такий, що

$$e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n,$$

$$e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n,$$

...

$$e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n.$$

Матрицю T , стовпцями якої є коефіцієнти розвинення векторів e'_1, e'_2, \dots, e'_n за векторами e_1, e_2, \dots, e_n , назвемо **матрицею переходу** від старого базису до нового

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Легко зрозуміти, що матриця переходу завжди невивроджена, адже її стовпцями є базисні вектори.

Теорема 2.12. Нехай e_1, e_2, \dots, e_n та e'_1, e'_2, \dots, e'_n – два базиси, відповідно старий та новий, T – матриця переходу від старого базису до нового. Якщо A – матриця лінійного оператора в базисі e_1, e_2, \dots, e_n , то його матрицю в новому базисі знаходять за формулою $A' = T^{-1}AT$.

Доведення. Розглянемо рядки $e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$, $e' = (e'_1 \ e'_2 \ \dots \ e'_n)$ а також X та X' - стовпці координат вектора x у старому і новому базисах відповідно. Маємо:

$x = eX$, $x = e'X'$, $e' = eT$. Тоді $x = eTX' = eX$, звідки $X = TX'$. Нехай тепер U та U' - стовпці координат вектора y ($y = A(x)$) у старому і новому базисах відповідно. Тоді $U = TU'$, а згідно з формулою (2.5), маємо: $TU' = ATX'$. Помножимо обидві частини цієї рівності на матрицю, обернену до T (вона обов'язково існує). Одержимо матрицю лінійного оператора в новому базисі

$$A' = T^{-1}AT \quad (2.6)$$

Приклад. Дано матрицю лінійного оператора $A: R^2 \rightarrow R^2$ у стандартному базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Знайдіть матрицю цього оператора в базисі $e'_1 = e_1 + 3e_2$, $e'_2 = -e_1 - 2e_2$.

Розв'язання. Запишемо матрицю переходу $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, знайдемо для неї обернену. $\det T = -2 + 3 = 1$, $T_{11} = -2$, $T_{12} = -3$, $T_{21} = 1$, $T_{22} = 1$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Згідно з формулою (2.6) маємо:

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -20 \\ 49 & -29 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Дано матрицю лінійного оператора $A: R^2 \rightarrow R^2$ у стандартному базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайдіть матрицю цього оператора в базисі $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 + 2e_2$.

2. Знайдіть матрицю лінійного оператора, що перетворює вектори $2e_1 - e_2$ та $e_1 + e_2$ у стандартному базисі $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ у вектори $3e_1 + 2e_2$ і $6e_1 - 5e_2$ відповідно.

Відповіді: 1. $A' = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (вказівка: скористайтесь

формулою (2.5)).

§5. Власні вектори та власні значення лінійного оператора

Нехай A - лінійний оператор, заданий в n -вимірному лінійному просторі ($A : V \rightarrow V$), A - його матриця розміру $n \times n$. Ненульовий вектор x ($x \in V$) називають **власним вектором** оператора A , якщо

$$A(x) = \lambda x, \quad (2.7)$$

де λ - деяке число, яке називають **власним значенням** оператора. Нехай X - стовпець координат вектора x у даному базисі, тоді рівність (2.7) набуває вигляду

$$AX = \lambda X \quad \text{або} \quad AX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Остаточно маємо: власні вектори}$$

оператора A є розв'язками системи рівнянь

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

де E - одинична матриця розміру $n \times n$.

Однорідна система (2.8) має ненульові розв'язки лише за умови рівності нулю її головного визначника

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (2.9)$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо власні значення оператора A . Рівняння (2.9) називають **характеристичним рівнянням** а сам визначник $\det(A - \lambda E)$ - **характеристичним поліномом** матриці A . Розгорнутий вигляд характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Розкладемо визначник у лівій частині рівняння (2.10) за елементами, наприклад, першого рядка. Далі так само можна розкласти їх алгебраїчні доповнення. В результаті отримаємо суму добутків, серед яких лише один містить λ у кожному множнику $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$, тобто є многочленом степеня n відносно λ . Решта доданків має нижчий степінь. Таким чином, характеристичне рівняння (2.10) є алгебраїчним рівнянням степеня n ,

яке має рівно n комплексних коренів (кожен з коренів враховано стільки разів, яка його кратність). Отже, доведено таке твердження.

Теорема 2.13. У комплексному просторі всі корені характеристичного рівняння і тільки вони є власними значеннями лінійного оператора. У дійсному просторі власними числами лінійного оператора є дійсні корені характеристичного рівняння і тільки вони.

Приклад. Знайдіть власні вектори і власні значення оператора, що заданий матрицею

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$

Власні числа – корені рівняння $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$. Для $\lambda_1 = -1$

одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 = 0, \end{cases}$ що має безліч розв'язків:

$x_2 = \frac{2}{3}x_1$, x_1 – довільне число. Найпростіший з них: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Отже, маємо

власний вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Аналогічно для $\lambda_2 = 7$: $\begin{cases} -6x_1 - 3x_2 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_2 = -2x_1.$

Другий власний вектор $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Підпростір власних векторів є двовимірним,

це лінійна оболонка $L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$ Маємо власне

значення $\lambda = 2$ – корінь характеристичного рівняння другої кратності. Власні вектори є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$ Нехай $x_1 = x_2 = 1$,

отже власний вектор $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Підпростір власних векторів

$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ одновимірний.

$$3) A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 1) = (5 - \lambda)^2(3 - \lambda).$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 3$ - простий корінь, $\lambda_2 = 5$ - корінь

другої кратності. Для $\lambda_1 = 3$ маємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ звідки

$x_1 = x_2 = x_3$. Маємо власний вектор $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, якщо обрати $x_3 = 1$. Для

$\lambda_2 = 5$ одержимо систему рівнянь $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ в якій x_1, x_2 - вільні змінні,

$x_3 = -x_2$. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків:

1) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$; 2) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$. Маємо два лінійно незалежні власні

вектори, що відповідають власному значенню 5: $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Властивості власних векторів і власних значень

1. Кожному власному вектору відповідає єдине власне значення.

Дійсно, від супротивного маємо: $A(x) = \lambda_1 x, A(x) = \lambda_2 x, \lambda_1 \neq \lambda_2, x \neq \bar{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 x - \lambda_2 x = \bar{0} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

2. Якщо x - власний вектор, що відповідає власному значенню λ , α - будь-яке відмінне від нуля число, то αx - також власний вектор, що відповідає тому ж самому значенню.

$$A(\alpha x) = \alpha A(x) = \alpha \lambda x = \lambda(\alpha x).$$

3. Якщо x_1 та x_2 - власні вектори, що відповідають одному й тому ж значенню, то їх сума $x_1 + x_2$ також є власним вектором, що відповідає цьому власному значенню.

$$\mathbf{A}(x_1) = \lambda x_1, \mathbf{A}(x_2) = \lambda x_2 \Rightarrow \mathbf{A}(x_1 + x_2) = \mathbf{A}(x_1) + \mathbf{A}(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2).$$

Зауваження: з властивостей 2 та 3 випливає, що всі власні вектори, які відповідають одному й тому ж власному значенню, разом з нульовим вектором утворюють лінійний підпростір.

4. Якщо x_1 та x_2 - власні вектори, що відповідають різним власним значенням, то вони лінійно незалежні.

Припустимо супротивне: x_1 та x_2 - лінійно залежні, тоді один з них, наприклад x_1 , може бути представлений у вигляді $x_1 = \alpha x_2$. Згідно з властивістю 2 ці власні вектори відповідають одному й тому ж власному значенню.

Зауваження: обернене твердження неправильне. Власні вектори, що відповідають одному й тому ж власному значенню, можуть бути лінійно незалежними.

5. Якщо A і A' - матриці лінійного оператора в різних базисах, то характеристичні рівняння цих матриць однакові.

Дійсно, якщо T - матриця переходу, то $\det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) = \det T^{-1}(A - \lambda E)T = \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = \det(A - \lambda E)$.

6. Нехай власне значення λ_0 оператора \mathbf{A} є коренем кратності k характеристичного рівняння. Тоді йому відповідають не більше ніж k лінійно незалежних власних векторів.

Дійсно, нехай оператор має m лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власному числу λ_0 . Позначимо їх e_1, e_2, \dots, e_m і доповнимо векторами $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n$ до базису n -вимірного простору. Оскільки $A(e_i) = \lambda_0 e_i, i = \overline{1, m}$, то матриця оператора в цьому базисі має вигляд

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_0 & 0 & \\ & \lambda_0 & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 0 & & \lambda_0 \\ \hline & & \\ 0 & & \end{array} \right) B, \quad B - \text{матриця розміру } n \times (n - m). \text{ Розкладаючи } \det(A - \lambda E)$$

послідовно по кожному з m перших стовпців, маємо: $\det(A - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^m P(\lambda)$, де $P(\lambda)$ - деякий многочлен. Тож λ_0 - корінь характеристичного рівняння кратності k , не меншої ніж m ($k \geq m$). Таким чином, кількість лінійно незалежних власних векторів, що відповідають

власному значенню кратності k , не перевищує k . Кількість лінійно незалежних власних векторів лінійного оператора може бути меншою ніж кратність відповідного власного значення. Саме таку ситуацію ми бачимо у прикладі 2).

Вправи для самостійного розв'язування

Знайти власні вектори і власні значення лінійних операторів, заданих

матрицями 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Відповіді: 1. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$; власні вектори $t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$; власні вектори $t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Вказівка: для розв'язування характеристичного рівняння скористайтесь методом групування).

§6. Квадратичні форми

Нехай e_1, e_2, \dots, e_n - ортонормований базис евклідового простору, і x_1, x_2, \dots, x_n - координати деякого вектора x в цьому базисі. Однорідний многочлен другого степеня

$$K(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots \\ \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + \\ + a_{nn}x_n^2$$

називають **квадратичною формою** цих координат.

Квадратичній формі співставимо симетричну матрицю її коефіцієнтів (її називають **матрицею квадратичної форми**)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ а також лінійний оператор з матрицею } A \left(A = A^T \right) \text{ в}$$

даному базисі. Зауважимо, що для складання матриці спочатку кожен з доданків $2a_{ij}x_i x_j, i < j,$ подаємо у вигляді

$2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ij}x_j x_i, i, j = \overline{1, n}, i \neq j.$ Тепер квадратична форма може бути записана у вигляді скалярного добутку образу Ax вектора x і самого цього

вектора: $K(x) = (Ax, x)$ або в матричному вигляді: $K(x) = X^T A X,$ де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ -

стовпець координат вектора $x.$

Зміна матриці квадратичної форми при заміні змінних

Розглянемо заміну змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \dots + s_{1n}y_n, \\ x_2 &= s_{21}y_1 + s_{22}y_2 + \dots + s_{2n}y_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= s_{n1}y_1 + s_{n2}y_2 + \dots + s_{nn}y_n, \end{aligned}$$

яка є рівносильною зміні базису простору з матрицею переходу $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n,$

а $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - стовпець координат вектора x в новому базисі. Отже $X = SY.$

Тоді в новому базисі квадратична форма набуває вигляду $X^T A X = (SY)^T A SY.$ Згідно з властивістю добутку матриць $(SY)^T = Y^T S^T$ маємо: $X^T A X = Y^T S^T A SY.$ Таким чином, в новому базисі матриця \bar{A} квадратичної форми $(\bar{A}y, y) = Y^T \bar{A} Y$ має вигляд $\bar{A} = S^T A S.$

Приведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Кажуть, що квадратична форма (Ax, x) записана в **канонічному вигляді**, якщо $(Ax, x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, де α_i - деякі числа (серед яких, можливо є нулі).

Теорема 2.14. Для кожної квадратичної форми існує базис, в якому вона має канонічний вигляд.

Доведення можна провести методом Лагранжа, який полягає у послідовному виділенні повного квадрату по кожній змінній. Продемонструємо його на прикладі.

Приклад. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$(Ax, x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = (x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2) - 9x_2^2 + 7x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = \\ &= (x_1 - 3x_2)^2 - 2\left(x_2^2 - x_2x_3 + \frac{x_3^2}{4} - \frac{x_3^2}{4}\right) - x_3^2 = (x_1 - 3x_2)^2 - 2\left(x_2 - \frac{x_3}{2}\right)^2 - \frac{x_3^2}{2}. \end{aligned}$$

Заміна змінних за формулами $y_1 = x_1 - 3x_2$, $y_2 = x_2 - \frac{x_3}{2}$, $y_3 = x_3$ надає квадратичній формі канонічного вигляду $(Ax, x) = (\bar{A}y, y) = y_1^2 - 2y_2^2 - 0,5y_3^2$.

Існують інші способи приведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Розглянемо спосіб, що потребує знаходження власних чисел і власних векторів лінійного оператора з матрицею A . Можна довести, що для будь-якої симетричної матриці A власні числа завжди дійсні, а власні вектори, що відповідають простим кореням характеристичного рівняння, попарно ортогональні. Якщо власні вектори, що відповідають кратним власним значенням, ортогоналізувати і всі власні вектори пронормувати (помножити на число, обернене до норми), то в отриманому ортонормованому базисі матриця оператора буде діагональною.

Слід сказати, що знайдені різними методами канонічні вигляди однієї й тієї ж квадратичної форми є різними. Проте справджується теорема, яку називають **законом інерції квадратичних форм**.

Теорема 2.15. У будь-яких двох різних канонічних виглядах однієї й тієї ж квадратичної форми

1) кількість відмінних від нуля коефіцієнтів однакова і дорівнює рангу матриці A ;

2) кількості додатних і від'ємних коефіцієнтів однакові.

Приклад. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$(Ax, x) = 3x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ і

розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 4^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 7) = 0.$$

Маємо: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$. Для $\lambda_1 = -1$ маємо: $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$ звідки

$x_2 = x_1$, x_1 – довільне число. Одержали власний вектор $t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогічно для

$\lambda_2 = 7$: $\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 = 0, \\ -4x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1$. Другий власний вектор $t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Знайдені

власні вектори ортогональні ($(t_1, t_2) = 0$) але не є одиничними ($\|t_1\| = \|t_2\| = \sqrt{2}$), тож пронормуємо їх, тобто замінимо на таку пару власних векторів:

$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Вектори u_1 та u_2 утворюють ортонормований базис,

матрицею переходу до якого є $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Здійснивши заміну змінних за

формулою $X = SY$ або $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, одержимо

квадратичну форму канонічного вигляду

$$(Ax, x) = (\bar{A}y, y) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 = -y_1^2 + 7y_2^2.$$

Зауважимо, що коефіцієнти квадратичної форми канонічного вигляду дорівнюють власним числам $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_2$.

Приклад. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$(Ax, x) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми

$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ і знайдемо характеристичний поліном

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3 - \lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98. \text{ Нескладно підібрати}$$

один цілий корінь характеристичного рівняння $\lambda = -2$. Розділивши характеристичний поліном на $(\lambda + 2)$, одержимо його розвинення на множники: $\det(A - \lambda E) = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 14\lambda - 49) = -(\lambda + 2)(\lambda - 7)^2$. Таким чином, $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$ - власні числа.

$$\text{Для } \lambda_1 = \lambda_2 = 7 \text{ маємо систему рівнянь: } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \text{ розв'язками}$$

якої є сімейство векторів $X = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, де x_2, x_3 - довільні числа. Один з

власних векторів отримаємо надавши вільним змінним таких значень:

$$x_2 = 1, x_3 = 0, \text{ отже } t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Другий власний вектор виберемо з цього сімейства}$$

так, щоб він був ортогональний першому, тобто щоб була правильною рівність $2 \cdot (2x_2 + 2x_3) + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$ або $5x_2 + 4x_3 = 0$. Візьмемо $x_2 = -4, x_3 = 5$,

$$\text{одержимо власний вектор } t_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Для } \lambda_3 = -2 \text{ одержимо систему рівнянь } \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases} \text{ яка має таке}$$

сімейство розв'язків: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$, де x_1 - довільне число. Зауважимо, що за

будь-якого значення x_1 третій власний вектор ортогональний першим двом, тож

візьмемо $x_1 = 1$, маємо $t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Пронормуємо власні вектори:

$$\|t_1\| = \sqrt{5}, \|t_2\| = 3\sqrt{5}, \|t_3\| = 3, u_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, за допомогою заміни змінних

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{3\sqrt{5}}y_2 + \frac{1}{3}y_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{4}{3\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{3}y_3,$$

$$x_3 = \frac{5}{3\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{3}y_3$$

квадратична форма приводиться до канонічного вигляду:

$$(\bar{A}y, y) = 7y_1^2 + 7y_2^2 - 2y_3^2.$$

Додатна та від'ємна визначеність квадратичних форм

Квадратичну форму (Ax, x) називають **додатно визначеною**, якщо для будь-якого ненульового вектора x є правильною нерівність $(Ax, x) > 0$ і **від'ємно визначеною**, якщо $(Ax, x) < 0$ для будь-якого вектора $x \neq \bar{0}$. З канонічного вигляду квадратичної форми $(Ax, x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ видно: для того, щоб вона була додатно визначеною, достатньо, щоб усі її власні значення були невід'ємні, а для від'ємної визначеності - навпаки недодатні. Але ж знаходження власних чисел, власних векторів і відповідної заміни змінних може виявитися, як показує останній приклад, непростою задачею. Тож наведемо простіший спосіб розв'язування питання про знаковизначеність квадратичної форми.

Головними кутовими мінорами квадратної матриці $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

називають числа: $\Delta_1 = b_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}$, ...

..., $\Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$.

Теорема 2.16 (критерій Сильвестра). Для того, щоб квадратична форма (Ax, x) була додатно визначена, необхідно і достатньо, щоб усі головні кутові мінори її матриці були додатні. Квадратична форма (Ax, x) від'ємно визначена тоді й тільки тоді, коли знаки головних кутових мінорів чергуються: головні кутові мінори з непарними номерами від'ємні, а з парними – додатні.

Приклад. Дослідити знаковизначеність квадратичної форми

1. $(Ax, x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

Розв'язання. Запишемо матрицю квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Головні кутові мінори: $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$. Квадратична форма додатно визначена.

2. $(Ax, x) = -6x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Розв'язання. Запишемо матрицю коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

та обчислимо головні кутові мінори

$\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Згідно з критерієм

Сильвестра квадратична форма від'ємно визначена.

2. $(Ax, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Розв'язання. Запишемо матрицю коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Оскільки

перший з кутових мінорів додатний $\Delta_1 = 1$, то квадратична форма точно не є від'ємно визначеною. Проте й додатно визначеною вона також не може бути, адже $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 < 0$. Таким чином, квадратична форма знакозмінна, тобто може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$(Ax, x) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

2. Дослідити знаковизначеність квадратичних форм:

а) $(Ax, x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$.

б) $(Ax, x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Відповіді: 1. $(\bar{A}y, y) = 2y_1^2 + 7y_2^2$; 2. а) квадратична форма додатно визначена; б) квадратична форма знакозмінна.

§7. Економічні застосування лінійної алгебри

Методи лінійної алгебри є потужними інструментами в економічних розрахунках. Для систематизації даних, аналізу, планування роботи підприємства і цілої галузі використовують таблиці – матриці, будують математичні моделі у вигляді системи лінійних рівнянь тощо.

Приклад 1. Підприємство випускає 3 види продукції P_1, P_2, P_3 , використовуючи 2 види ресурсів: R_1 – робоча сила, R_2 – матеріали та комплектуючі. Норми витрат ресурсів кожного виду для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано в таблиці (в умовних одиницях).

Вид продукції	Норми витрат на одиницю виробу		План випуску продукції
	R_1	R_2	
P_1	3	6	100
P_2	1	3	500
P_3	2	5	200
Вартість одиниці ресурсу	20	10	

Визначити загальну вартість ресурсів для виконання виробничого плану.

Розв'язання. Розглянемо матрицю прямих витрат ресурсів $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,
рядок вартості ресурсів $B = (20 \ 10)$ і стовпець плану випуску продукції
 $P = \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix}$. Знайдемо спочатку стовпець витрат ресурсів при заданому плані

виробництва: $AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 3100 \end{pmatrix}$, а тепер – загальну вартість

ресурсів: $APB = \begin{pmatrix} 1200 \\ 3100 \end{pmatrix} (20 \ 10) = 55000$.

Приклад 2. Підприємство випускає 3 види продукції P_1, P_2, P_3 , використовуючи 3 види сировини R_1, R_2, R_3 . Витрати сировини на одиницю виробу, наявний запас сировини на один день, а також прибуток, який підприємство отримує від реалізації одиниці виробу наведено в таблиці (в умовних одиницях). Знайти виробничий план роботи підприємства, а також визначити прибуток за один день за умови, що вся наявна сировина використовується повністю, вся вироблена продукція повністю продається.

Розв'язання.

Вид сировини	Норми витрат на одиницю виробу			Наявний запас сировини на один день
	P_1	P_2	P_3	
R_1	2	3	2	650
R_2	0	7	5	1100
R_3	1	3	2	550
Прибуток за одиницю виробу	50	100	30	

Нехай $x_i, i=1,2,3$, - кількість одиниць продукції кожного виду, що планується виготовити. Математичну модель задачі запишемо у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 650, \\ 7x_2 + 5x_3 = 1100, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 550. \end{cases} \quad \text{Розв'яжемо її методом Гаусса}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 650 \\ 0 & 7 & 5 & 1100 \\ 1 & 3 & 2 & 550 \end{array} \right) \xleftarrow{\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -2 & -450 \\ 0 & 7 & 5 & 1100 \\ 1 & 3 & 2 & 550 \end{array} \right) \xleftarrow{\frac{3}{7}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 7 & 5 & 1100 \\ 1 & 3 & 2 & 550 \end{array} \right),$$

звідки маємо: $x_3 = 150$, $x_2 = 50$, $x_1 = 100$. Отримано стовпець виробничого плану

$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix}$. Помноживши рядок прибутків по кожному виду продукції

$B = (50 \ 100 \ 30)$ на X знайдемо прибуток за один день роботи за цим планом

$$BX = (50 \ 100 \ 30) \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix} = 14500.$$

Приклад 3. На двох складах C_1 та C_2 зосереджено 300 та 200 одиниць продукції відповідно. Двоє замовників Z_1 та Z_2 потребують відповідно 210 та 290 одиниць цієї продукції. Витрати на перевезення одиниці продукції зі складів до замовників подані в таблиці.

Склад	Витрати на перевезення одиниці продукції до замовника	
	Z_1	Z_2
C_1	10	13
C_2	12	11

Скласти план доставки продукції замовникам, при якому вартість перевезень буде мінімальною.

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 - кількості одиниць продукції, які планується перевезти зі складу C_1 до замовників Z_1 та Z_2 відповідно, а y_1 та y_2 - ці ж кількості для складу C_2 . Звернімо увагу на те, що сумарна кількість одиниць продукції на складах збігається з обсягом замовлень, тож зі складів буде вивезена вся продукція $x_1 + x_2 = 300$, $y_1 + y_2 = 200$. Для виконання замовлення мають також виконуватися рівності $x_1 + y_1 = 210$, $x_2 + y_2 = 290$. Отримали систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300, \\ y_1 + y_2 = 200, \\ x_1 + y_1 = 210, \\ x_2 + y_2 = 290. \end{cases} \quad \text{Розв'яжемо її методом Гаусса. Перше рівняння віднімемо}$$

від третього, потім четверте рівняння переставимо на місце другого, друге та третє посунемо донизу. Маємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 210 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 290 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 290 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -90 \end{array} \right). \quad \text{Додавши тепер друге рівняння до}$$

четвертого, одержимо систему з двома однаковими рівняннями, тож маємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 300, \\ x_2 + y_2 = 290, \\ y_1 + y_2 = 200. \end{cases} \quad \text{Нехай } y_2 - \text{ довільне число } y_2 = c, \quad 0 \leq c \leq 200 \text{ (кількість}$$

одиниць продукції, перевезеної з другого складу до другого замовника є невід'ємною і обмежена зверху як обсягом наявної на складі продукції так і потребою замовника), тоді $x_1 = 10 + c$, $x_2 = 290 - c$, $y_1 = 200 - c$. Знайдемо тепер загальну вартість перевезень

$$S(c) = 10(10 + c) + 13(290 - c) + 12(200 - c) + 11c = 6270 - 4c.$$

Зрозуміло, що функція $S(c)$ набуває найменшого на проміжку $[0; 200]$ значення при $c = 0$, $S(0) = 6270$. Таким чином, зі складу C_1 потрібно відправити замовникам Z_1 та Z_2 10 та 290 одиниць продукції відповідно, а зі складу C_2 – всі 200 одиниць замовнику Z_1 .

Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Створена в 1936 році американським науковцем В. Леонтьєвим математична модель міжгалузевого балансу вивчає структуру суспільного виробництва, у якому кожна галузь є і виробником і споживачем своєї і виробленої іншими галузями продукції. Основне питання балансового аналізу: яким має бути обсяг виробництва кожної галузі, щоб задовольнити всі потреби. Структуру виробництва, зокрема міжгалузеві зв'язки, можна відобразити у спеціальних матрицях. Нехай $x_i, i = \overline{1, n}$, - обсяг **валового** продукту i -тої галузі (загальний обсяг), $y_i, i = \overline{1, n}$, - його частина, призначена для невикористаної

сфери (**кінцевий продукт**). $x_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, - обсяг продукції i -тої галузі, призначений для споживання j -тою галуззю. Отже

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

Обсяги продукції подані в їх вартісному вираженні, адже їх кількості можуть вимірюватися в різних одиницях.

Коефіцієнтом прямих витрат називають величину

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (2.12)$$

що визначає витрати продукції i -тої галузі на виробництво одиниці продукції j -тої галузі. В цих позначеннях формула (2.11) набуває вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.13)$$

Рівність (2.13) називають рівнянням міжгалузевого балансу. Запишемо його у матричному вигляді

$$X = AX + Y, \quad (2.14)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валового продукту, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор кінцевого продукту,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матриця прямих витрат.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектора валового випуску X , який забезпечує заданий кінцевий продукт при заданих коефіцієнтах прямих витрат. Розв'яжемо матричне рівняння (2.14).

$$X = AX + Y \Leftrightarrow (E - A)X = Y \Leftrightarrow X = (E - A)^{-1} Y.$$

Матрицю $S = (E - A)^{-1}$ назвемо **матрицею повних витрат**. Отже вектор валового продукту знаходять за формулою

$$X = (E - A)^{-1} Y = SY, \quad (2.15)$$

якщо матриця $E - A$ є невиродженою.

Виділимо клас матриць A , для яких відповідна матриця $E - A$ невироджена. Матрицю A з невід'ємними елементами ($A \geq 0$) називають **продуктивною**, якщо при $Y \geq 0$ матричне рівняння (2.14) має єдиний розв'язок $X \geq 0$. У цьому випадку економічну модель Леонт'єва також називають

продуктивною. Можна довести, що матриця A продуктивна, якщо сума елементів кожного її стовпця не перевищує одиницю, і сума елементів хоча б одного стовпця менша за 1.

Приклад 4. В таблиці наведено дані трьох галузей промисловості за певний період.

Галузь виробництва	Споживання			Кінцевий продукт	Валовий продукт
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>		
<i>I</i>	15	30	25	50	120
<i>II</i>	18	12	30	80	140
<i>III</i>	24	16	20	40	100

Знайдіть

- 1) матрицю прямих витрат;
- 2) необхідний обсяг валового продукту, якщо кінцевий продукт у галузі *I* заплановано збільшити до 70, у *II* - до 100, у *III* – до 50.

Розв'язання. 1) Коефіцієнти прямих витрат знайдемо за формулою (2.12). Одержимо матрицю прямих витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,25 & 0,208 \\ 0,129 & 0,086 & 0,214 \\ 0,24 & 0,16 & 0,2 \end{pmatrix}. \text{ Зауважимо, що вона є продуктивною, адже}$$

сума елементів кожного з її стовпців менша за одиницю.

- 2) Розв'яжемо рівняння міжгалузевого балансу, за умови, що вектор кінцевого продукту тепер має бути таким $Y = \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,875 & -0,25 & -0,208 \\ -0,129 & 0,914 & -0,214 \\ -0,24 & -0,16 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \text{матриця повних витрат}$$

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,45 & 0,47 \\ 0,3 & 1,25 & 0,41 \\ 0,46 & 0,38 & 1,47 \end{pmatrix}, \quad X = SY = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,45 & 0,47 \\ 0,3 & 1,25 & 0,41 \\ 0,46 & 0,38 & 1,47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162,3 \\ 166,5 \\ 143,7 \end{pmatrix}.$$

Отже валовий продукт галузі *I* потрібно збільшити до 162,3, галузі *II* – до 166,5, галузі *III* – до 143,7.

Вправи для самостійного розв'язування

1. З Одеси до Вінниці необхідно перевезти обладнання трьох видів: I-го виду - 95 од., II - 100 од., III - 185 од. Для цього замовляють три види транспорту x_i ($i=1,2,3$). Задана матриця вантажності транспорту

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \text{ де } a_{ik} \text{ (} i, k = 1, 2, 3 \text{)} - \text{кількість одиниць обладнання } i - \text{го}$$

виду, що підлягає перевезенню k - м видом транспорту. Скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно замовити, якщо планується його повне завантаження?

2. У кожному з трьох банків, між якими вибирає клієнт, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму у 6000 грошових одиниць (г. о.). Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{2}$ - у банку

2, а решту - у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 7250 г. о. Якщо $\frac{1}{6}$

вкладу покласти у банк 1, $\frac{2}{3}$ - у банк 2, та $\frac{1}{6}$ - у банк 3, то сума, яку може

отримати вкладник зросте до 7200 г. о. У випадку, коли схема розміщення

вкладів така: - $\frac{1}{2}$ - у перший банк, $\frac{1}{6}$ - у другий банк, $\frac{1}{3}$ - у третій банк, то сума,

отримана наприкінці року складала би 7250 г. о. Визначити ставку по депозитах кожного банку.

Відповіді: 1. $x_1 = 15$; $x_2 = 20$; $x_3 = 10$;

2. $x_1 = 1,25$ (25%); $x_2 = 1,2$ (20%); $x_3 = 1,15$ (15%).