МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
Частина 1

Навчальний посібник

Одеса — 2026

Навчальний посібник розроблено кандидатом фізико-математичних наук **Григор'євим Юрієм Олександровичем** – доцентом кафедри "Вища математика" Одеського національного морського університету.

Навчальний посібник схвалено Вченою радою Одеського національного морського університету 24 березня 2026 року (протокол № _11_).

Рецензенти – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій Національного університету «Одеська політехніка» **В.В. Вичужанін** (м. Одеса),

доктор технічних наук, професор **Л.І. Коростильов** (Національний університет кораблебудування, м. Миколаїв),

доктор педагогічних наук, кандидат технічних наук, професор **Л.Д. Герганов** (Дунайський інститут НУ «Одеська морська академія», м. Ізмаїл).

ЗМІСТ

ВСТУП ... 4
Набір вправ 0. ... 6
ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ... 7
1.1. Висловлення та логічні зв'язки між ними ... 7
1.2. Предикати та квантори ... 10
1.3. Методи доведень ... 11
Набір вправ 1. ... 13
ТЕМА 2. МНОЖИНИ ... 15
2.1. Множини та дії над ними ... 15
2.2. Закони алгебри множин ... 18
2.3. Формули включень та виключень ... 20
2.4. Прямий добуток множин ... 22
2.5. Характеристичні вектори множин ... 23
Набір вправ 2. ... 24
ТЕМА 3. ВІДНОШЕННЯ ... 26
3.1. Відношення та способи їх задання ... 26
3.2. Властивості відношень ... 28
3.3. Відношення еквівалентності ... 29
3.4. Відношення часткового порядку ... 31
Набір вправ 3. ... 33
ТЕМА 4. ФУНКЦІЇ. КОМБІНАТОРИКА. АЛГЕБРИ ... 35
4.1. Обернене відношення і композиція відношень ... 35
4.2. Функції ... 37
4.3. Обернені функції ... 38
4.4. Композиція функцій ... 40
4.5. Принцип Діріхле ... 41
4.6. Комбінаторика ... 42
4.7. Формула бінома Ньютона та її узагальнення ... 47
4.8. Алгебраїчні структури ... 48
Набір вправ 4. ... 54
ВІДПОВІДІ ... 58
ЛІТЕРАТУРА ... 62
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК ... 63

ВСТУП

Дискретна математика - це сукупність самостійних наук, які об'єднують такі риси:

1) дискретність означає – що складається з окремих частин. Сукупність цих частин (елементів) утворює множину. Множини в дискретної математики найчастіше скінченні. У вищій математиці вивчаються множини нескінченні і неперервні. Наприклад, множина дійсних чисел R. Неперервність множини означає, що для будь-якого скільки завгодно малого додатного числа ε можна знайти такі два елементи цієї множини, відстань між якими буде менше ε. Тому вищу математику іноді називають неперервною математикою. Дискретну математику називають скінченною математикою або конкретною математикою. Техніка буває аналогова і цифрова. Аналогова техніка частіше створюється вищою математикою, а цифрова – дискретною.

2) Вища математика має діло з числами. Дискретна математика частіше працює з не числовими об'єктами.

Дискретна математика – це сукупність наук. Ці науки молоді, виникли в 19 столітті, і справжній розвиток отримали в зв'язку з розвитком обчислювальної техніки. Основні розділи

Теорія множин (продовження – відношення, функції).

Математична логіка (продовження – булеві функції)

Алгебраїчні структури (застосовуються в кодуванні).

Комбінаторика (застосовується в нашому курсі, в теорії ймовірностей).

Графи.

Булеві функції (застосовуються у схемотехніці)

Теорія формальних граматик та теорія скінченних автоматів вивчаються в теорії алгоритмів.

Дискретна математика – основа інформатики, як техніки, заліза, так і програмування. Математику вивчають для того, щоб застосовувати її при розв'язанні конкретних практичних задач. Для того, щоб вирішувати конкретну фізичну задачу за допомогою математики цю фізичну задачу потрібно звести до математичної. Процес зведення практичної задачі до математичної називається ***математичним моделюванням***. Ми з вами і в курсі вищої математики і в курсі дискретної математики будемо іноді займатися математичним моделюванням, тобто будемо зводити конкретні фізичні задачі до математичних. Як приклад розглянемо наступну задачу.

Задача. Відстань (в км) між шістьма містами Одеської області: Одеса (О), Южне (Ю), Чорноморськ (Ч), Білгород-Дністровський (Б-Д), Теплодар (Т) та Біляївка (Б) наведені в таблиці 0.1. Потрібно знайти дорожню мережу мінімальної довжини, яка б зв'язала всі шість міст.

Для вирішення завдання позначимо міста точками, а зв'язуючі їх дороги - відрізками. Отримана фігура називається графом (рис. 0.1). Точки називаються вершинами графа, а зв'язуючі їх відрізки – ребрами. Позначивши відстань (в теорії графів вона називається вагою) кожного ребра, отримаємо так званий зважений граф. Цей зважений граф є математичною моделлю нашої задачі. Розв'язали задачу чеський математик Войтек Ярнік в 1930 р і Роберт Прим (американськії математик) в 1957 р.

Таблиця 0.1

	О	Ю	Ч	Б-Д	Т	Б
Одеса (О)		50	30	80	40	50
Южне (Ю)	50		85	130	90	100
Чорноморськ (Ч)	30	85		60	45	65
Білгород-Дністровський (Б-Д)	80	130	60		70	65
Теплодар (Т)	40	90	45	70		15
Біляївка (Б)	50	100	65	65	15	

Алгоритм Прима.

1. Вибираємо довільну вершину графа і ребро, що з'єднує її з найближчою вершиною. Ці дві вершини назвемо приєднаними.
2. Знайдемо ще не приєднану вершину, найближчу до однієї з приєднаних, і з'єднаємо з нею. Отримаємо ще одну приєднану вершину.
3. Повторимо крок 2 до тих пір поки всі вершини не будуть приєднані.

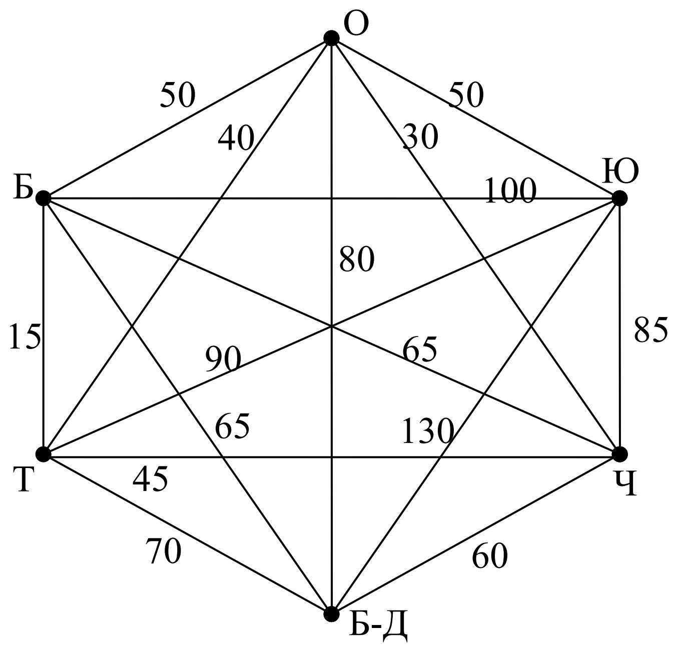


Рис. 0.1

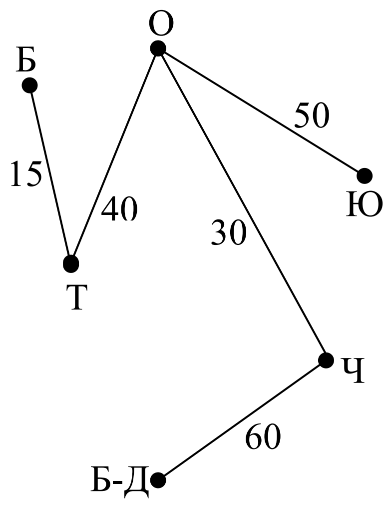


Рис. 0.2

Застосовуючи алгоритм Прима прийдемо до графа, що зображений на рис. 0.2. Цей граф являє собою мінімальну мережу доріг, що охоплює всі шість міст. Загальна вага мережі дорівнює

$$15+40+50+30+60=195 \text{ км.}$$

Набір вправ 0.

0.1 Відстань (в км) між шістьма містами Одеської області: Одеса, Балта, Южне, Кілія, Подільськ та Ізмаїл наведені в таблиці 0.2. Потрібно знайти дорожню мережу мінімальної довжини, яка б зв'язала всі шість міст.

Таблиця 0.2

	Одеса	Балта	Южне	Кілія	Подільськ	Ізмаїл
Одеса		185	35	160	170	190
Балта	185		185	275	20	295
Южне	35	185		190	175	225
Кілія	160	275	190		255	35
Подільськ	170	20	175	255		270
Ізмаїл	190	295	225	35	270	

0.2. Граф на рис. 0.3 зображує мережу доріг, які зв’язують сім сіл. Відстані між селами задано у милях. Знайдіть мережу доріг мінімальної загальної довжини, що охоплює всі села.

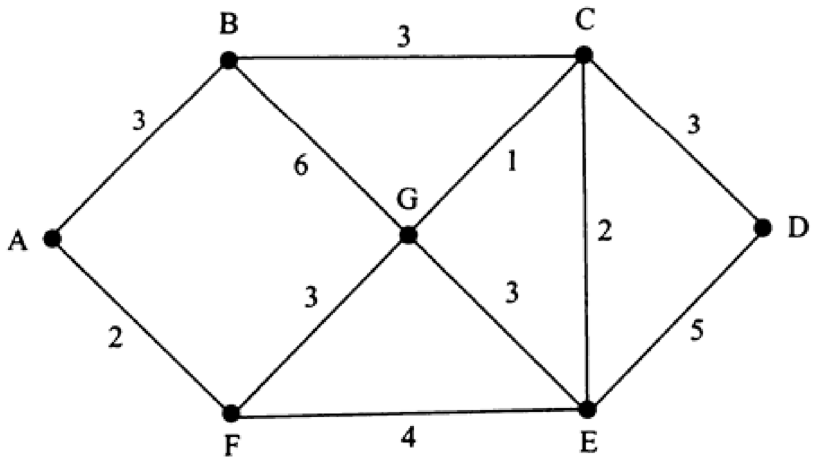


Рис. 0.3

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

1.1. Висловлення та логічні зв'язки між ними

Логіка − одна з найстаріших філософських дисциплін. Творець логіки - Аристотель (старогрецький філософ, учень Платона, вихователь Олександра Македонського). Аристотель створив свою логіку в 350 р. до н.е. Це була гуманітарна наука. В такому вигляді логіка Аристотеля проіснувала до 19 століття. В 1847 р. англійський математик Джордж Буль і шотландський математик Де Морган незалежно один від одного ввели математику в логіку. З'явилася математична логіка. Але й до цієї дисципліни інтерес став згасати. На початку 20 століття несподівано відбулося нове відкриття: математична логіка стала використовуватися в електронних пристроях: комп'ютерах, калькуляторах, телефонах і так далі. Створили таке відкриття американець, японець і росіянин. Американець Шеннон, японець Накосіма та радянський фізик Шестаков. Шестаков пізно опублікував своє відкриття. Раніше від нього це зробив Шеннон. Тому його ім'я добре відоме в світі як засновника теорії інформації, а прізвище Шестакова в цій області відоме тільки росіянам. Через декілька років після цього відкриття з'явились перші комп'ютери (приблизно, в 1942 р.).

Предметом вивчення математичної логіки є висловлення.

Визначення. Висловленням називається оповідальне речення, про яке можна сказати істинне воно або хибне.

Істину ми будемо позначати 1, а хибність − 0.

Значення 1 і 0 називаються істинnісними значеннями.

Приклади. "Дністер впадає в Чорне море" - висловлення, його істинnісне значення дорівнює 1.

"Луну зробили з чавуну" − висловлення, його істинnісне значення дорівнює 0.

"Прийдіть на консультацію" − не є висловленням, бо це не оповідальне речення, а наказове.

"Котра година?", − не є висловленням, бо це не оповідальне речення, а питальне.

Ще є окличні речення. Це коли зовуть когось, або просто так кричать, від дурі. Такі речення також знаходяться поза сферою нашого розгляду.

Висловлення позначаються великими буквами латинського алфавіту. Наприклад, через P можна позначити висловлення "10 − просте число", а через Q − висловлення "6 ділиться на 3". Істинносне значення першого висловлення дорівнює 0, а другого − 1.

За допомогою простих висловлювань можна скласти складові висловлювання за допомогою логічних зв'язок *ні, і, або* та інших. Розглянемо ці логічні зв'язки докладніше.

Означення. Запереченням висловлення P називається висловлення (не P) і позначається $\overline{P}$. Істиннісне значення $\overline{P}$ протилежно значенню P. Таблиця істинності заперечення має вигляд:

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

Приклад. Через P ми позначили висловлення "10 − просте число", його істиннісне значення дорівнює 0. Висловлення $\overline{P}$ читається "невірно, що 10 − просте число", та його істиннісне значення дорівнює 1.

Означення. Кон'юнкцією двох висловлень P та Q називається висловлення вигляду P та Q і позначається $P \wedge Q$. Воно приймає істинне значення тільки в тому разі, коли істинні обидві її складові частини P та Q. Таке визначення добре узгоджується із звичайним розумінням союзу і в розмовній мові. Таблиця істинності кон'юнкції має вигляд:

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \wedge Q$	0	0	0	1

Приклад. Через P ми позначили висловлення "10 − просте число", а через Q − висловлення "6 ділиться на 3". Істинносне значення першого висловлення дорівнює 0, а другого − 1. Кон'юнкцією $P \wedge Q$ буде висловлення "10 − просте число і 6 ділиться на 3". Воно хибне.

Означення. Диз'юнкцією двох висловлень P та Q називається висловлення вигляду P або Q і позначається $P \vee Q$. Воно приймає істинне значення тільки в тому разі, коли хоча б одна із складових частини P або Q істина, що також узгоджується з повсякденним розумінням союзу або. Таблиця істинності диз'юнкції має вигляд:

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \vee Q$	0	1	1	1

Приклад. Через P ми позначили висловлення "10 − просте число", а через Q − висловлення "6 ділиться на 3". Істинносне значення першого висловлення дорівнює 0, а другого − 1. Диз'юнкцією $P \vee Q$ буде висловлення "10 − просте число або 6 ділиться на 3". Це істина.

Означення. Імплікацією двох висловлень P та Q називається висловлення вигляду якщо P, то Q і позначається $P \Rightarrow Q$. Воно приймає хибне значення тільки в тому разі, коли передумова P істина, а висновок Q хибний, тобто

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \Rightarrow Q$	1	1	0	1

Таблицю можна запам'ятати так: з істини випливає тільки істина, а з брехні − все що завгодно.

Приклад. Розглянемо хибне висловлення P: 1=3. Віднявши від обох частин 2, отримаємо хибне висловлення Q: -1=1. Піднісши обидві частини до квадрату, одержимо істинне висловлювання R: 1=1. Отже, з хибного висловлення P ми отримали хибне висловлення Q та істинне висловлення R.

Іноді на уроках математики можна почути такий діалог між вчителем та учнем. Учитель вказує учню на помилку в розв'язанні задачі, але учень заперечує, мотивуючи тим, що у нього зійшлася відповідь. Тут справа в тому, що учень не розуміє: якщо він припустив помилку, то, з точки зору логіки, відповідь може отримати будь-яку, правильну чи неправильну.

Означення. Еквіваленцією двох висловлень P та Q називається висловлення вигляду P тоді і тільки тоді, коли Q і позначається P ⇔ Q. Воно приймає істинне значення тільки в тому разі, коли P та Q мають однакові значення істинності, тобто

P	0	0	1	1
Q	0	1	0	1
$P \Leftrightarrow Q$	1	0	0	1

Означення. Два складових висловлення називаються логічно еквівалентними, якщо вони побудовані з одних і тих же простих тверджень, але різними шляхами і приймають однакові значення істинності на будь-якому наборі істинносних значень своїх частин. Логічно еквівалентні висловлення можна позначати знаком ⇔.

Приклади логічно еквівалентних висловлень:

$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$, $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$, – закони де Моргана.

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$,

$P \Leftrightarrow Q$ логічно еквівалентно $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Доведемо справедливість однієї з цих логічних еквівалентностей. Інші доведіть самостійно. Побудуємо таблицю істинності

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Останні два стовпці мають однакові значення істинності. Це означає, що висловлення $P \Rightarrow Q$ та $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ логічно еквівалентні.

1.2. Предикати та квантори

Означення. Предикатом називається твердження (функція), що містить одну або декілька змінних. Залежно від значення змінних предикат може прийняти істинне значення чи хибне.

Якщо предикат містить одну змінну x, то його можна записати так: $P(x)$, якщо дві змінні, то $P(x,y)$. Ці функції приймають лише 2 значення: 0 і 1.

Приклади. Твердження

"x – ціле число, що задовольняє рівняння $x^2+5x=0$"

є предикатом. При $x=0$ і при $x=-5$ предикат приймає істинне значення, а при інших значеннях x – хибне.

"x та y – дійсні числа такі, що задовольняють рівняння $x^2+y^2=1$" – предикат. При значеннях x та y таких, що точка (x,y) лежить на колі одиничного радіуса з центром в початку координат, предикат приймає істинне значення. При інших значеннях x, y предикат є хибним.

В предикатах часто застосовують *квантори загальності* та *існування*.

Вираз "для всіх" називається ***квантором загальності*** і позначається символом $\forall$**.**

Вираз "існує" називається ***квантором існування*** і позначається $\exists$**.**

Включаючи квантори у предикати, ми отримаємо нові предикати.

Приклади. Позначимо через $P(x)$ предикат

"Студент x сьогодні був присутнім на лекції з дискретної математики".

Предикат $\forall x P(x)$ читається так: для кожного x справедливо $P(x)$. В нашому прикладі це означає, що всі студенти сьогодні були присутніми на лекції з дискретної математики. Часто цей предикат приймає хибне значення.

Предикат $\exists x{:}\, P(x)$ читається так: існує x такий, що справедливо $P(x)$. В нашому прикладі це означає, що є такий студент, що відвідав лекцію. В нашому прикладі такий предикат майже завжди приймає істинне значення.

Для будь-якого предиката $P(x)$ справедливі наступні логічні еквівалентності.

$$\overline{\exists} x{:}\, P(x) \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}, \qquad \overline{\forall} x P(x) \Leftrightarrow \exists x{:}\, \overline{P(x)}.$$

Приклад. Позначимо через $P(x,y)$ предикат

" x та y – дійсні числа такі, що задовольняють рівняння $y=x^2$".

Виразіть кожне з висловлювань словами і визначте їх істинність.

$$\forall x \exists y{:}\, P(x,y), \qquad \exists y{:}\, \forall x P(x,y).$$

Розв'язання. Перший предикат висловлює, що для будь-якого дійсного числа x існує дійсне число y таке, що $y=x^2$. Це істина.

Друге висловлення читається так: існує дійсне число y таке, що для будь-якого дійсного числа x справджується рівність $y=x^2$. Це висловлення хибне.

1.3. Методи доведень

При доведенні теорем в математиці чи в інформатиці нам треба встановити істинність імплікації $P \Rightarrow Q$. Існує декілька стандартних типів доведень. Розглянемо їх.

1**. *Пряме міркування.*** В цьому способі ми припускаємо, що P істина і доводимо істинність Q. Цей спосіб виключає ситуацію, коли P істина, а Q хибне, бо в цьому разі імплікація хибна.

2. ***Обернене міркування.*** В цьому способі імплікацію $P \Rightarrow Q$ ми замінюємо логічно еквівалентним висловленням $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$ і доводимо останнє.

3. ***Метод "від супротивного".*** В цьому методі припускають, що P істина і доводять, що імплікація $P \Rightarrow \bar{Q}$ хибна. звідси випливає істинність імплікації $P \Rightarrow Q$.

4. ***Метод математичної індукції.*** Нехай $n -$ натуральне число і $P(n)-$ предикат. Якщо висловлення $P(1)$ істинне і якщо припустивши істинність висловлення $P(k)$ ми доведемо істинність $P(k+1)$, то предикат $P(n)$ буде істинним при всіх натуральних значеннях n.

Приклад 1. Прямим міркуванням доведіть, що добуток двох непарних чисел x та y є непарне число.

Доведення. Непарні числа можна записати у вигляді

$$x = 2m + 1, \quad y = 2n + 1,$$

де m і $n -$ деякі цілі числа. Тоді

$$xy = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$$

теж непарне число.

Приклад 2. Нехай $n -$ натуральне число. Доведіть, що якщо n^2 непарне, то і n непарне.

Доведення. Скористуємось методом оберненого міркування. Нехай n парне число, тобто $n = 2m$ для деякого цілого m. Тоді

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$$

теж парне число. Твердження доведено.

Приклад 3. Довести, що $\sqrt{2} -$ ірраціональна число.

Доведення проведемо способом від супротивного. Нехай $\sqrt{2}$ є раціональне. Тоді його можна зобразити у вигляді нескоротного дробу

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

де m і $n -$ цілі числа, $n \neq 0$. Піднісши до квадрату обидві частини попередньої рівності, дістанемо

$$2 = \frac{m^2}{n^2}, \qquad m^2 = 2n^2.$$

Звідси випливає, що число m^2 є парне. Отже, й число m є парне (квадрат непарного числа є число непарне). Тому m можна записати у вигляді

$$m = 2k,$$

де k - ціле число. Тоді

$$4k^2 = 2n^2, \quad n^2 = 2k^2.$$

Таким чином n^2 є парним. Тому й n є парне. Виходить, що числа m і n парні. Зайшли в суперечність з тим, що дріб $\frac{m}{n}$ є нескоротним. Отже, $\sqrt{2}$ не є раціональним числом. Твердження доведено.

Приклад 4. Методом математичної індукції довести рівність

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

при всіх натуральних n.

Доведення. Позначимо через $P(n)$ − предикат (1.1). Очевидно, що $P(1)=1$, оскільки при $n=1$ рівність (1.1) справжнюється. Припустимо тепер, що рівність (1.1) справедлива при деякому натуральному числі k:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Доведемо її справедливість при $k+1$:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{1.3}$$

Перепишемо ліву частину формули (1.3) і до суми перших k членів застосуємо формулу (1.2). Будемо мати

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Отримали праву частину формули (1.3). За принципом математичної індукції предикат $P(n)$ є справедливим при всіх натуральних значеннях n. Формула (1.1) доведена при всіх натуральних n.

Набір вправ 1.

1.1. Нехай P, Q і R − висловлення, що визначаються наступним чином:

P: Я співаю.

Q: Я танцюю.

R: Я кучерявий.

Запишіть кожне з наступних висловлювань як логічний вираз, що включає P, Q і R.

a) Я співаю і танцюю.
b) Я співаю або танцюю.
c) Я не кучерявий, а співаю.
d) Якщо я співаю і танцюю, то я кучерявий.

1.2. Нехай P і Q − висловлення, що визначаються наступним чином:

P: Троянди червоні.

Q: Фіалки сині.

Запишіть кожне з наступних висловлювань як логічний вираз, що включає P і Q.

a) Якщо троянди не червоні, то фіалки не сині.
b) Троянди червоні або фіалки не сині.
c) Або троянди червоні, або фіалки сині, але не одночасно.

Доведіть, що висловлення a) і b) логічно еквівалентні.

1.3. Складені висловлення, що приймають істинні значення при довільних істинносних значеннях своїх компонент, називаються *тавтологіями*. Серед наступних висловлювань знайдіть тавтології.

a) $\overline{P \wedge \overline{P}}$.
b) $P \Rightarrow \overline{P}$.
c) $\left(P \wedge \left(P \Rightarrow Q\right)\right) \Rightarrow Q$.

1.4. Позначимо через x слово «кішка», через $P(x)$ предикат «у x є вуса». Запишіть кожне з наступних висловлювань в символічній формі:

a) вуса є у всіх кішок;
b) знайдеться кішка без вусів;
c) не буває кішок з вусами.

Запишіть заперечення цих висловлень символами та словами.

1.5. Позначимо через x слово «людина», через $P(x)$ предикат «x високий», а через $Q(x)$ − предикат «x товстий». Прочитайте наступне висловлення:

$$\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right).$$

Знайдіть його заперечення серед наступних тверджень:

a) знайдеться дехто короткий і товстий;
b) немає ніякого високого і худого;
c) знайдеться дехто короткий або худий.

1.6 За методом математичної індукції доведіть справедливість наступних формул або тверджень для всіх натуральних чисел n:

a) $1+3+9+...+(4n-3)=n(2n-1)$;

b) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

d) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

e) n^3-n ділиться на 3.

1.7. Послідовність натуральних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ визначається рекурентною формулою

$$x_1=1 \text{ і } x_{k+1}=\frac{x_k}{x_k+2} \text{ при } k\geq 1.$$

Обчисліть x_2, x_3, x_4 і доведіть за індукцією, що

$$x_n=\frac{1}{2^n-1}$$

Для всіх $n\geq 1$.

1.8. Послідовність натуральних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ визначається рекурентною формулою

$$x_1=1, x_2=2 \text{ і } x_{k+1}=2x_k-x_{k-1} \text{ при } k>1.$$

Обчисліть x_3, x_4, x_5. Знайдіть загальну формулу для x_n та доведіть її істинність за методом математичної індукції.

ТЕМА 2. МНОЖИНИ

2.1. Множини та дії над ними

Поняття множини є первісним в математиці, тобто воно не має визначення. В математиці бувають такі поняття. Наприклад, в геометрії первісними є поняття точки, прямої, площини. Ці поняття також не мають означень.

Множина − це сукупність об'єктів, які називаються елементами множини. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи − малими.

Той факт, що елемент a належить множині A записують так: $a \in A$, якщо ж a не належить множині A, то пишуть $a \notin A$, або $a \,\overline{\in}\, A$.

Множину можна задати, перелічивши в фігурних дужках її елементи. Наприклад, множину всіх цифр, можна записати так:

$$M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Якщо такий спосіб не є зручним, то множину можна задати за допомогою предикатів:

$$A = \{x : P(x)\}.$$

Попередній запис означає, що множина A складається з таких елементів x, для яких предикат $P(x)$ істинний.

Наприклад, множину S всіх студентів нашого університету (ОНМУ), можна записати так:

$$S = \{x\text{: } x \text{ є студентом ОНМУ}\}.$$

Згадаємо множини, які нам відомі із школи.

$\varnothing$ - порожня множина, вона не містить елементів.

$N = \{1,2,3,...\}$ - множина натуральних чисел.

$Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$ - множина цілих чисел.

$Q = \left\{\dfrac{m}{n} : m,n \in Z,\, n \neq 0\right\}$ - множина раціональних чисел.

$J = \{x : x - \textit{нескінченний неперіодичний десятковий дріб}\}$ − множина ірраціональних чисел.

$R = \{x : x \in Q \vee x \in J\}$ - множина дійсних чисел.

U - універсальна множина. Вона містить всі множини (в контексті даної задачі).

Означення. Множина A називається ***підмножиною множини*** B***,*** якщо кожний елемент множини A є елементом множини B.

Те, що множина A є підмножиною множини B позначають так: $A \subseteq B$. На рис. 2.1 дана ілюстрація цього визначення. Картинки такого виду називаються діаграмами Венна.

Якщо множина A є підмножиною B та існує елемент a, який належить B і не належить A, то пишуть так: $A \subset B$.

Означення. Дві множини A і B називаються рівними $A = B$, якщо складаються з одних й тих самих елементів. Можна записати

$$A = B \iff (A \subseteq B) \land (B \subseteq A).$$

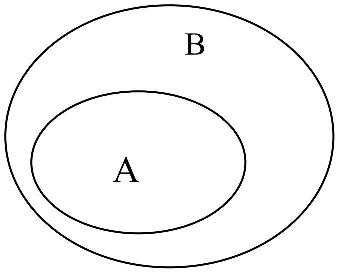


Рис. 2.1

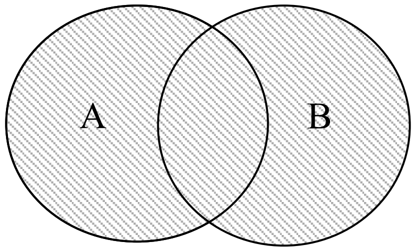


Рис. 2.2

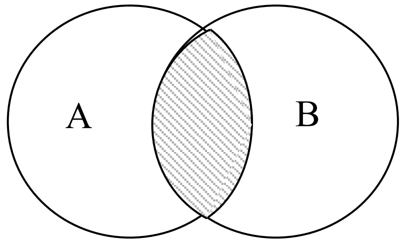


Рис. 2.3

Означення. Об'єднанням двох множин A і B називається множина $A \cup B$, елементами якої є всі елементи множини A та всі елементи множини B, тобто

$$A \cup B = \left\{ x : \left(x \in A \right) \lor \left(x \in B \right) \right\}.$$

На рис. 2.2 заштриховано результат об'єднання множин A і B.

Приклад. Об'єднанням множин $A = \{1,2,3,4,5\}$ і $B = \{4,5,6,7,8\}$ буде множина $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Означення. Перетином двох множин A і B називається множина $A \cap B$, елементи якої належать множині A і множині B, тобто

$$A \cap B = \left\{ x : \left(x \in A \right) \land \left(x \in B \right) \right\}.$$

На рис. 2.3 заштриховано результат перетину множин A і B.

Приклад. Для множин $A = \{1,2,3,4,5\}$ і $B = \{4,5,6,7,8\}$ перетином буде множина $A \cap B = \{4,5\}$.

Означення. Різницею двох множин A і B називається множина $A \setminus B$, елементи якої належать множині A і не належать множині B, тобто

$$A \setminus B = \left\{ x : \left(x \in A \right) \land \left(x \notin B \right) \right\}.$$

Різницю множин A і B називають також ***доповненням множини*** B ***до множини*** A. На рис. 2.4 заштриховано результат такого доповнення.

Приклад. Для множин $A = \{1,2,3,4,5\}$ і $B = \{4,5,6,7,8\}$ різницею буде множина $A \setminus B = \{1,2,3\}$.

Означення. Доповненням (або запереченням) множини A називається множина $\overline{A}$, елементи якої не належать множині A, тобто

$$\overline{A} = \left\{ x : x \overline{\in} A \right\}.$$

Доповнення множини A можна розуміти і так (рис. 2.5):

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Приклад. Нехай $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$. Тоді $\bar{A} = \{6,7,8\}$.

Означення. Симетричною різницею двох множин A і B називається множина $A\Delta B$, елементи якої належать множині A і не належать множині B, або навпаки, належать множині B і не належать множині A, тобто

$$A\Delta B = \left\{ x : \left(x \in A \right) \wedge \left(x \overline{\in} B \right) \vee \left(x \in B \right) \wedge \left(x \overline{\in} A \right) \right\}.$$

Ця дія називається симетричною різницею бо складається з об'єднання двох різниць $A \setminus B$ та $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$:

$$A\Delta B = \left(A \setminus B \right) \cup \left(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \right).$$

Інакше кажучи, симетрична різниця складається з елементів, які належать або A або B, але не одночасно A і B (рис. 2.6). Справедливі формули:

$$A \bigtriangleup B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \quad \text{і} \quad A \bigtriangleup B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}.$$

Приклад. Симетричною різницею множин $A = \{1,2,3,4,5\}$ і $B = \{4,5,6,7,8\}$ буде $A \bigtriangleup B = \{1,2,3,6,7,8\}$.

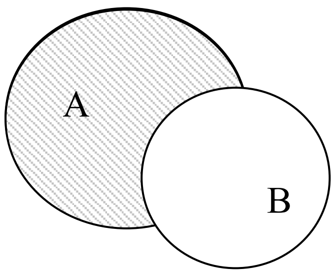


Рис. 2.4

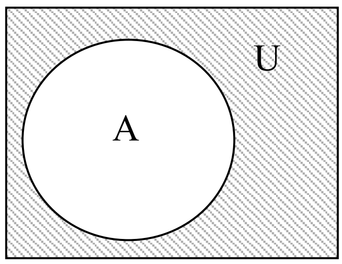


Рис. 2.5

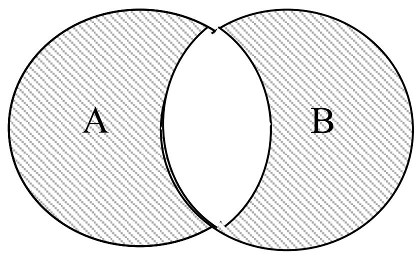


Рис. 2.6

2.2. Закони алгебри множин

1. Комутативні закони

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. Асоціативні закони

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Закони порожньої та універсальної множин

$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

4. Закони ідемпотентності

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

5. Дистрибутивні закони

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Закони доповнення

$$A \cup \bar{A} = U \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\bar{U} = \emptyset \qquad \bar{\emptyset} = U$$

$$\bar{\bar{A}} = A \qquad \bar{\bar{A}} = A$$

7. Закони де Моргана

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Доведемо, наприклад, один із законів де Моргана $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$:

$$\overline{(A \cup B)} = \{x: x \,\overline{\in}\, A \cup B\} = \{x: (x \,\overline{\in}\, A) \wedge (x \,\overline{\in}\, B\} = \qquad (2.1)$$

$$= \{x: (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Формулу доведено в класичному вигляді. Формулу можна проілюструвати користуючись діаграмами Венна.

Позначимо через P висловлення $x \in A$, а через $Q -$ висловлення $x \in B$. З математичної логіки ми знаємо формулу

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}, \qquad (2.2)$$

яку можна довести, наприклад, користуючись таблицями істинності. Ліва частина формули читається так: "Неправда, що існує x, який належить множині A чи множині B", тобто $x \,\overline{\in}\, A \cup B$. Це висловлення міститься на початку доведення (2.1). Права частина формули (2.2) читається так: "x не належить множині A та x не належить множині B", тобто $(x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B})$. Це висловлення міститься в кінці доведення (2.1).

Отже, якщо в розглянутому законі де Моргана з теорії множин замінити множини на висловлення, об'єднання $\cup$ на диз'юнкцію $\vee$, а перетин $\cap -$ на кон'юнкцію $\wedge$, то отримаємо закон де Моргана з математичної логіки (2.2). Ця властивість справедлива і в загальному вигляді. Будь-якому закону з теорії множин відповідає закон з математичної логіки. Щоб отримати цей закон треба замінити

множини	на	висловлення,	перетин $\cap$	на	кон'юнкцію $\wedge$,
доповнення $-$	на	заперечення $-$,	включення $\subseteq$	на	імплікацію $\Rightarrow$,
об'єднання $\cup$	на	диз'юнкцію $\vee$,	рівність $=$	на	еквіваленцію $\Leftrightarrow$.

Отриманий закон математичної логіки можна довести користуючись, наприклад, таблицею істинності. Описана відповідність законів в математиці називається ***ізоморфізмом***. Математики кажуть, що алгебри теорії множин і математичної логіки ізоморфні. Це означає, що якщо вивчити одну з алгебр, то будемо знати й другу.

Уважне вивчення законів теорії множин дозволяє зробити ще один висновок. Кожну рівність з правого стовпця таблиці можна отримати з лівого стовпця заміною $\cup$ на $\cap$, $\varnothing$ на U і навпаки. Така властивість називається ***законом двоїстості.*** Отже, знаючи який-небудь закон з теорії множин можна записати двоїстий закон і він буде правильним. Це твердження ми приймемо без доведення.

Приклад. Для симетричної різниці двох множин ми записували формули

$$A \triangle B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \quad \text{і} \quad A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

Доведемо, що праві частини цих формул однакові, тобто

$$(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}). \qquad (2.3)$$

Доведення. 1 спосіб. Замінивши множини A і B на висловлення P і Q , об'єднання $\cup$ на диз'юнкцію $\vee$, перетин $\cap$ - на кон'юнкцію $\wedge$, рівність = на еквіваленцію $\Leftrightarrow$, отримаємо закон математичної логіки

$$(P \vee Q) \wedge \overline{(P \wedge Q)} \;\Leftrightarrow\; (P \wedge \bar{Q}) \vee (Q \wedge \bar{P}). \qquad (2.4)$$

Логічну еквівалентність висловлень (2.4) доведемо користуючись таблицею істинності. В цій таблиці позначимо через ЛЧ - ліву частину еквіваленції (2.4), а через ПЧ - її праву частину.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	ЛЧ	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \wedge \bar{Q}$	$\bar{P} \wedge Q$	ПЧ
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Стовпці для ЛЧ і ПЧ збігаються. Це означає логічну еквівалентність висловлень (2.4), а з нею і справедливість формули (2.3).

2 спосіб. Доведемо формулу (2.3) користуючись законами алгебри множин.

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} &= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \big((A \cup B) \cap \bar{A}\big) \cup \big((A \cup B) \cap \bar{B}\big) = \\
&= \big(\bar{A} \cap (A \cup B)\big) \cup \big(\bar{B} \cap (A \cup B)\big) = \\
&= \big((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)\big) \cup \big((\bar{B} \cap A) \cup (\bar{B} \cap B)\big) = \\
&= \big(\emptyset \cup (\bar{A} \cap B)\big) \cup \big((\bar{B} \cap A) \cup \emptyset\big) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap A) = \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).
\end{aligned}$$

При доведенні формули ми користувались відповідно: законом де Моргана, дистрибутивним законом, комутативним законом, дистрибутивним законом, законом доповнення, законом порожньої множини і комутативним законом.

2.3. Формули включень та виключень

Визначення. Множина називається ***скінченною***, якщо вона містить скінченну кількість елементів і називається ***нескінченною***, якщо вона містить необмежену кількість елементів.

В дискретній математиці частіше зустрічаються скінченні множини, але кількість елементів цих множин буває дуже великою. Підрахувати цю кількість не завжди просто.

Означення. Кількість елементів множини A називається її ***потужністю*** і позначається $|A|$.

Для скінченних множин A і B справедлива формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (2.5)$$

Ця формула називається формулою включень та виключень. В неї включаються $|A|$ та $|B|$ і виключається $|A \cap B|$.

Доведемо формулу. Позначимо через n_A кількість елементів, які належать множині A і не належать множині B, через n_B - кількість елементів, які належать множині B і не належать множині A, через n_{AB} кількість елементів, які належать множинам A і B (рис. 2.7). Тоді

$$|A| = n_A + n_{AB}, \quad |B| = n_B + n_{AB}, \quad |A \cap B| = n_{AB},$$
$$|A \cup B| = n_A + n_B + n_{AB}\ .$$

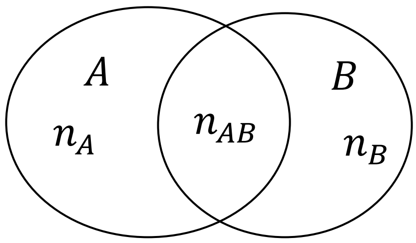


Рис. 2.7.

Підрахуємо ліву й праву частини нашої формули. Ліва частина дорівнює

$$|A \cup B| = n_A + n_B + n_{AB}.$$

Права частина дорівнює

$$|A| + |B| - |A \cap B| = n_A + n_{AB} + n_B + n_{AB} - n_{AB} =$$
$$= n_A + n_B + n_{AB}.$$

З рівності правих частин робимо висновок, що й ліві частини рівні. Формулу (2.5) доведено.

Приклад. Кожен із шістдесятьох студентів 1 курсу кораблебудівного факультету може відвідувати спортивні секції. Якщо 15 з них відвідують баскетбольну секцію, 10 - волейбольну секцію, а п'ятеро відвідують обидві ці секції, то скільки студентів взагалі не відвідують згаданих секцій?

Розв'язання. Позначимо

A={студенти, які відвідують баскетбольну секцію},

B={студенти, які відвідують волейбольну секцію}.

Тоді $|A| = 15,\ |B| = 10,\ |A \cap B| = 5$. Кількість студентів, які відвідують хоча б одну з названих секцій дорівнює

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 10 - 5 = 20.$$

Отже, 60-20=40 студентів не відвідують згаданих секцій.

Формула включень та виключень для трьох скінченних множин A, B і C має вигляд

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доведення. На об'єднання множин $B \cup C$ будемо дивитись як на одну множину і скористаємось формулою (2.5):

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| \\ &+ |(A \cap B) \cap (A \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

В останній рівності ми скористалися асоціативним законом, комутативним законом і законом ідемпотентності.

$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap A \cap C = (A \cap A) \cap B \cap C = A \cap B \cap C.$$

Формулу доведено.

Приклад. В групі 20 студентів. Із них 12 вміють співати, 8 вміють танцювати, 5 вміють декламувати, 3 вміють співати і танцювати, 2 вміють співати і декламувати, 4 вміють танцювати і декламувати, 1 вміє співати, танцювати і декламувати. Скільки учнів групи нічого з цього не вміють робити? Скільки учнів з цього вміють робити тільки одне?

Розв’язання. Позначимо

$A =${студенти, що вміють співати}, $|A| = 12$,

$B =${студенти, що вміють танцювати}, $|B| = 8$,

$C =${студенти, що вміють декламувати}, $|C| = 5$.

Тоді

$|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 2$, $|B \cap C| = 4$, $|A \cap B \cap C| = 1$.

Співати, або танцювати, або декламувати вміють

$|A \cup B \cup C| = 12 + 8 + 5 - 3 - 2 - 4 + 1 = 17$ студентів.

Нічого не вміють 20-17=3 студентів.

Щоб з'ясувати скільки учнів вміють робити тільки одне, побудуємо діаграму Венна (рис. 2.8). З діаграми видно, що тільки співати вміють вісім студентів, тільки танцювати – двоє студентів, тільки декламувати – ніхто.

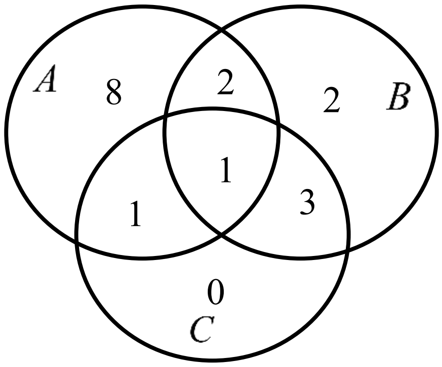


Рис. 2.8

Формули включень та виключень можна узагальнити для n скінченних множин $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{i\neq j}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i\neq j\neq k}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \dots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Компактний запис $i \neq j \neq k$ в цій формулі слід розуміти так:

$$i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k.$$

2.4. Прямий добуток множин

В множинах порядок запису їх елементів у фігурних дужках не має значення. Наприклад $\{1,2,3\} = \{2,1,3\}$. Але якщо ці три числа задають координати вектора, то їх записують в круглих дужках і тут вже порядок їх розташування має значення. Наприклад, вектори $(1,2,3)$ і $(2,1,3)$ різні. Отже, якщо елементи множини записані у круглих дужках, то порядок розміщення елементів має значення і таку множину називають упорядкованою множиною, або вектором, або кортежем.

Означення. Прямим добутком множин A і B називається множина всіх можливих упорядкованих наборів (a, b), де перший елемент набору a належить множині A, а другий елемент b − належить множині B. Позначається прямий добуток множин A і B так: $A \times B$. Тобто

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ \ b \in B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{x, y\}$, $B = \{1,2,3\}$. Тоді

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

Наочно $A \times B$ можна уявити собі так, як зображено на рис. 2.9.

	● 1	● 2	● 3
● x	● $(x, 1)$	● $(x, 2)$	● $(x, 3)$
● y	● $(y, 1)$	● $(y, 1)$	● $(y, 1)$

Рис. 2.9.

З рис. 2.8 стає зрозумілою наступна формула. Якщо множини A і B скінченні, то

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Означення. Прямим добутком множин $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ називається

$$\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \dots \times \mathrm{A}_\mathrm{n} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\colon\ a_i \in \mathrm{A}_\mathrm{i},\ \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n}\}.$$

Якщо множини рівні: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \cdots = \mathrm{A}_\mathrm{n} = A$, то

$$\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \dots \times \mathrm{A}_\mathrm{n} = A^\mathrm{n}.$$

Наприклад, якщо R - множина всіх дійсних чисел, то R^2 можна розуміти як множину всіх точок площини xOy, R^3 - множина всіх точок тривимірного простору $Oxyz$.

Якщо $B = \{0,1\}$, то B^n − множина n-вимірних векторів. Кожна компонента такого вектора дорівнює 0 або 1. Такий вектор називається рядком біт довжини n.

2.5. Характеристичні вектори множин

Нехай $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ − універсальна множина, $A \subseteq U$.

Характеристичним вектором множини A називається вектор

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

де $a_i = 1$, якщо $u_i \in A$ і $a_i = 0$ в протилежному випадку.

Тепер дії над множинами можна імітувати логічними операціями над відповідними характеристичними векторами.

Приклад. Нехай $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,3\}$. Записати характеристичні вектори множин A і B, а потім знайти характеристичні вектори множин $A \cup B$, $A \cap B$ та $\bar{B}$.

Розв'язання. Характеристичні вектори множин A і B мають вигляд

$$a = (1,0,1,0,1),\ \ b = (0,1,1,0,0).$$

Знайдемо характеристичні вектори множин $A \cup B$, $A \cap B$ та $\bar{B}$ виконавши відповідно диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення характеристичних векторів a і b:

$$a \vee b = (1,1,1,0,1), \quad a \wedge b = (0,0,1,0,0), \quad \bar{b} = (1,0,0,1,1).$$

За одержаними характеристичними векторами тепер легко записати й самі множини $A \cup B$, $A \cap B$ та $\bar{B}$:

$$A \cup B = \{1,2,3,5\}, \quad A \cap B = \{3\}, \quad \bar{B} = \{1,4,5\}.$$

Так комп'ютери виконують дії над множинами.

Набір вправ 2.

2.1. Розглянемо підмножини словника української мови:
A={x: x - слово, що стоїть перед «собака»};
B={x: x - слово, що стоїть після «кішка»};
C={x: x - слово, що містить подвійну букву}.
З'ясуйте, які із наступних висловлень істинні.
(a) $C \subseteq A \cup B$;
(b) «завдання»$\in \overline{B} \cap C$;
(c) «творення»$\in B \triangle C$;
(d) $A \cap B = \varnothing$.
Опишіть на словах елементи наступних множин:
(e) $A \cap B \cap C$;
(f) $(A \cup B) \cap \overline{C}$.

2.2. У якості універсальної множини для даної задачі візьмемо $U = \{p,q,r,s,t,u,v,w\}$. Нехай $A = \{p,q,r,s\}$, $B = \{r,t,v\}$, $C = \{p,s,t,u\}$.
Знайдіть елементи наступних множин:

(a) $B \cap C$;
(b) $A \cup C$;
(c) $\overline{C}$;
(d) $A \cap B \cap C$;
(e) $\overline{A \cup B}$;
(f) $B \triangle C$;
(g) $(A \cup B) \cap A \cap C$;
(h) $B \setminus C$.

2.3. Доведіть за допомогою законів алгебри множин наступні тотожності:

a) $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right)} \cup B = \overline{A} \cup B$; **b)** $\overline{\overline{A} \cap \overline{B \cup C}} = A \cup B \cup C$;
c) $\left(A \cup B \cup C\right) \cap \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) \cap \overline{A \cup C} = \varnothing$;
d) $A \setminus B \setminus C = A \setminus \left(B \cup C\right)$;
e) $A \triangle A \triangle A = A$.

2.4. Визначимо операцію «$*$» за формулою
$$A * B = \overline{A \cap B}.$$
Зобразіть діаграмою Венна множину $A * B$. Користуючись законами алгебри множин доведіть наступні тотожності:
a) $A * A = \overline{A}$; **b)** $\left(A * A\right) * \left(B * B\right) = A \cup B$;
c) $\left(A * B\right) * \left(A * B\right) = A \cap B$.

2.5. Студенти 1 курсу спеціальності «Комп'ютерні науки» можуть відвідувати додаткові дисципліни. 25 з них віддали перевагу бухгалтерії, 27 обрали бізнес, а 20 вирішили займатися туризмом. Крім того, було 20 студентів, що слухали курси бухгалтерії і бізнесу, п'ятеро вивчали бухгалтерію і туризм, а троє – туризм і бізнес. Відомо, що ніхто із студентів не наважився відвідувати одразу три додаткових курсів. Скільки студентів відвідували хоча б один додатковий курс? Скільки з них були захоплені тільки туризмом?

2.6. Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - універсальна множина. Запишіть характеристичні вектори підмножин

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \text{ і } B = \{3, 5\}.$$

Знайдіть характеристичні вектори підмножин

$$A \cup \overline{B} \text{ і } A \triangle B,$$

після чого перелічіть їх елементи.

2.7. Знайдіть прямий добуток множин $A = \{1, 2, 5\}$ і $B = \{3, 5\}$.

ТЕМА 3. ВІДНОШЕННЯ

3.1. Відношення та способи їх задання

У повсякденному житті між людьми, підприємствами, організаціями, країнами виникають стосунки. Одна із задач дискретної математики полягає в тому, щоб описати ці стосунки математичною мовою.

Означення. Бінарним відношенням ρ між множинами A і B називається підмножина їх прямого добутку, тобто

$$\rho \subseteq A \times B.$$

Наприклад, якщо A - множина всіх чоловіків планети Земля, B - множина всіх жінок нашої планети, то $A \times B$ - це множина всіх можливих пар (a, b), де $a \in A$, $b \in B$. З усіх цих пар можна виділити особливі, наприклад, супружні пари. Підмножина цих супружних пар задає відношення ρ в нашому прикладі.

Якщо пара $(a, b) \in \rho$, то кажуть, що елемент a знаходиться у відношенні ρ до елемента b і пишуть $a\rho b$.

При $A = B$ кажуть, що відношення ρ задане на множині A.

n-арним відношенням ρ на множинах $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ називається підмножина їх прямого добутку:

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n.$$

Якщо вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, то кажуть, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ знаходяться у відношенні ρ.

Розглянемо приклади відношень.

Приклад 3.1. На множинах $A = \{1,3,5,7\}$ і $B = \{2,4,6\}$ дано відношення

$$T = \{(x, y): x < y\}.$$

Записати упорядковані пари цього відношення.

Розв'язання. $T = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,4), (3,6), (5,6)\}$.

Приклад 3.2. На множині $A = \{1,2,3,6\}$ дано відношення

$$V = \{(x, y): x - \text{дільник } y\}.$$

Записати упорядковані пари цього відношення.

Розв'язання. $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3)(3,6), (6,6)\}$.

Приклад 3.3. Розглянемо генеалогічне дерево деякої родини, що зображене на рис. 3.1. Виписати упорядковані пари, що знаходяться в наступних відношеннях на множині A членів цієї родини:

а) $R = \{(x, y): x - \text{дід } y\}$, б) $S = \{(x, y): x - \text{брат } y\}$.

Розв'язання.

R={(Іван, Олеся), (Іван, Антоніна), (Іван, Андрій), (Федот, Олеся), (Федот, Антоніна), (Федот, Андрій)},

S={(Микита, Олена), (Микита, Катерина), (Олександр, Наталія), (Андрій, Олеся), (Андрій, Антоніна)}.

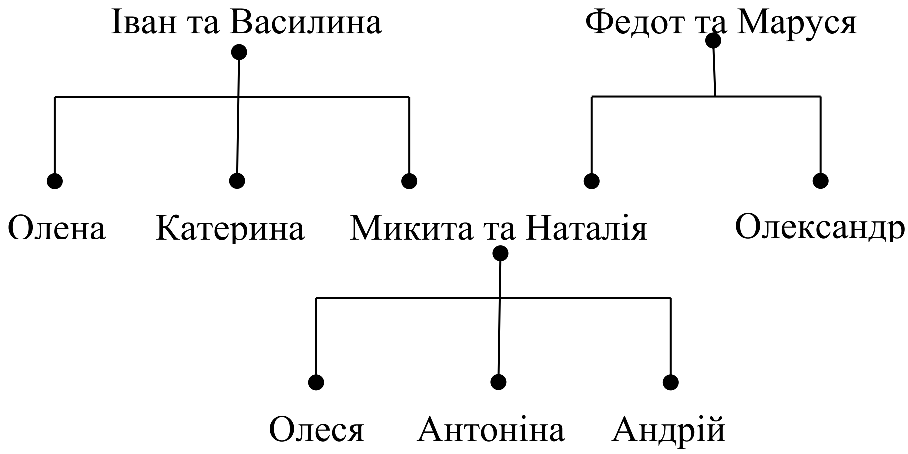


Рис. 3.1

Приклад 3.4. На множині дійсних чисел R дано відношення

$$S = \left\{(x, y, z): z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}.$$

Описати це відношення геометрично.

Розв'язання. Трійка дійсних чисел (x, y, z) належить відношенню S тоді і тільки тоді коли точка $M(x, y, z)$ лежить на еліптичному параболоїді (рис. 3.2), що задається рівнянням

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

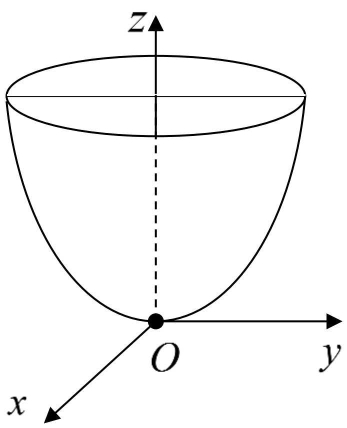


Рис. 3.2

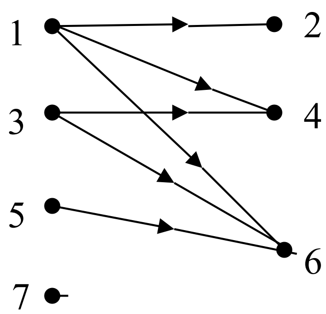


Рис. 3.3

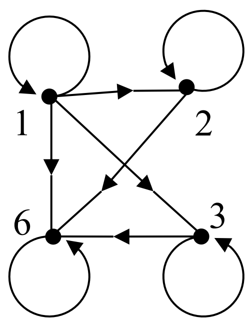


Рис. 3.4

Бінарне відношення ρ на скінченних множинах A і B можна задати графічно. Для цього елементи множин A і B позначають точками на площині. Якщо елемент a знаходиться у відношенні до елемента b, то відповідні точки з'єднують напрямленим відрізком. Отримана фігура називається орієнтованим графом або орграфом. Орграф відношення T з прикладу 3.1 зображений на рис. 3.3.

Якщо відношення ρ задано лише на одній множині A, то елементи цієї множини можна зобразити тільки один раз і з'єднати напрямленими відрізками ті елементи, які знаходяться у відношенні ρ. Наприклад, орграф відношення V з прикладу 3.2 зображено на рис. 3.4.

Розглянемо ще один спосіб задання відношення ρ на скінченних множинах A і $B -$ матричний спосіб. Для цього упорядкуємо елементи множин A і B. Елементами множини A позначимо рядки матриці, а елементами множини $B -$ її стовпці. Елементи m_{ij} матриці відношення ρ визначимо наступним чином: $m_{ij} = 1$, якщо i-й елемент множини A знаходиться у відношенні з j-м елементом множини B і $m_{ij} = 0$ в протилежному випадку. Матриця, всі елементи якої дорівнюють 0 або 1, називається булевою матрицею.

Матриці відношень T і V з прикладів 3.1 та 3.2 відповідно мають наступні вигляди:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Висновок. Бінарне відношення можна задати чотирма способами: словами (за допомогою відповідних предикатів), переліком упорядкованих пар, орграфом і матрицею.

3.2. Властивості відношень

Надалі будемо вважати, що бінарне відношення ρ задано на множині A.

Означення. Відношення ρ називається ***рефлексивним***, якщо кожний елемент множини знаходиться у відношенні з самим собою, тобто $\forall a \in A$ справджується $a\rho a$.

Відношення ρ називається ***іррефлексивним***, якщо для всіх елементів $a \in A$ невірно $a\rho a$.

Відношення ρ називається ***симетричним***, якщо для будь-якої пари елементів a і b з A, такої, що $a\rho b$, буде справедливо $b\rho a$.

Відношення ρ називається ***кососиметричним (антисиметричним)***, якщо для будь-якої пари елементів a і b з A, такої, що $a\rho b$ і $b\rho a$, буде справедливо $a = b$.

Відношення ρ називається ***транзитивним***, якщо для будь-якої трійки елементів a, b і c з A, такої, що $a\rho b$ і $b\rho c$, буде справедливо $a\rho c$.

Приклад 3.5. Нехай на множині N натуральних чисел дано відношення

$$\rho = \{(x, y): x \text{ ділить } y\}.$$

Дослідити відношення на рефлексивність, симетричність та транзитивність.

Розв'язання. Очевидно, що відношення ρ рефлексивне і кососиметричне. Доведемо його транзитивність. Нехай x ділить y, і y ділить z, тобто

$$\frac{y}{x} = m \text{ і } \frac{z}{y} = n,$$

де m і n - натуральні числа. доведемо, що x ділить z:

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{y}\frac{y}{x} = nm.$$

Оскільки nm - ціле число, то x ділить z.

Буває так, що відношення ρ не задовольняє деяку властивість P. Щоб задовольнити властивість треба до цього відношення приєднати декілька пар. Отримаємо нове відношення ρ^*, яке задовольняє властивість P. При цьому, якщо ми додали лише необхідні пари і не добавляли зайвих, то відношення ρ^* називається ***замиканням*** відношення ρ. Більш точно, справедливе наступне означення.

Відношення ρ^* називається ***замиканням*** відношення ρ відносно властивості P, якщо, по-перше ρ^* задовольняє властивість P, по-друге, ρ^* є підмножиною будь-якого іншого відношення, що задовольняє властивість P і вміщує відношення ρ.

Приклад 3.6. Нехай на множині $A = \{1,2,3\}$ дано відношення

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3)\}.$$

Воно не рефлексивне, не симетричне і не транзитивне. Знайти відповідні замикання.

Розв'язання. Для рефлексивності не достає пар $(2,2)$ і $(3,3)$. Отже, замикання за рефлексивністю має вигляд

$$\rho_r^* = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3); (2,2), (3,3)\}.$$

Можна записати й так:

$$\rho_r^* = \rho \cup \{(2,2), (3,3)\}.$$

Замикання відносно симетричності має вигляд

$$\rho_c^* = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3); (2,1), (3,2)\}.$$

Замикання відносно транзитивності в нашому прикладі

$$\rho_{tr}^* = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (2,3); (2,1), (3,2), (2,2), (3,3)\}$$

збігається із множиною A^2.

3.3. Відношення еквівалентності

Означення. Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення ρ на множині A називається ***відношенням еквівалентності.***

Якщо ρ − відношення еквівалентності і $a\rho b$, то кажуть, що елементи a і b еквівалентні.

Відношення еквівалентності узагальнює поняття рівності.

Приклади відношень еквівалентності.

1) Відношення "=" на множині дійсних чисел.

2) Відношення "ровесник" на множині всіх людей.

3) Відношення сидіти в одному ряду на множині студентів, які присутні на лекції.

Наведені приклади показують, що відношення еквівалентності розбиває множину на підмножини.

Означення. Розбиттям множини *A* називається сукупність підмножин $A_1, A_2, ..., A_n$ множини *A* таких, що

1) $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$;   2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Діаграма Венна такого розбиття зображена на рис. 3.5.

Означення. Класом еквівалентності елемента $a \in A$ називається множина всіх еквівалентних йому елементів:

$$E_a = \{x \in A : x\rho a\}.$$

Теорема. Відношення еквівалентності на не порожній множині *A* задає розбиття цієї множини на підмножини, які складаються з еквівалентних елементів. Ці підмножини називаються ***класами еквівалентних елементів.***

Доведення теореми проведемо для скінченної множини *A*. Візьмемо будь-який елемент $a_1 \in A$. Позначимо через A_1 клас еквівалентності цього елемента, $A_1 \subseteq A$ (рис. 3.6).

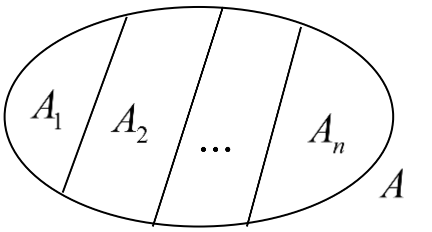


Рис. 3.5

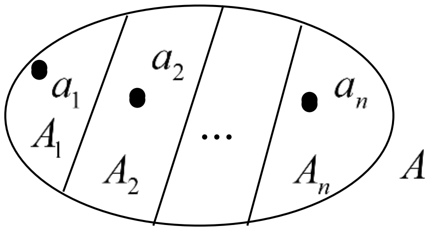


Рис. 3.6

Якщо $A_1 = A$, то доведення закінчено. Якщо $A_1 \neq A$, то існує хоча б один елемент $a_2 \in A$ такий, що $a_2 \notin A_1$. Клас еквівалентності цього елемента позначимо через A_2. Очевидно, що $A_1 \cup A_2 \subseteq A$. Доведемо, що $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Припустимо супротивне, що існує елемент $a \in A_1 \cap A_2$. Оскільки $a \in A_1$ і $a \in A_2$, то $a_1 \rho a$ і $a_2 \rho a$. Із симетричності відношення ρ витікає $a \rho a_2$, а із транзитивності $a_1 \rho a_2$. Останнє означає, що $a_2 \in A_1$ і це суперечить нашому припущенню.

Якщо $A_1 \cup A_2 = A$, то теорему доведено. Інакше існує елемент $a_3 \in A$ такий, що $a_3 \notin A_1 \cup A_2$. Клас еквівалентності цього елемента позначимо через A_3. Описану процедуру повторимо стільки разів, доки не отримаємо рівність

$$A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

причому $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Останнє твердження ми довели при $i = 1$ та $j = 2$. В інших випадках доведення аналогічне. Теорему доведено.

Приклад 3.6. Відношення ρ на множині Z цілих чисел задано умовою: $x\rho y$, якщо і тільки якщо $x-y$ ділиться на 3. Доведіть, що ρ − відношення еквівалентності і опишіть класи еквівалентних елементів.

Розв'язання. Оскільки $x-x=0$ ділиться на 3, то відношення рефлексивне. Якщо $x-y$ ділиться на 3, то і $y-x$ ділиться на 3. Значить, відношення симетричне.

Доведемо транзитивність. Нехай $x\rho y$ і $y\rho z$, тобто $x-y$ ділиться на 3 і $y-z$ ділиться на 3. Доведемо $x\rho z$, тобто, що $x-z$ ділиться на 3. Маємо

$$x-z=(x-y)+(y-z).$$

Останній вираз ділиться на 3, бо "кожна із дужок" ділиться на 3.

Знайдемо класи еквівалентних елементів:

$$E_0=\{x\in Z: x\text{− } \textit{ділиться на } 3\}=\{x=3m:\mathrm{m}\in Z\}=\{0,\pm 3,\pm 6,...\},$$

$$E_1=\{x\in Z: x-1\text{− } \textit{ділиться на } 3\}=\{x=3m+1:\mathrm{m}\in Z\},$$

$$E_1=\{...,-8,-5,-2,1,4,7,10,...\},$$

$$E_2=\{x\in Z: x-2\text{− } \textit{ділиться на } 3\}=\{x=3m+2:\mathrm{m}\in Z\},$$

$$E_2=\{...,-7,-4,-1,2,5,8,11,...\}.$$

Отже, відношення ρ розбило множину всіх цілих чисел на 3 класи:

$$Z=E_0\cup E_1\cup E_2.$$

Тут E_0 - множина всіх цілих чисел, які діляться на 3, E_1 - множина всіх цілих чисел, які при діленні на 3, дають в остачі 1, E_2 - множина всіх цілих чисел, які при діленні на 3, дають в остачі 2.

У вищій алгебрі кажуть, що числа, які належать одному класу рівні по модулю 3, наприклад,

$$0\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,3),\quad 1\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,3),\quad 2\equiv 8\,(\mathrm{mod}\,3).$$

3.4. Відношення часткового порядку

Означення. Рефлексивне, кососиметричне і транзитивне відношення ρ на множині *A* називається ***відношенням часткового порядку.***

Відношення часткового порядку визначає "старшинство" для деяких елементів множини.

Приклади часткових порядків:

1) "≤" на множині дійсних чисел;

2) "⊆" на підмножинах універсальної множини;

3) "... ділить ..." на множині натуральних чисел.

Множини з відношенням часткового порядку називаються ***частково упорядкованими*** множинами.

Якщо ρ - відношення часткового порядку на множині A і $x\rho y$, то x називається ***попереднім елементом***, а y − ***наступним елементом*** ($x \neq y$).

Будь-який елемент може мати багато попередників.

Якщо x передує y і не існує елемента z, для якого $x\rho z$ і $z\rho y$, то x називається ***безпосереднім попередником*** y і пишуть $x \prec y$.

Означення. Відношення часткового порядку називається ***лінійним порядком*** на множині A, якщо для будь-якої пари різних елементів цієї множини можна виділити попередній елемент і наступний елемент.

Приклади лінійного порядку.

1) "$\leq$" на множині дійсних чисел;

2) лексикографічний порядок слів у словнику.

Частково упорядковані множини можна зображувати ***діаграмами Хассе:*** елементи частково упорядкованої множини зображують точками на площині. Якщо $x \prec y$, то x розташовують нижче за y і з'єднують з ним відрізком. Якщо елемент не має попередніх, то він називається ***мінімальним,*** а якщо не має наступних, то називається ***максимальним.***

Приклад 3.7. На множині $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ відношення "a дільник b" задає частковий порядок. Зобразити діаграму Хассе.

Розв'язання. Відношення "... дільник ..." на множині A є рефлексивним, кососиметричним і транзитивним (приклад 3.5). Тому задає на множині A частковий порядок. Діаграма Хассе зображена на рис. 3.7. З діаграми видно, що 1 - мінімальний елемент, 12 і 18 − максимальні елементи.

З множини A можна виділити лінійно упорядковану підмножину, наприклад, {1,2,6,18}.

Приклад 3.8. На множині всіх підмножин множини $A = \{1, 2, 3\}$ дано відношення "X – підмножина У". Зобразити діаграму Хассе.

Розв'язання. Підмножинами заданої множини є наступні множини:

$$\varnothing,\ B = \{1\},\ C = \{2\},\ D = \{3\},\ E = \{1,2\},\ F = \{1,3\},\ G = \{2,3\},\ A = \{1,2,3\}$$

Множина цих множин називається булеаном множини A і позначається 2^A.

Легко перевірити, що відношення "X – підмножина У" є відношенням часткового порядку. Діаграму Хассе цього відношення зображено на рис. 3.8.

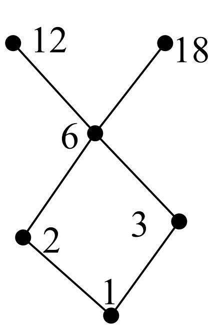


Рис.3.7

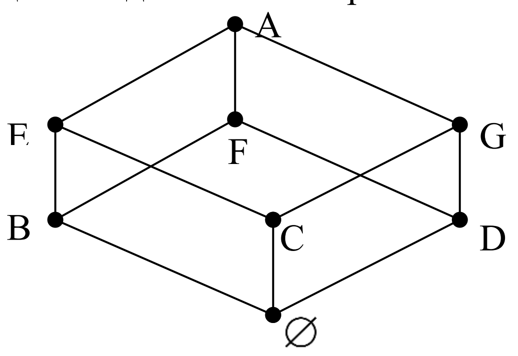


Рис.3.8

Набір вправ 3.

3.1. Запишіть множину упорядкованих пар та зобразіть орієнтовний граф, що заданий матрицею:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2. Запишіть множину упорядкованих пар відношення на множині натуральних чисел

$$\rho = \{(x, y) : 2x + y = 9\}.$$

3.3. Нехай ρ - відношення на множині $\{1,2,3,4\}$ визначається умовою: $a\rho b$ тоді і тільки тоді, якщо $a+2b$ - непарне число. Подайте ρ **а)** як множину упорядкованих пар; **б)** у графічній формі; **в)** у вигляді матриці.

3.4. Визначте, які із наступних висловлень на множині людей рефлексивні, симетричні або транзитивні:

А) «… має тих самих батьків, що і …»;

Б) «… є братом …»;

В) «... старше чи молодше, ніж …»;

Г) «… не вище, ніж …».

3.5. Опишіть замикання за транзитивністю в наступних відношеннях:

А) «*x* на рік старше, ніж *y*» на множині людей;

Б) $x < y$ на множині дійсних чисел;

В) «*x* є донькою *y*» на множині жінок.

3.6. Знайдіть замикання за рефлексивністю, за симетричністю і за транзитивністю відношення

$$\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,a)\},$$

що задано на множині $\{a,b,c,d\}$.

3.7. Для кожного з наступних відношень еквівалентності на заданій множині *A* опишіть блоки, на які розбивається множина *A*:

А) *A* – множина книг в бібліотеці, а відношення ρ визначається умовою $a\rho b$ тоді і тільки тоді, якщо книга a написана тією ж мовою що і книга b;

Б) $A = Z,\quad \rho$ задається умовою: $a\rho b$ тоді і тільки тоді, якщо $a-b$ - парне число;

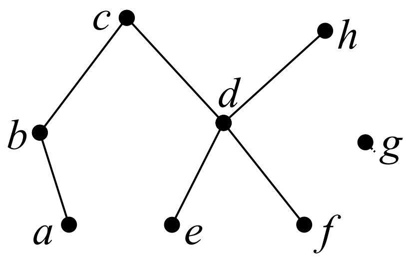
В) *A* – множина людей, а $a\rho b$, якщо a має таку саму стать, що і b.

3.8. Відношення ρ на множині Z визначається так: $a\rho b$ тоді і тільки тоді, якщо $a^2 - b^2$ ділиться на 3. Доведіть, що ρ є відношенням еквівалентності і опишіть класи еквівалентних елементів.

3.9. Намалюйте діаграму Хассе для кожного із наступних частково упорядкованих множин з відношенням a ділить b:

А) $\{1,2,3,4,6,12\}$; **Б)** $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.

3.10. Діаграма Хассе частково упорядкованої множини $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ зображена на рисунку.



Запишіть елементи відношення ρ, знайдіть мінімальні та максимальні елементи частково упорядкованої множини *A*.

ТЕМА 4. ФУНКЦІЇ. КОМБІНАТОРИКА. АЛГЕБРИ

4.1. Обернене відношення і композиція відношень

Означення. Нехай на множинах A і B дано відношення ρ. ***Обернене відношення*** визначається так:

$$\rho^{-1} = \left\{ \left(b,a\right) : \left(a,b\right) \in \rho, a \in A, b \in B \right\}.$$

Наприклад, оберненим до відношення "... батько ..." на множині всіх людей є відношення "... дитина ...".

Оберненим відношенням до відношення

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(2,3)\}$$

буде відношення

$$\rho^{-1} = \{(1,1),(2,1),(1,3),(3,1),(3,2)\}.$$

Означення. Нехай дано три множини A, B і C. На множинах A і B дано відношення ρ, а на множинах B і C – відношення σ. ***Композицією відношень*** ρ і σ називається відношення

$$\sigma \circ \rho = \left\{ \left(a,c\right) : a \in A, b \in B, \exists b \in B : a\rho b \wedge b\sigma c \right\}.$$

Композиція встановлює відношення між елементами множин A і C. Елементи множини B виступають посередниками (рис. 4.1).

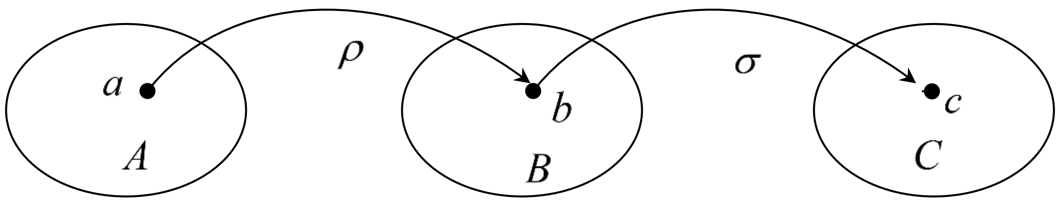


Рис. 4.1

Приклад 4.1. Нехай ρ – відношення "... брат ...", а σ – "... батько ..." на множині всіх людей.

Тоді композиція $\sigma \circ \rho$ задає відношення "... дядько ...", а композиція $\sigma \circ \sigma$ задає відношення "... дід ...".

Приклад 4.2. Нехай дано три множини $A = \left\{a,b\right\}$, $B = \left\{1,2,3\right\}$ і $C = \left\{x,y\right\}$. На множинах A і B дано відношення ρ, а на множинах B і C – відношення σ:

$$\rho = \left\{ \left(a,1\right), \left(a,2\right), \left(a,3\right), \left(b,2\right) \right\}, \ \sigma = \left\{ \left(1,y\right), \left(2,x\right), \left(3,x\right) \right\}.$$

Композиція відношень має вигляд $\sigma \circ \rho = \left\{ \left(a,y\right), \left(a,x\right), \left(b,x\right) \right\}$.

Графи відношень ρ, σ та $\sigma \circ \rho$ наочно представлені на рис. 4.2.

Композицію відношень можна обчислювати за допомогою матриць. Нехай відношення ρ задає матриця M_1, а відношення σ – матриця M_2. Тоді відношення $\sigma \circ \rho$ задається матрицею $M = M_1 M_2$. Тут M_1 і M_2 – булеві матриці (тобто складені з нулів та одиниць). Множення булевих матриць виконується аналогічно звичайним числовим матрицям. Відмінність полягає в тому, що замість множення виконуємо кон'юнкцію, а замість суми – диз'юнкцію.

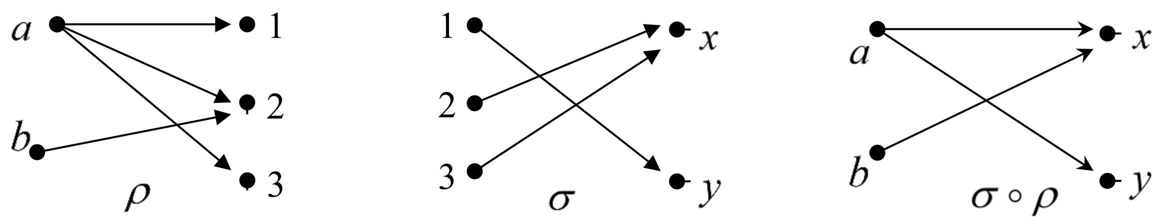


Рис. 4.2

Розв'яжемо приклад 4.2 матричним способом. Запишемо матриці відношень ρ і σ:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю композиції $\sigma \circ \rho$:

$$M = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, знайдена матриця відповідає композиції $\sigma \circ \rho$.

Приклад 4.3. Відношення ρ на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано матрицею

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити матрицю композиції $\rho \circ \rho$ і за знайденою матрицею дослідити відношення ρ на транзитивність.

Розв'язання. Знайдемо матрицю композиції

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Із матриць M і M^2 видно, що відношення ρ не транзитивне. Дійсно, в матриці M^2 в третьому рядку і в третьому стовпці стоїть 1. Це означає, що існує елемент $a \in A$ такий, що $3\rho a$ і $a\rho 3$. Якби відношення ρ було транзитивним, то було б справедливим $3\rho 3$. Але з матриці M видно, що це відношення не справджується.

Висновок. Для того, щоб відношення було транзитивним необхідно і достатньо, щоб одиниці в матриці M стояли на тих самих місцях на яких вони стоять в матриці M^2.

4.2. Функції

Означення. Бінарне відношення f між множинами X і Y називається ***функцією***, якщо для кожного елемента $x \in X$ знайдеться єдиний елемент $y \in Y$ такий, що xfy. При цьому пишуть $y = f\left(x\right)$, або $f: X \to Y$ і кажуть, що функція f діє із множини X в множину Y. Множина X називається ***областю визначення функції***, а множина Y – ***множиною значень функції*** (рис. 4.3).

Приклад. На множинах $A = \{a, b, c\}$ і $B = \{1, 2\}$ дано три відношення:

$$\rho = \left\{(a,1),(a,2),(b,1),(c,2)\right\},\ \sigma = \left\{(a,2),(b,1)\right\},\ \tau = \left\{(a,2),(b,1),(c,2)\right\}.$$

Які з цих відношень функції?

Розв'язання. Відношення ρ – не функція, бо елементу a відповідають два елемента множини B: 1 і 2.

Відношення σ – не функція, бо елементу c не відповідає жодного елемента множини B.

Відношення τ є функцією.

Означення. Множина всіх елементів $y \in Y$ для яких існує $x \in X$ такий, що $y = f\left(x\right)$ називається областю визначення функції і позначається $f\left(X\right)$ (рис. 4.4).

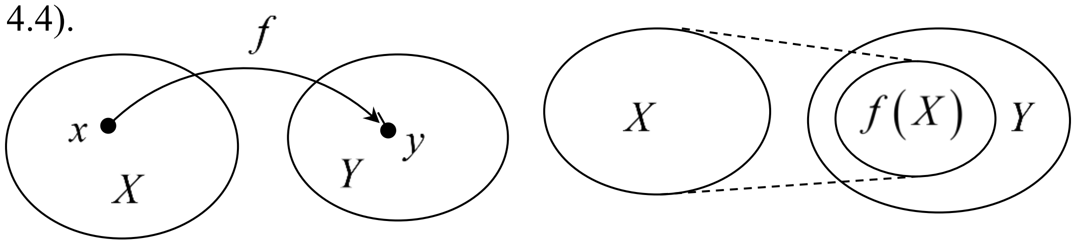


Рис. 4.3 Рис. 4.4

Надане вище означення функції підходить і для функції кількох змінних

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

яку ми вивчаємо в курсі вищої математики. Якщо кожний із аргументів x_i цієї функції належить деякій множині X_i, то областю визначення функції буде множина $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Областю значень функції є деяка підмножина Y множини дійсних чисел. Тепер, позначивши вектор

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

отримаємо запис функції у звичайному вигляді $y = f\left(x\right)$.

Означення. Функція $f : X \to Y$ називається ***ін'єктивною,*** якщо для будь-яких x_1 і x_2 з множини X із нерівності $x_1 \neq x_2$ витікає нерівність $f(x_1) \neq f(x_2)$, або, що логічно еквівалентно, з рівності $f(x_1) = f(x_2)$ витікає рівність $x_1 = x_2$.

Функція $f : X \to Y$ називається ***сюр'єктивною,*** якщо для кожного $y \in Y$ існує $x \in X$ такий, що $y = f\left(x\right)$, тобто якщо $Y = f\left(X\right)$.

Функція $f : X \to Y$ називається ***бієктивною,*** якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна.

Приклад. Функції, які графічно зображені на рис. 4.5, дослідити на ін'єктивність, сюр'єктивність та бієктивність.

Функція f ін'єктивна, але не сюр'єктивна бо для елемента 3 не знайшлось x такого, щоб $f(x) = 3$. Функція g не ін'єктивна, оскільки $f\left(a\right) = 1$, $f\left(b\right) = 1$, значить, $f\left(a\right) = f\left(b\right)$, але $a \neq b$. Функція сюр'єктивна.

Функція h не ін'єктивна і не сюр'єктивна.

Функція y ін'єктивна, сюр'єктивна, значить, – бієктивна.

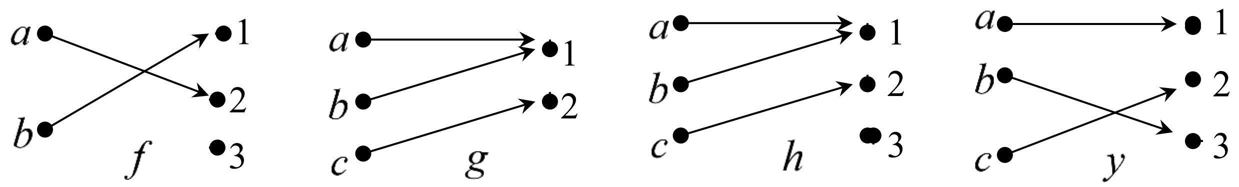


Рис. 4.5

4.3. Обернені функції

Нехай дано функція $f : X \to Y$. Ми знаємо, що функція – це окремий випадок відношення. Якщо обернене відношення $f^{-1} : Y \to X$ теж є функцією, то функція f називається ***оборотною.***

При цьому позначають, якщо $y = f\left(x\right)$, то $x = f^{-1}\left(y\right)$.

Серед функцій, графи яких зображені на рис. 4.5, оборотною є лише функція y. Функція f не має обернену, бо відношення f^{-1} не є функцією тому, що елементу 3 нічого не відповідає. Відношення g^{-1} – не функція, бо 1 перебуває у відношеннях з двома елементами: a і b. З аналогічних причин функція h не має оберненої.

Теорема. Функція $f: X \to Y$ оборотна тоді і тільки тоді, коли вона бієктивна.

Доведення складається з двох частин.

1) Нехай функція f оборотна. Доведемо її бієктивність, тобто ін'єктивність та сюр'єктивність. Припустимо, що функція f не ін'єктивна. Тоді знайдуться різні елементи x_1 і x_2 з X такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y$. Але тоді відношення f^{-1} не може бути функцією, бо елементу $y \in Y$ відповідають два різних елемента: x_1 і x_2.

Припустимо тепер, що функція не сюр'єктивна. Тоді знайдеться елемент $y \in Y$ в який не переходить жодний елемент з X. Це також суперечить визначенню оберненої функції. Ми довели бієктивність функції f.

2) Доведемо тепер, що бієктивна функція є оборотною. Із сюр'єктивності функції f витікає, що для будь-якого елемента $y \in Y$ знайдеться елемент $x \in X$ такий, що $y = f\left(x\right)$. Із ін'єктивності f витікає, що цей елемент єдиний. Тому f^{-1} – функція. Теорему доведено.

Приклад. Довести бієктивність функції $y = \log_2 x$ і знайти обернену їй функцію.

Розв'язання. Область визначення функції $X = \left(0, +\infty\right)$, а область значень $f(X) = (-\infty, +\infty)$.

Оскільки рівність $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$ можлива лише при $x_1 = x_2$, то функція ін'єктивна.

Доведемо сюр'єктивність. Візьмемо довільне число $y = (-\infty, +\infty)$ і знайдемо x. За означенням логарифма $x = 2^y$. Це і є обернена функція. Якщо перепозначити змінні, то обернену функцію можна записати у вигляді $y = 2^x$.

Графіком функції $y = f\left(x\right)$ називається множина точок $M\left(x, y\right)$, де x належить області визначення функції, а $y = f\left(x\right)$ (рис. 4.6).

Графік даної функції $y = \log_2 x$ симетричний до графіка оберненої функції $y = 2^x$ відносно прямої $y = x$ (рис. 4.7).

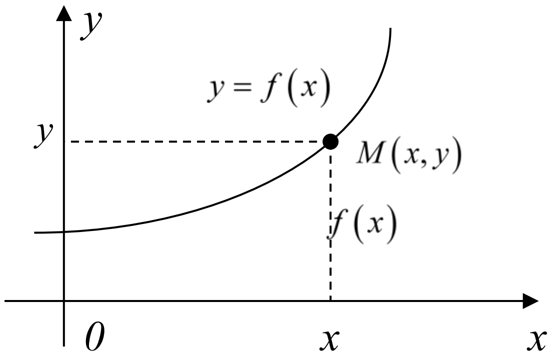


Рис. 4.6

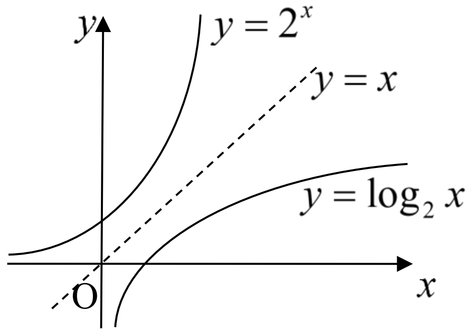


Рис. 4.7

4.4. Композиція функцій

Нехай функція $f: X \to Y$, а функція $g: Y \to Z$ (рис. 4.8). Розглянемо композицію функцій (як композицію відношень) $g \circ f$. Оскільки f – функція, то для кожного елемента $x \in X$ знайдеться єдиний елемент $y \in Y$ такий, що $y = f(x)$. Оскільки g – функція, то і для $y = f(x)$ знайдеться єдиний елемент $z \in Z$ такий, що $z = g(y)$. Виходить, що кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $z \in Z$:

$$z = g(y) = g(f(x)).$$

Отже, композицією функцій f і g – є функція $g \circ f: X \to Z$, яка визначається за правилом $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

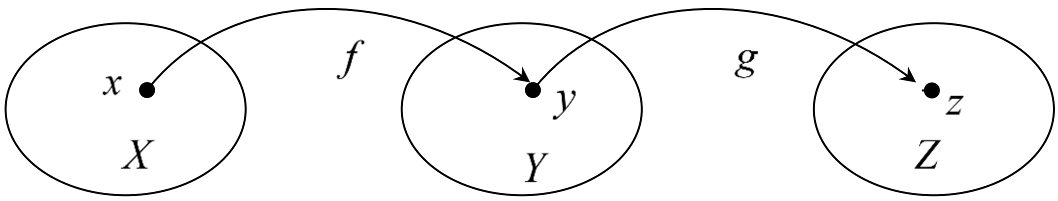


Рис. 4.8

З останньої формули видно, що композиція функцій – це підстановка функції у функцію.

Приклад. Нехай $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$. Знайти композиції функцій $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$ та $f \circ f$.

Розв'язання. Зазначимо, що $f: R \to R$, $g: R \to [0, +\infty)$. За означенням композиції функцій, отримаємо

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 1,$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x^2)^2 = x^4,$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x+1)+1 = 4x+3.$$

4.5. Принцип Діріхле

Теорема. Нехай задана функція $f : X \to Y$ на скінченних множинах X та Y, причому $|X| > |Y|$. Тоді деяке своє значення $y \in Y$ функція f прийме принаймні двічі.

Доведення. Якби всі значення функції були б різними, тобто функція була б ін'єктивною, то $|Y| \geq |X|$, що суперечить умові теореми.

Німецький математик Петер Діріхле сформулював це твердження в 1834 році

Для кращого розуміння теореми часто наводять такий приклад. Нехай X – множина із 10 кроликів, Y – множина із 9 кліток для них. Функція f переводить кожного кролика у певну клітку. Очевидно, що при таких умовах хоч би в одній з кліток буде більше одного кролика.

Приклад 4.4. В групі 17 студентів. Довести, що хоча б у двох студентів день народження буде в одному місяці.

Розв'язання. Позначимо через X – множину студентів в групі, а через Y – множину всіх місяців, $|X| = 17$, $|Y| = 12$. Функція f кожному студенту з X ставить у відповідність місяць, в якому він народився. Оскільки $|X| > |Y|$, то знайдеться принаймні один місяць з Y, в якому народилися хоча б 2 студенти.

Справедливе наступне ***узагальнення принципу Діріхле.***

Якщо $|X| > k|Y|$, то функція f прийме деяке своє значення $y \in Y$ принаймні $k+1$ разів.

Доведення. Припустимо супротивне, що функція f кожне своє значення приймає не більше k разів. Тоді $|X| \leq k|Y|$, що суперечить умові $|X| > k|Y|$. Це доводить узагальнений принцип Діріхле.

Приклад 4.5. На факультеті вивчаються 38 студентів. Доведіть, що принаймні у чотирьох з них дні народження відбудуться в одному місяці.

Розв'язання. Позначимо через X – множину студентів факультету, а через Y – множину всіх місяців, $|X| = 38$, $|Y| = 12$. Функція f кожному студенту з X ставить у відповідність місяць, в якому він народився. Оскільки $|X| > 3|Y|$, то знайдеться принаймні один місяць з Y, в якому народилися хоча б 3+1=4 студенти.

Розглянемо більш складний приклад.

Приклад 4.6. Доведіть, що в будь-якій групі з шести осіб знайдуться троє, знайомі один з одним, або навпаки, які зовсім не знають один одного.

Розв'язання. Вилучимо особу a із шістки. Множину решти осіб позначимо через X, $|X| = 5$. Утворимо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } x \textit{ знайомий з } a, \\ 0, & \textit{якщо } x \textit{ не знайомий з } a. \end{cases}$$

Тут функція $f : X \to Y$, $Y = \{0,1\}$. Оскільки $|X| > 2|Y|$, то одне із значень функція f прийме не менше трьох разів. Нехай це буде значення 1. Виходить, що три особи x_1, x_2, x_3 знайомі з a. Якщо x_1, x_2, x_3 не знайомі один з одним, то задачу розв'язано. В супротивному разі, якщо двоє з них знають один одного, наприклад, x_1, x_2, то в наслідок того, що вони знайомі з a, виходить, що x_1, x_2 і a добрі знайомі. Випадок, коли функція f тричі приймає значення 1, розв'язано. Аналогічно досліджується випадок, коли функція f тричі приймає значення 0. Дослідити самостійно.

4.6. Комбінаторика

В попередніх прикладах ми зустрічались з множинами, потужності яких знаходились просто. На практиці досить часто зустрічаються множини, потужності яких не так очевидні.

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчаються методи обчислень потужностей скінченних множин.

Основні принципи розв'язування комбінаторних задач пояснимо на наступних простих прикладах.

Приклад 1. У магазині продаються 4 види конвертів і 5 видів марок. У студента Арсенія грошей вистачає лише на один поштовий виріб. Скількома способами він може здійснити покупку?

Розв'язання. Вибрати один конверт чи одну марку можна $4+5=9$ способами.

Приклад 2. В умовах попереднього прикладу студент Арсеній отримав стипендію і може дозволити собі купити не тільки конверт, але й марку. Скількома способами він може здійснити таку покупку?

Розв’язання. Один конверт можна вибрати чотирма способами, марку – п'ятьма. Оскільки для кожного конверта можна вибрати свою марку, то кількість способів буде $4 \cdot 5 = 20$.

Розглянуті приклади ілюструють два фундаментальних правила комбінаторики.

Принцип додавання. Нехай дві дії взаємно виключають одна одну; причому одну з них можна виконати m способами, а другу – n способами, то будь-яку одну з них можна виконати $m+n$ способами.

Принцип додавання легко узагальнити на довільну скінченну кількість дій.

Принцип множення. Нехай одне за іншим треба виконати k дій. Першу дію можна виконати n_1 способами. Після того, як її виконано, другу дію можна виконати n_2 способами. Після виконання першої та другої дій – третю можна виконати n_3 способами. І так далі. Останню дію можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Розглянемо основні задачі комбінаторики на наступному прикладі.

Приклад 4.7. В магазині продаються 5 найменувань цукерок. Дитині дозволено вибрати 3 цукерки. Скількома способами він їх може вибрати?

Відповідь задачі залежить від того, яким способом вибирати цукерки: цукерки повинні бути різних найменувань, чи не обов'язково? Порядок вибору цукерок має значення чи ні (наприклад, дитина може задумати першу цукерку віддати мамі, другу татові, а третю – собі).

Узагальнивши задачу, дамо наступні означення.

Нехай множина складається з n елементів. Виберемо з неї k елементів. Обрані k елементів називаються $n-k$ ***вибіркою***.

Якщо всі елементи з $n-k$ ***вибірки*** різні, то вибірка називається ***без повторень***, а якщо є однакові елементи, то вибірка називається ***з повтореннями.***

Якщо порядок розташування елементів у вибірці є суттєвим, то вибірка називається ***упорядкованою***, в противному разі – ***неупорядкованою***.

Розміщенням з повтореннями із n елементів по k називається упорядкована $n-k$ вибірка з повтореннями.

Уточнимо формулювання задачі 1. Припустимо, що дитині дозволяється вибирати цукерки які вона хоче (однакові чи різні). Дитина вирішила першу цукерку віддати мамі, другу – татові, а третю – собі.

Розв'язання. Мамі цукерку можна вибрати 5 способами. Після цього татові цукерку теж можна вибрати 5 способами. Після того, як вибрані цукерки для мами і для тата, собі можна вибрати цукерку 5 способами. За принципом множення 3 цукерки можна вибрати

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$$

способами.

Повернемось до загального випадку. Підрахуємо кількість розміщень з повтореннями із n елементів по k. Перший елемент можна вибрати n способами. Після цього другий елемент також можна вибрати n способами, і так далі, останній елемент теж можна вибрати n способами. За принципом множення k елементів можна вибрати

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\ \text{множників}} = n^k$$

способами.

Задачі на розміщення з повтореннями можна розв’язувати за формулою або використовуючи принцип множення.

Розміщенням без повторень або просто ***розміщенням*** з n елементів по k називається упорядкована $n-k$ вибірка без повторень.

В умовах попереднього прикладу припустимо, що дитині дозволяється вибрати 3 цукерки тільки різний найменувань. Тоді першу цукерку можна вибрати 5 способами. Після цього другу цукерку можна вибрати 4 способами. Після того, як вибрані перша та друга цукерки, третю можна вибрати цукерку 3 способами. За принципом множення 3 цукерки можна вибрати

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

способами.

Підрахуємо кількість розміщень без повторень із n елементів по k в загальному випадку. Перший елемент можна вибрати n способами. Після цього другий елемент можна вибрати $n-1$ способом. Після обрання першого та другого елементів третій можна вибрати $n-2$ способами, і так далі, останній елемент можна вибрати $n-k+1$ способами. За принципом множення k елементів можна вибрати

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

способами. Для більш легкого запам'ятання формули її записують так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{4.1}$$

Задачі на розміщення без повторень можна розв'язувати за формулою (4.1) або використовуючи принцип множення.

Окремий випадок розміщення без повторень при $n = k$ називається ***перестановкою.*** Кількість різних перестановок із n елементів знаходиться за формулою

$$P_n = n!$$

Задачі на перестановки також можна розв'язувати за формулою або використовуючи принцип множення.

Приклад. П'ять студентів одночасно прийшли в бібліотеку. Скількома способами вони можуть стати в чергу.

Розв'язання. Перше місце в черзі може бути зайнятим 5 способами. Після того як це місце буде зайнятим, друге місце може бути зайнятим 4 способами. Після того як будуть зайняті перше і друге місця третє місце може бути зайняте 3 способами, і так далі, останнє місце може бути зайняте 1 способом. За принципом множення всі п'ять місць можуть бути зайняті

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

способами.

Сполученням без повторень або просто ***сполученням*** із n елементів по k називається неупорядкована $n-k$ вибірка без повторень.

Повернемось до прикладу 4.7. Скількома способами дитина може вибрати для себе три цукерки різних найменувань?

При цій умові порядок вибору цукерок не має значення. Обрані три цукерки називаються сполученням. Розглянемо одне з таких сполучень:

цукерка 1 найменування, цукерка 2 найменування, цукерка 3 найменування.

Цьому одному сполученню відповідають три розміщення:

цукерка 1 найменування, цукерка 2 найменування, цукерка 3 найменування;
цукерка 1 найменування, цукерка 3 найменування, цукерка 2 найменування;
цукерка 2 найменування, цукерка 1 найменування, цукерка 3 найменування;
цукерка 2 найменування, цукерка 3 найменування, цукерка 1 найменування;
цукерка 3 найменування, цукерка 1 найменування, цукерка 2 найменування;
цукерка 3 найменування, цукерка 2 найменування, цукерка 3 найменування.

Виходить, що кожному сполученню відповідають 6 розміщень. Отже, кількість сполучень в 6=3! разів менша за кількість розміщень.

Кількість розміщень з 5 елементів по 3 ми вже знаходили. Ця кількість дорівнює 60. Отже, кількість сполучень 60:6=10. Значить, 3 різні цукерки з 5 найменувань можна вибрати 10 способами.

Наведені вище міркування справедливі і в загальному випадку. Кількість розміщень з n елементів по k обчислюється за формулою (4.1). Кількість сполучень в $k!$ менша, значить – обчислюється за формулою.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4.2}$$

Цю формулу слід запам'ятати.

Приклад. У бібліотеці 10 книг. Скількома способами можна вибрати 4 книги?

Розв'язання. Порядок вибору книжок не має значення, тому обрані книжки утворюють сполучення. Кількість різних сполучень з 10 елементів по 4 обчислюється за формулою (4.2):

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7\cdot3\cdot10 = 210.$$

Тепер розглянемо більш складний приклад.

В групі 5 дівчат і 7 хлопців. Потрібно скласти команду з 2-х дівчат і 3-х хлопців. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Двох дівчат із п'яти можна обрати $C_5^2 = 10$ способами. Трьох хлопців із семи можна обрати $C_7^3 = 35$ способами. За принципом множення 2-х дівчат і 3-х хлопців можна вибрати

$$C_5^2 \cdot C_7^3 = 10\cdot35 = 350$$

способами.

Сполученням з повтореннями із n елементів по k називається неупорядкована $n-k$ вибірка з повтореннями.

Приклад. В магазині залишилось 3 найменувань цукерок. Дитині дозволили взяти 5 цукерок. Скількома способами він може їх вибрати?

Розв'язання. Порядок вибору цукерок не має значення, тому упорядкуємо їх, наприклад, 1н – цукерки першого найменування, 2н – цукерки другого найменування, 3н – цукерки третього найменування. Припустимо, що дитина вибрала 2 цукерки першого найменування, 2 цукерки другого найменування і одну цукерку третього найменування. Розташуємо цукерки у зазначеному порядку, розділивши цукерки різних найменувань мітками |:

1н	1н	|	2н	2н	|	3н

Ми утворили 7 позицій: для 5 цукерок і 2 міток. Кожному такому сполученню відповідає певне розміщення 2 міток на деяких із 7 позицій, і навпаки, кожному розміщенню міток відповідає певне сполучення. Кількість сполучень з повтореннями із 3 елементів по 5 позначимо $\tilde{C}_3^5$. Ця кількість буде такою скількома способами можна розмістити 2 мітки на 7 позиціях, тобто

$$\tilde{C}_3^5 = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21.$$

Відповідь. 5 цукерок з 3 найменувань можна вибрати 21 способом.

Перейдемо до загального випадку. Упорядкуємо деяким способом n елементів заданої множини. Розглянемо деяке сполучення з повтореннями із k елементів, розташувавши елементи у зазначеному порядку і розділивши різні елементи мітками. Отримаємо конструкцію із $k+n-1$ позицій (k позицій для обраних елементів і $n-1$ позиція для міток). Кількість сполучень з повтореннями із n елементів по k (позначається $\tilde{C}_n^k$) буде такою скількома способами можна розставити $n-1$ мітку на $k+n-1$ місцях:

$$\tilde{C}_n^k = C_{k+n-1}^{n-1},$$

або, що одне й те саме,

$$\tilde{C}_n^k = C_{k+n-1}^{k}.$$

Задача про зайців. Скількома способами можна розмістити m зайців по n клітках так, щоб в першій клітці розмістити m_1 зайців, в другій – m_2 зайців, і так далі, в останній клітці – m_n зайців ($m = m_1 + m_2 + ... + m_n$)?

Розв'язання. В першу клітку m_1 зайців можна розмістити $C_m^{m_1}$ способами. Після цього залишилось $m - m_1$ не розселених зайців. Вибрати серед них m_2 зайців для другої клітки можна $C_{m-m_1}^{m_2}$ способами. Розселивши першу і другу клітки, третю можна розселити $C_{m-m_1-m_2}^{m_3}$ способами. Останню клітку можна розселити одним способом ($C_{m-m_1-m_2-...-m_{n-1}}^{m_n} = C_{m_n}^{m_n} = 1$). За принципом множення всіх зайців по клітках можна розмістити

$$C_m^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} C_{m-m_1-m_2}^{m_3} ... 1$$

способами. Розписавши кожне із сполучень за формулою (4.2)

$$\frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} \frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!} ... \frac{(m-m_1-...-m_{n-1})!}{m_n!(m-m_1-...-m_n)!},$$

отримаємо остаточну формулу

$$\frac{m!}{m_1!m_2!...m_n!}. \tag{4.3}$$

Числа (4.3) застосовуються в алгебрі і називаються мультиплікативними коефіцієнтами або поліноміальними коефіцієнтами.

4.7. Формула бінома Ньютона та її узагальнення

Розкриємо дужки в наступному прикладі

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b).$$

Якщо з кожної дужки взяти a і перемножити, то отримаємо a^4. Якщо з 3-х дужок взяти a, з однієї що залишилась взяти b і перемножити, то отримаємо a^3b. Доданків a^3b буде стільки, скількома способами з 4 дужок можна вибрати одну для b, тобто $C_4^1 = 4$. Взявши з 2-х дужок a і з решти b, отримаємо a^2b^2. Число таких доданків буде C_4^2. Три дужки з 4 для b можна вибрати $C_4^3 = 4$ способами. Нарешті, єдиним способом з кожної дужки можна вибрати b і отримати b^4. Таким чином одержимо відповідь

$$(a+b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + b^4.$$

Узагальнивши викладені міркування на випадок n множників, отримаємо формулу бінома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i,$$

або, що одне й те саме,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}.$$

Коефіцієнти цієї формули можна знаходити за ***трикутником Паскаля:***

$n = 0$: 1
$n = 1$: 1 1
$n = 2$: 1 2 1
$n = 3$: 1 3 3 1
$n = 4$: 1 4 6 4 1
. . . .

Тут у кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч.

Формулу бінома Ньютона можна узагальнити на випадок коли до степеня n підноситься сума m доданків:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^n = \sum_{n_1+...+n_m=n} \frac{n!}{n_1!\mathrm{n}_2!...n_m!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}. \tag{4.4}$$

Права частина формули складається із суми всіляких доданків виду

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \quad \text{де} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m = n.$$

Підрахуємо кількість таких доданків. Ліву частину рівняння (4.4) уявимо собі як добуток n дужок. Із них треба вибрати n_1 дужок, з яких візьмемо a_1, n_2 дужок, з яких візьмемо a_2, і так далі, треба вибрати n_m дужок, з яких візьмемо a_m. Кількість способів вибору цих дужок, а значить і кількість доданків, обчислюється за формулою (4.4) і дорівнює

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!}.$$

Формулу (4.4) доведено.

Приклад. Знайти коефіцієнт при $x^2y^3z^4$ із розкладання $(x+y+z)^9$.

Розв'язання. Шуканий коефіцієнт дорівнює

$$\frac{9!}{2!3!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5\cdot 7\cdot 4\cdot 9 = 1260.$$

Висновок із формули бінома Ньютона. Поклавши у формулу $a=b=1$ дістанемо

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i. \tag{4.5}$$

Нехай множина A складається з n елементів, тобто її потужність дорівнює n: $|A| = n$. Тоді C_n^i можна розуміти як кількість підмножин множини A потужністю i. Сума правої частини рівності (4.5) дорівнює кількості підмножин множини A всіх потужностей.

Множина всіх підмножин множини A називається її ***булеаном*** і позначається 2^A, а кількість підмножин множини A дорівнює $2^{|A|}$.

4.8. Алгебраїчні структури

Алгебраїчні операції та їх властивості.

Означення. Алгебраїчною операцією на множині M називається функція $f\ \ x_1, x_2, \dots, x_n$, яка переводить n елементів множини M в елемент цієї ж множини, тобто $f: M^n \to M$.

Властивість операції декільком елементам множини ставити у відповідність елемент тієї ж самої множини називається її ***замкнутістю***.

Якщо функція f містить лише один аргумент, то операція називається ***унарною***, якщо 2 аргументи, то – ***бінарною***, якщо n аргументів, то – n***-арною***.

Наведемо приклади відомих нам унарних операцій. На множині дійсних чисел унарною операцією є зміна знаку числа, зведення в квадрат. На множині висловлень – заперечення. На множині підмножин деякої множини – доповнення. На множині матриць – множення матриці на число.

Тепер наведемо приклади бінарних операцій. На множині дійсних чисел такими є додавання або добуток чисел. На множині висловлень – диз'юнкція, кон'юнкція. На множині підмножин деякої множини – об'єднання, перетин. На множині квадратних матриць однакового порядку – додавання або добуток матриць.

Якщо множина M скінчена, то бінарну операцію можна задати таблицею, позначивши рядки і стовпці цієї таблиці елементами множини. Кожний елемент цієї таблиці є результатом операції елементів відповідного рядка і відповідного стовпця. Така таблиця називається таблицею Келі.

Приклад 4.8. На множині $M = \quad 0,1,2,3,4$ задамо операцію додавання за модулем 5. Нагадаємо, що результатом цієї операції є решта від ділення звичайної суми відповідних елементів на 5. В таблиці 4.1 представлені результати цієї операції. Таблиця 4.2 є таблицею Келі для операції множення за модулем 5.

Таблиця 4.1

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Таблиця 4.2

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Означення. Бінарна операція $*$ на множині M називається ***асоціативною***, якщо для будь-яких елементів a,b,c із M справджується рівність

$$a*b \quad *c = a* \quad b*c \quad = a*b*c.$$

В наведених вище прикладах всі бінарні операції асоціативні.

Означення. Бінарна операція $*$ на множині M називається ***комутативною***, якщо для будь-яких елементів a і b із M

$$a*b = b*a.$$

В наведених вище прикладах всі бінарні операції, окрім множення матриць, комутативні. Векторне множення двох векторів також не є комутативною операцією, оскільки

$$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}.$$

Означення. Нехай на множині M задано дві бінарні операції: $\circ$ та $*$. Операція $\circ$ називається ***дистрибутивною*** відносно $*$, якщо для будь-яких елементів a,b,c із M

$$a \circ \quad b*c \quad = \quad a \circ b \quad * \quad a \circ c \qquad \text{(дистрибутивність зліва)},$$

$$a * b \;\; \circ c = \;\; a \circ c \;\; * \;\; b \circ c$$ (дистрибутивність справа).

На множині дійсних чисел множення дистрибутивне відносно додавання, але додавання не дистрибутивне відносно множення.

Правильно $\quad a \cdot \;\; b + c \;\; = a \cdot b + a \cdot c$.

Неправильно $\quad a + \;\; b \cdot c \;\; = \;\; a + b \;\; \cdot \;\; a + c$.

На множині висловлень кон'юнкція дистрибутивна відносно диз'юнкції і навпаки, диз'юнкція дистрибутивна відносно кон'юнкції.

Означення. Елемент e із множини M називається ***нейтральним*** відносно операції $*$, якщо $e * a = a * e = a$ для будь-якого $a \in M$.

На множині натуральних чисел відносно операції множення нейтральний елемент $e = 1$.

В прикладі 4.8 відносно операції додавання за модулем 5 нейтральним елементом буде $e = 0$, відносно операції множення за модулем 5 нейтральний елемент $e = 1$.

Означення. Нехай елемент a належить множині M, в якій визначена бінарна операція $*$ та існує нейтральний елемент e. Елемент $a^{-1} \in M$ називається оберненим, якщо $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Для будь-якого числа $a \neq 1$ із множини натуральних чисел відносно операції множення оберненого елемента не існує. Для елементів множини $M = \;\; 0,1,2,3,4$ відносно операції додавання за модулем 5 (приклад 4.8) обернені елементи існують:

$$0^{-1} = 0, \quad 1^{-1} = 4, \quad 2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2, \quad 4^{-1} = 1.$$

Для операції множення за модулем 5:

$$1^{-1} = 1, \quad 2^{-1} = 3, \quad 3^{-1} = 2, \quad 4^{-1} = 4.$$

Елемент 0 оберненого не має.

Ізоморфізм та гомоморфізм

Означення. ***Алгебраїчною структурою*** (або коротко – ***алгеброю***) називається множина M, на якій визначені деякі операції $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$. При цьому множина M називається носієм алгебри. Позначають алгебру так:

$$A = \left\langle M, \varphi_2, \varphi_2, ..., \varphi_n \right\rangle.$$

Наприклад, множина квадратних матриць однакового розміру з операціями додавання та множення буде алгеброю. Множина висловлень з операціями кон'юнкція, диз'юнкція та заперечення буде алгеброю.

Нехай дано дві алгебри

$$A = \left\langle M, \varphi_2, \varphi_2, ..., \varphi_n \right\rangle, \quad B = \left\langle Q, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n \right\rangle, \tag{4.6}$$

Будемо вважати, що $|M| = |Q|$, арності операцій φ_i та ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ співпадають.

Ізоморфізм – це оборотна функція Γ, яка переводить елементи множини M в елементи множини Q, операції φ_i у ψ_i:

$$\Gamma : M \to Q, \quad \Gamma(\varphi_i) = \psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

і задовольняє наступним властивостям. Виконаємо дві послідовності дій.

Перша послідовність. Візьмемо будь-яку операцію φ_k. Припустимо, що вона бінарна, тобто 2 елементи a_i та a_j множини M переводить у третій елемент $\varphi_k(a_i, a_j)$ цієї ж множини (рис. 4.9). Функція Γ останній елемент переводить в елемент $\Gamma(\varphi_k(a_i, a_j))$ множини Q.

Друга послідовність. Обрані елементи a_i та a_j множини M переведемо функцією Γ в елементи $\Gamma(a_i)$ та $\Gamma(a_j)$ множини Q. Ця ж сама функція операцію φ_k переводить у операцію ψ_k: $\psi_k = \Gamma(\varphi_k)$. Застосувавши до елементів $\Gamma(a_i)$ та $\Gamma(a_j)$ операцію ψ_k, отримаємо елемент $\psi_k(\Gamma(a_i), \Gamma(a_j))$ множини Q. Якщо

$$\Gamma(\varphi_k(a_i, a_j)) = \psi_k(\Gamma(a_i), \Gamma(a_j)), \tag{4.7}$$

то алгебри A і B називаються ізоморфними.

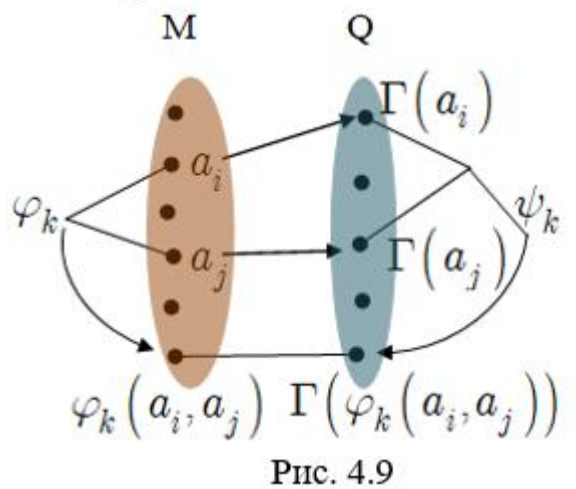


Рис. 4.9

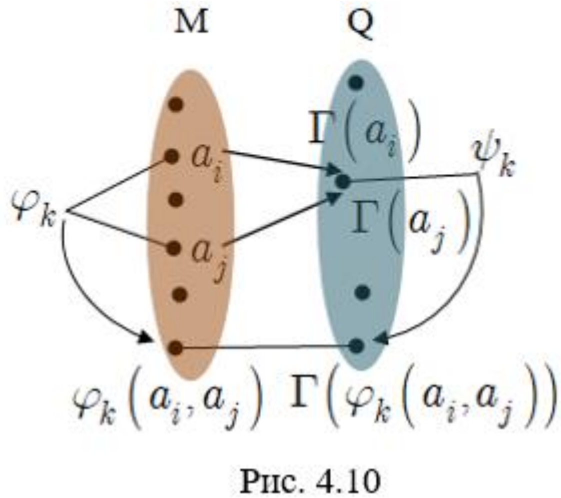


Рис. 4.10

Ми сформулювали означення ізоморфізму у припущенні, що операції φ_k та ψ_k бінарні. В загальному випадку вони можуть бути m-арними. Тому формулу (4.7) потрібно узагальнити. Нехай операція φ_k переводить m

елементів $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$ множини M в елемент $\varphi_k\left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}\right)$ цієї ж множини. Тоді формулу (4.7) потрібно узагальнити так:

$$\Gamma\left(\varphi_k\left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}\right)\right) = \psi_k\left(\Gamma\left(a_{i1}\right), \Gamma\left(a_{i2}\right), ..., \Gamma\left(a_{im}\right)\right). \qquad (4.8)$$

Означення. Дві алгебри (4.6) називаються ізоморфними, якщо існує оборотна функція Γ між елементами множин M і Q та між операціями в цих алгебрах така, що справедлива рівність (4.8).

У якості прикладу ізоморфних алгебр можна навести алгебру висловлень з операціями кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення та алгебру теорії множин з операціями перетин, об'єднання і доповнення.

Гомоморфізм узагальнює ізоморфізм і відрізняється тим, що функція Γ не оборотна. Це означає, що різні елементи a_i та a_j множини M при гомоморфізмі можуть злитися в один елемент $\Gamma(a_i) = \Gamma(a_j)$ множини Q (рис. 4.10).

Прикладом гомоморфізму є географічна карта, в якій міста позначаються точками, а різні райони міста зливаються в точку.

Найпростіші алгебраїчні структури

Спочатку розглянемо алгебраїчну структуру з однією бінарною операцією $\mathrm{A} = \left\langle M, * \right\rangle$.

Означення. Півгрупою називається алгебраїчна структура з однією бінарною асоціативною операцією.

Моноїд – це півгрупа з нейтральним елементом e.

Групою називається моноїд, в якому всі елементи оборотні.

Якщо операція в групі комутативна, то група називається ***комутативною*** або ***абелевою групою*** (на честь норвезького математика Абеля).

Наприклад, множина $M = \ 0,1,2,3,4$ з операцію додавання за модулем 5 є абелевою групою, а з операцією множення за модулем 5 є моноїдом, але не групою бо елемент 0 не має оберненого.

В групі рівняння $a * x = b$ із заданими елементами a і b та невідомим елементом x має єдиний розв'язок. Оскільки елемент a (як і будь-який елемент групи) має обернений a^{-1}, то допишемо його в лівій та правій частинах рівняння зліва

$$a^{-1} * \left(a * x\right) = a^{-1} * b.$$

Користуючись асоціативністю, отримаємо

$$\left(a^{-1} * a\right) * x = a^{-1} * b, \quad e * x = a^{-1} * b, \quad x = a^{-1} * b.$$

Розглянемо тепер алгебраїчну структуру з двома бінарними операціями $\mathrm{A} = \left\langle M, \oplus, \otimes \right\rangle$. Називають ці операції додаванням та множенням відповідно.

Означення. Алгебраїчна структура А називається ***кільцем,*** якщо $\left\langle M, \oplus \right\rangle$ – абелева група, а $\left\langle M, \otimes \right\rangle$ – півгрупа та множення дистрибутивне відносно додавання.

Кільцем є множина квадратних матриць одного порядку з операціями додавання та множення матриць.

Якщо операція множення комутативна, то кільце називається ***комутативним.***

Якщо в кільці є нейтральний елемент відносно множення то воно називається ***кільцем з одиницею.***

В кільці нейтральний елемент відносно додавання позначається 0, а відносно множення – позначається 1.

Означення. Полем називається комутативне кільце з одиницею 1 (що відрізняється від нуля 0), в якому кожний відмінний від 0 елемент має обернений за множенням.

Множина $M = \quad 0,1,2,3,4$ з операціями додавання за модулем 5 та множення за модулем 5 є полем. Це видно з таблиць 4.1 та 4.2.

Наведемо ще приклади полів. Множина дійсних чисел із звичайними операціями додавання і множення є полем. Множина комплексних чисел з операціями додавання і множення також буде полем.

Набір вправ 4.

4.1. Нехай ρ - відношення між множинами $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ задано переліком пар:

$$\rho=\{(1,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}.$$

Крім того, σ відношення між множинами B і $C=\{1,2\}$ складається із пар

$$\sigma=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$

Обчисліть ρ^{-1}, σ^{-1}, $\sigma\circ\rho$. Перевірте справедливість наступної формули:

$$(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}.$$

4.2. Нехай ρ відношення «… батько …», а σ - відношення «… брат …» на множині всіх людей. Опишіть словами наступні відношення ρ^{-1}, σ^{-1}, $\rho\circ\sigma$, $\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$, $\rho\circ\rho$.

4.3. Відношення ρ і σ задані матрицями M і N відповідно, де

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Обчисліть булевий добуток MN. Яке відношення задається цим добутком?

4.4. Відношення ρ на множині A задано матрицею M. Знайдіть матрицю $M^2=M\cdot M$ і за цією матрицею визначте чи буде відношення транзитивним.

$$M=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

4.5. Серед наступних відношень, що задані графічно, знайдіть функцію:

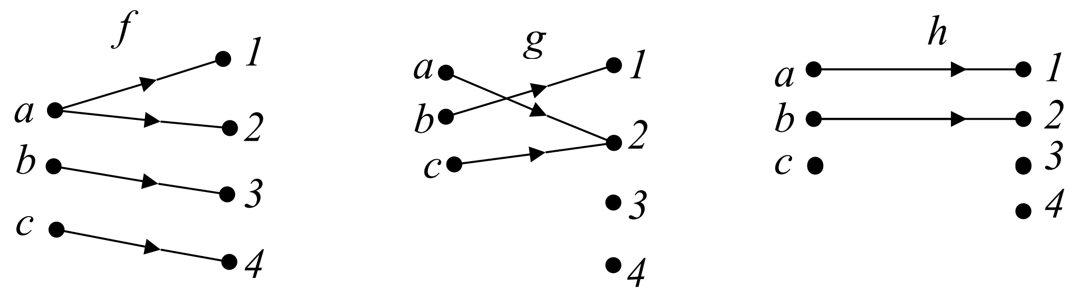


Рис. 1

4.6. Дано множини

$$A=\{0,2,4\},\quad B=\{0,2,4,6\},\quad C=\{0,2,4,6,8\},\quad D=\{1,3,5,7\}.$$

Які з перелічених нижче функцій є ін'єктивними, які сюр'єктивними і які бієктивними?

$$f:A\to D,\quad f=\{(2,1),(4,5),(0,3)\};$$

$$g:B\to D,\quad g=\{(6,3),(2,1),(0,3),(4,3)\};$$

$$h:B\to D,\quad h=\{(2,3),(4,7),(0,1),(6,5)\};$$

$$y:C\to D,\quad y=\{(6,1),(0,3),(4,1),(8,7),(2,5)\}.$$

4.7. Функція $f:A\to B$ задана формулою

$$f(x)=2-\frac{3}{x},$$

де A позначає множину дійсних чисел без 0, а B - множину дійсних чисел без 2. Доведіть, що функція f бієктивна і знайдіть обернену до неї функцію.

4.8. Функції $f:R\to R$ і $g:R\to R$ задані умовою

$$f(x)=3x-2,\quad g(x)=x^2.$$

Знайдіть наступні композиції: $f\circ g,\quad g\circ f,\quad f\circ f,\quad g\circ g$.

4.9. а) Скільки разів потрібно підкинути гральну кістку, щоб яке-небудь число випало принаймні двічі?

б) Скільки разів потрібно підкинути дві гральні кістки, щоб сума чисел, що випали, з'явилась принаймні двічі?

в) В колоді 36 карт. Скільки карт потрібно витягнути, щоб отримати хоча б дві карти однієї масті?

г) В колоді 36 карт. Скільки карт потрібно витягнути, щоб отримати хоча б чотири карти однієї масті?

4.10. У кіоску продаються 4 види конвертів і 5 видів марок. Скількома способами можна вибрати конверт або марку?

4.11. В умовах попередньої задачі скількома способами можна вибрати конверт і марку?

4.12. Шаріков стверджує, що у професора Преображенського 40 пар штанів, 10 піджаків та 20 сорочок. Скільки різних костюмів можна скласти із цього одягу?

4.13. У Еллочки-людожерки 40 суконь, 10 спідниць і 20 блузок. Скільки нарядів вона може скласти з цього одягу?

4.14. Скільки слів можна скласти із букв слова "ВАУ"?

4.15. Скільки слів можна скласти із букв слова "ОГО"?

4.16. В бібліотеку одночасно прийшли 5 студентів. Скількома способами вони можуть стати у чергу?

4.17. В автомашині 5 місць. Скількома способами 5 пасажирів можуть зайняти місця в автомобілі.

4.18. В автомашині 7 місць. Скількома способами 5 пасажирів можуть зайняти місця в автомобілі.

4.19. В автомашині 7 місць. Скількома способами 5 людей можуть зайняти місця в автомобілі, якщо місце водія можуть зайняти лише троє з них.

4.20. В класі 20 учнів. Скількома способами можна обрати старосту, його помічника і фізорга?

4.21. В бібліотеці 5 книг. Скількома способами можна вибрати 3 книги?

4.22. В групі 20 студентів. Трьох із студентів викладач вирішив відпустити із занять, щоб вони покатались у човнику. Скількома способами він це може зробити.

4.23. В групі 20 студентів: 8 юнаків і 12 дівчат. Потрібно скласти комісію із п'яти осіб: 2 юнаків і 3 дівчат. Скількома способами це можна зробити?

4.24. В групі 20 студентів. Скількома способами можна вибрати 2-х студентів для участі в конференції з математики, 3-х – для участі в конференції з фізики і 4-х – з історії України. Всі три конференції проходитимуть одночасно.

4.25. Ліфт у п'ятиповерховому будинку піднімається з трьома пасажирами. Скількома способами вони можуть вийти із ліфта? Скількома способами вони можуть вийти із ліфта, якщо на кожному поверсі не можна виходити більше однієї особи?

4.26. Номер автомобіля складається із 2-х латинських букв (всього 26 букв) і 3-х цифр. Скільки можна скласти різних номерів для автомобілів?

4.27. Дівчина має 6 суконь, 5 юбок і 4 блузки. Скільки різних нарядів вона може скласти із свого одягу?

4.28. В магазині продаються цукерки 3-х найменувань. Скількома способами можна вибрати 5 цукерок?

4.29. Квіткарка продає троянди 4 різних сортів. Скільки різних букетів можна скласти з 5 троянд?

4.30. а) Скільки різних слів можна отримати із букв слова «АБРАКАДАБРА»?

б) Скільки з них починаються з букви «К»?

в) У скількох з них букви «Б» стоять поруч?

4.31. а) Скільки слів можна скласти із букв слова "МАТЕМАТИКА"?

б) Скільки з них починаються з букви К?

в) У скількох словах обидві букви "Т" будуть стояти поруч?

4.32. Знайдіть коефіцієнт при a^5b^2 після розкриття дужок у виразі $\left(a+b\right)^7$.

4.33. Знайдіть коефіцієнт при $a^3b^2c^4$ після розкриття дужок у виразі $\left(a+b+c\right)^9$.

4.34. Знайдіть коефіцієнт при a^4 після розкриття дужок у виразі $(a-1)^8$.

4.35. На множині $M = \ 0,1,2,3$ задано операцію додавання $\oplus$ за модулем 4 та операцію множення $\otimes$ за модулем 4. Нагадаємо, що результатами цих операцій є решта від ділення звичайної суми чи множення відповідних елементів на 4. Складіть таблиці Келі для цих операцій. Перевірте: чи буде підгрупа $\left\langle M, \oplus \right\rangle$ моноїдом, групою, абелевою групою?

Чи буде підгрупа $\left\langle M, \otimes \right\rangle$ моноїдом, групою, абелевою групою?

Чи буде структура $\left\langle M, \oplus, \otimes \right\rangle$ кільцем, полем?

4.36. Завдання **4.35** розв’яжіть для множини $M = \ 0,1,2,3,4,5$, на якій задано операцію додавання $\oplus$ за модулем 6 та операцію множення $\otimes$ за модулем 6.

ВІДПОВІДІ

ВСТУП

0.1. Загальна вага мінімальної мережі дорівнює 420 км.
0.2. Загальна довжина мінімальної мережі дорівнює 14.

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

1.1. a) $P \wedge Q$. **b)** $P \vee Q$. **c)** $\bar{R} \wedge P$. **d)** $(P \wedge Q) \Rightarrow R$. **1.2. a)** $\bar{P} \Rightarrow \bar{Q}$. **b)** $P \vee \bar{Q}$. **c)** $(P \vee Q) \wedge \overline{P \wedge Q}$. **1.3.** a) та c) – тавтології. **1.4. a)** $\forall x P(x)$; **b)** $\exists x : \overline{P(x)}$; **c)** $\bar{\exists} x : P(x)$. **1.5.** Кожна людина висока і товста. Запереченням буде c) знайдеться дехто короткий або худий.

ТЕМА 2. МНОЖИНИ

2.1. (a) Істинне; **(b)** істинне; **(c)** хибне, «творення» належить B і C; **(d)** хибне, «корова» належить B і A. **(e)** Слова, що стоять між словами «кішка» і «собака»; **(f)** всі слова, які не містять подвійну букву. **2.2. (a)** $B \cap C = \{t\}$; **(b)** $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u\}$; **(c)** $\bar{C} = \{q, r, v, w\}$; **(d)** $A \cap B \cap C = \varnothing$; **(e)** $\overline{A \cup B} = \{u, w\}$; **(f)** $B \Delta C = \{r, v, p, s, u\}$; **(g)** $A \cap C = \{p, s\}$; **(h)** $B \setminus C = \{r, v\}$. **2.4.** Діаграму Венна можна зобразити рис. 2.6 або рис. В.2.1.

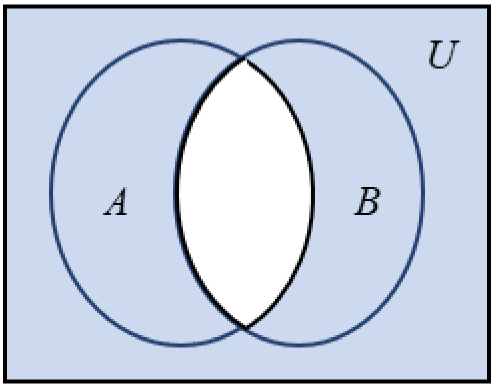


Рис. В.2.1

a) $A * A = \overline{A \cap A} = \bar{A}$; **b)** $(A * A) * (B * B) = \bar{A} * \bar{B} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$; **c)** $(A * B) * (A * B) = \overline{A * B} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. **2.5.** Хоча б один додатковий курс відвідували48 студентів. Тільки туризмом захоплювались 12 студентів.
2.6.
$a = (1,1,0,1,1,0)$, $b = (0,0,1,0,1,0)$, $\bar{b} = (1,1,0,1,0,1)$, $\bar{a} = (0,0,1,0,0,1)$, $a \vee \bar{b} = (1,1,0,1,1,1)$, тому $A \cup \bar{B} = \{1,2,4,5,6\}$. Для знаходження

характеристичного вектора $a+b$ множини $A \triangle B$ скористаємось формулою $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$. Будемо мати $a \wedge \overline{b} = (1,1,0,1,0,0)$, $b \wedge \overline{a} = (0,0,1,0,0,0)$, $a+b = (a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a}) = (1,1,1,1,0,0)$. Звідки $A \triangle B = \{1,2,3,4\}$. **2.7.** $A \times B = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(5,3),(5,5)\}$.

ТЕМА 3. ВІДНОШЕННЯ

3.1. $\{(1,a),(1,c),(2,a),(2,c),(3,b),(3,c)\}$. Орієнтовний граф зображено на рис. В.3.1. **3.2.** $\rho = \{(1,7),(2,5),(3,3),(4,1)\}$. **3.3.** **а)** $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$; **б)** у графічній формі на рис. В.3.2; **в)** у вигляді матриці M,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

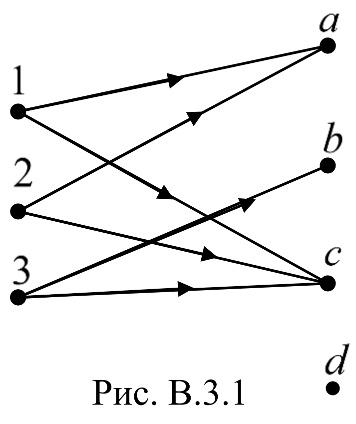


Рис. В.3.1

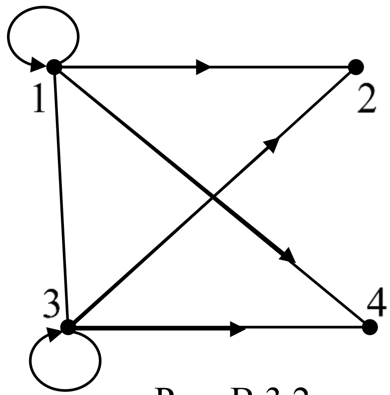


Рис. В.3.2

3.4. **А)** рефлексивне, симетричне, транзитивне; **Б)** транзитивне; **В)** симетричне; **Г)** рефлексивне, кососиметричне, транзитивне. **3.5.** **А)** «*x* старше на декілька років, ніж *y*»; **Б)** відношення транзитивне; **В)** «х є нащадком у по жіночій лінії». **3.6.** Замикання за рефлексивність $\rho_r = \rho \cup \{(d,d)\}$, за симетричністю $\rho_s = \rho \cup \{(d,b)\}$, за транзитивністю $\rho_{tr} = \rho \cup \{(b,a),(c,d),(d,c),(d,d),(b,c)\}$. **3.7.** **А)** Кожному блоку (класу еквівалентності) відносяться книги, що написані однією мовою; **Б)** відношення ρ розбиває множину цілих чисел на дві підмножини: до першої підмножини відносяться парні числа, до другої – непарні; **В)** відношення ρ розбиває множину всіх людей на дві підмножини: до першої підмножини відносяться люди чоловічої статі, до другої – жіночої статі. **3.8.** Відношення ρ розбиває множину цілих чисел на дві підмножини: до першої підмножини відносяться числа, які діляться на 3, до другої – які не діляться на 3. **3.9. А)** Діаграма Хассе зображена на рис. В.3.3; **Б)** Діаграма Хассе зображена на рис. В.3.4.

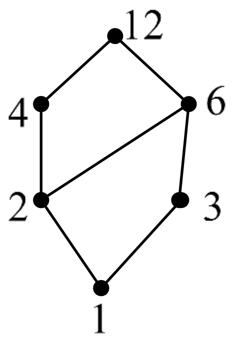


Рис. В.3.3

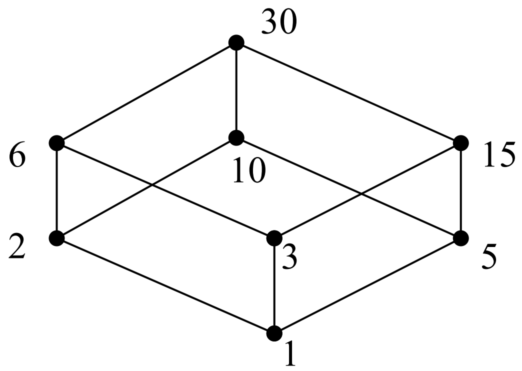


Рис. В.3.4

3.10. $\rho=\{(a,b),(a,c),(b,c),(e,d),(d,c),(d,h),(f,d)\}$. Мінімальні елементи a,e,f,g. Максимальні елементи c,h,g.

ТЕМА 4. ФУНКЦІЇ. КОМБІНАТОРИКА. АЛГЕБРИ

4.1. $\rho^{-1}=\{(1,1),(3,2),(4,2),(1,3),(4,3)\}$,
$\sigma^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,4)\}$,
$\sigma\circ\rho=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$,
$(\sigma\circ\rho)^{-1}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,3),(2,3)\}$. Формула справджується.
4.2. ρ^{-1} – дитина, σ^{-1} – брат або сестра, $\rho\circ\sigma$ – дядько, $\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$ – племінник або племінниця, $\rho\circ\rho$ – дід. **4.3.** Матриця MN задає відношення $\sigma\circ\rho$:

$$MN=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

4.4. Відношення не транзитивне, хоча б тому що в першому рядку і в першому стовпці матриці M^2 стоїть одиниця, а в матриці M на цьому місті стоїть нуль:

$$M^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

4.5. Тільки відношення g є функцією. **4.6.** f − ін’єктивна; g − не ін’єктивна і не сюр’єктивна; h − ін’єктивна, сюр’єктивна, бієктивна; y − сюр’єктивна. **4.7.**

$$x=\frac{3}{2-y}.$$

4.8. $(f\circ g)(x)=3x^2-2$, $(g\circ f)(x)=(3x-2)^2$, $(f\circ f)(x)=3x-8$, $(g\circ g)(x)=x^4$. **49. а)** сім разів; **б)** 12 разів; **в)** 5 карт; **г)** 13 карт. **4.16.** 120. **4.17.** 120. **4.18.** 2520. **4.19.** 1080. **4.20.** 6840. **4.21.** 10. **4.22.** 1140. **4.23.** 12320. **4.24.** 176358000. **4.25.** Троє пасажирів можуть вийти із ліфта 64 способами. Якщо на кожному поверсі не можна виходити більше однієї особи, то – 24 способами. **4.26.** 676000. **4.27.** 26. **4.28.** 21. **4.29.** 56. **4.30. а)** 83160. **б)** 15120. **в)** 15120. **4.31. а)** 151200. **б)** 15120. **в)** 30240. **4.32.** 21. **4.33.** 1260. **4.34.** 70. **4.35.** $\langle M,\oplus\rangle$ − абелева група. $\langle M,\otimes\rangle$ − моноїд. $\langle M,\oplus,\otimes\rangle$ − поле. **4.36.** $\langle M,\oplus\rangle$ − абелева група. $\langle M,\otimes\rangle$ − моноїд. $\langle M,\oplus,\otimes\rangle$ − комутативне кільце з одиницею, що відрізняється від нуля.

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. Підручник. – Харків, Компанія СМІТ, 2004. – 480 с. https://bit.ly/3VRF1BC

2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К., 2022. – 287 с. https://bit.ly/45WqAAK

3. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. Підручник. – К., 2002. – 580 с. https://bit.ly/3Lcnejp

Допоміжна

1. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник /– Київ : Київський університет, 2017. https://bit.ly/3zrX8X0

2. Johnsonbaugh, R. (2001) Discrete Mathematics, 5th edn, New Jersey: Prentice Hall. https://bit.ly/4eTmKML

3. Gersting, J. L. (1999) Mathematical Structures for Computer Science, 4th edn, San Francisco: W. H. Freeman. https://bit.ly/4cSgXp8

4. Rosen, K. H. (1998) Discrete Mathematics and Its Applications, New York: M Graw-Hill. https://bit.ly/3WmRoXT

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

А

Абелева група, 52
Алгебраїчні операції, 48
Алгебраїчні структури, 48
Асоціативна операція, 49
Асоціативні закони, 18

В

Вибірка, 43
Висловлення, 7
Відношення, 26
Відношення еквівалентності, 29
Відношення часткового порядку, 31

Г

Гомоморфізм, 52
Група, 52

Д

Диз'юнкція, 8
Дискретна математика, 4
Дистрибутивна операція, 49
Дистрибутивні закони, 18
Доповнення множин, 16

Е

Еквіваленція, 9

З

Задача про зайців, 46
Закони алгебри множин, 18
Закони де Моргана, 18
Закони доповнення, 18
Закони ідемпотентност, 18
Замикання відношення, 29
Заперечення, 8

І

Ізоморфізм, 50
Імплікація, 8
Іррефлексивне відношення, 28

К

Квантор загальності, 10
Квантор існування, 10
Кільце, 53
Комбінаторика, 42
Композиція відношення, 35
Композиція функцій, 40
Комутативна операція, 49
Комутативні закони, 18
Кон'юнкція, 8
Кососиметричне відношення, 28

М

Математична логіка, 7
Математичне модулювання, 4
Матриці відношень, 28
Метод математичної індукці, 11
Множини, 15
Моноїд, 52

Н

Нейтральний елемент, 50

О

Обернене відношення, 35
Обернений елемент, 50
Обернені функції, 38
Об'єднання, 16

П

Перестановка, 44
Перетин, 16
Півгрупа, 52
Поле, 53
Потужність множини, 20
Предикат, 10
Принцип Діріхле, 41
Принцип додавання, 42
Принцип множення, 43
Прямий добуток множин, 22

Р

Рефлексивне відношення, 28
Різниця множин, 16
Розміщення, 43

С

Симетрична різниця двох множин, 17
Симетричне відношення, 28
Сполучення, 44

Т

Транзитивне відношення, 28

Ф

Формула бінома Ньютона, 47
Формули включень та виключень, 20
Функції, 37

Х

Характеристичні вектори, 23

ОНМУ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
Частина 1

Навчальний посібник

Одеса — 2026