

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С.О. Кирилов, Л.І. Кусік, С.Б. Сиваш, Г.В. Соколовська

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Частина 2)

**Підручник для студентів
вищих навчальних закладів**

Одеса – 2025

Автори: С.О. Кирилов, Л.І. Кусік, С.Б. Сиваш, Г.В. Соколовська

Рецензенти: В.М. Євтухов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова
О.М. Станжицький – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної математики Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка

*Рекомендовано вченою радою Одеського національного морського університету,
протокол №8 від 26 березня 2025 року.*

Вища математика (Частина 2). Підручник для студентів вищих навчальних закладів/ Кирилов С.О., Кусік Л.І., Сиваш С.Б., Соколовська Г.В. Одеса: ОНМУ, 2025. 186с.

Підручник призначено для здобувачів вищої освіти за освітньо-професійними програмами: «Комп'ютерні науки» за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки; «Системний аналіз інфраструктури морського транспорту» за спеціальністю 124 Системний аналіз; «Експлуатація портового перевантажувального обладнання» за спеціальністю 133 Галузеве машинобудування; «Суднобудування» за спеціальністю 135 Суднобудування; «Експлуатація суднового електрообладнання і засобів автоматики» за спеціальністю 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; «Суднові енергетичні установки (проекування, виробництво, ремонт і експлуатація)» за спеціальністю 142 Енергетичне машинобудування; «Будівництво та цивільна інженерія» за спеціальністю 192 Будівництво та цивільна інженерія; «Гідротехнічне будівництво» за спеціальністю 194 Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології; «Судноводіння» за спеціальністю 271 Морський та внутрішній водний транспорт; «Експлуатація суднових енергетичних установок» за спеціальністю 271 Морський та внутрішній водний транспорт; «Експлуатація суднового електрообладнання і засобів автоматики» за спеціальністю 271 Морський та внутрішній водний транспорт; «Організація перевезень та управління на транспорті» за спеціальністю 275 Транспортні технології (на морському та річковому транспорті).

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ 1 Інтегральне числення функції однієї змінної	
1.1. Первісна. Невизначений інтеграл	6
1.2. Метод заміни змінної (підстановки) у невизначеному інтегралі	8
1.3. Інтегрування виразів, що містять квадратичну функцію у знаменнику ...	10
1.4. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі	12
1.5. Інтегрування раціональних функцій	14
1.6. Інтегрування деяких ірраціональних виразів	19
1.7. Інтегрування деяких тригонометричних виразів	20
1.8. Означення та властивості визначеного інтеграла	24
1.9. Інтеграл зі змінною верхньою межею	28
1.10. Формула Ньютона – Лейбніца	29
1.11. Заміна змінної у визначеному інтегралі	30
1.12. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі	31
1.13. Невластивий інтеграл по нескінченному проміжку (невластивий інтеграл I роду)	32
1.14. Невластивий інтеграл від необмеженої функції (невластивий інтеграл II роду)	36
1.15. Застосування визначеного інтеграла	40
1.16. Наближене обчислення визначених інтегралів	53
Розділ 2 Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії поля	
2.1. Міра множини. Інтеграл по мірі множини	57
2.2. Криволінійний інтеграл по довжині дуги	58
2.3. Криволінійний інтеграл по координатах.	61
2.4. Подвійний інтеграл	64
2.5. Застосування подвійного інтеграла	73
2.6. Формула Гріна	78
2.7. Незалежність криволінійного інтегралу по координатах від шляху інтегрування	80
2.8. Потрійний інтеграл	82
2.9. Застосування потрійного інтеграла	90
2.10. Поверхневий інтеграл першого роду	94

2.11. Елементи теорії поля.....	98
Розділ 3. Звичайні диференціальні рівняння	
3.1. Поняття про диференціальні рівняння.....	109
3.2. Диференціальні рівняння першого порядку.....	112
3.3. Диференціальні рівняння другого порядку. Рівняння, що допускають зниження порядку.....	124
3.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.....	128
3.5. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	139
Розділ 4 Числові та функціональні ряди	
4.1. Поняття про збіжність і суму числового ряду.....	142
4.2. Ознаки збіжності рядів з додатними членами.....	148
4.3. Знакозмінні числові ряди. Абсолютна і умовна збіжність числового ряду	158
4.4. Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду.....	162
4.5. Ряди Тейлора.....	171
Предметний покажчик.....	185

Передмова

Сучасна математика об'єктивно відображає універсальні закони оточуючого світу та інтенсивно проникає в усі сфери діяльності людини. Знання, отримані студентами в результаті вивчення математики, відіграють визначну роль в процесі їх навчання в університеті. Вони необхідні для успішного засвоєння загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін в області техніки, економіки, інформаційних технологій. Метою вивчення вищої математики є формування у студентів вміння логічно мислити, аналізувати і складати найпростіші моделі реальних процесів, використовувати математичні методи в інженерних розрахунках та при розв'язуванні прикладних задач.

Підручник «Вища математика. Частина 2» узагальнює досвід багаторічного викладання вищої математики колективом кафедри «Математика, фізика та астрономія» Одеського національного морського університету. Зміст підручника «Вища математика. Частина 2» охоплює наступні розділи вищої математики:

- невизначений інтеграл, визначений інтеграл і його застосування;
- криволінійні, кратні та поверхневі інтеграли;
- звичайні диференціальні рівняння;
- числові та функціональні ряди.

Автори, кандидати фізико-математичних наук, доценти С.О. Кирилов, Л.І. Кусік, С.Б. Сиваш та старший викладач Г.В. Соколовська систематизували відповідний теоретичний матеріал. Теоретичні викладки доповнені ретельно підібраними прикладами. Матеріал, що поданий у підручнику, супроводжується рисунками, які сприяють більш глибокому розумінню його змісту. Застосування відповідних математичних понять проілюстровано численними задачами з практичним змістом, що наочно демонструє студентам потужність математичних методів, як знаряддя для дослідження різноманітних питань у їх майбутній професійній діяльності. Для кращого засвоєння теоретичних знань здобувачам вищої освіти пропонуються завдання для самостійної роботи.

Даний підручник може бути корисним не тільки студентам, а також молодим науковцям та інженерам.

Розділ 1

Інтегральне числення функції однієї змінної

1.1. Первісна. Невизначений інтеграл

Означення. Функцію $y = F(x)$ називають первісною функції $y = f(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо для будь-якого x з цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$, тобто $y = f(x)$ є похідною від $y = F(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = 3x^2$ є первісною функції $f(x) = 6x$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Дійсно, $F'(x) = (3x^2)' = 6x = f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Зауважимо: якщо функція $y = F(x)$ – первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $(a; b)$, то будь-яка функція виду $y = F(x) + C$, C – довільна стала, також є первісною функції $y = f(x)$ на цьому проміжку. Доведемо, що у такому вигляді може бути подана будь-яка первісна функції $y = f(x)$ на $(a; b)$.

Теорема 1.1. Якщо функції $y = F(x)$ та $y = \Phi(x)$ – дві первісні функції $y = f(x)$ на проміжку $(a; b)$, то $F(x) - \Phi(x) = C$, C – стала.

Доведення. Розглянемо функцію $R(x) = F(x) - \Phi(x)$. Як бачимо, $R'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in (a; b)$. Доведемо, що функція $R(x)$ є сталою при $x \in (a; b)$. Зафіксуємо значення $x_0 \in (a; b)$. На проміжку $(a; b)$ функція $y = R(x)$ диференційована, тому за теоремою Лагранжа маємо: для будь-якого $x \in (a; b)$ існує таке число c (з інтервалу між x та x_0), що виконується рівність $R(x) - R(x_0) = R'(c) \cdot (x - x_0) = 0 \cdot (x - x_0) = 0$. Отже, $R(x) = R(x_0)$ для будь-якого $x \in (a; b)$. Тоді $R(x)$ є сталою на цьому проміжку.

Таким чином, якщо $y = F(x)$ – яка-небудь первісна функції $y = f(x)$, то сукупність усіх її первісних можна подати у вигляді $y = F(x) + C$ (C – довільна стала).

Означення. Невизначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ називають сукупність всіх її первісних. Пишуть

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.1)$$

Тут $y = F(x)$ – яка-небудь первісна функції $y = f(x)$, C – довільна стала.

При цьому x називають змінною інтегрування, функцію $y = f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, $k - const$;
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Властивості невизначеного інтеграла безпосередньо впливають з його означення.

Основні формули інтегрування

- 1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;
- 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $0 < a \neq 1$;
- 4) $\int e^x dx = e^x + C$;
- 4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- 5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
- 7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- 8) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;
- 9) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$;
- 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$, $a \neq 0$;
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$, $a > 0$.

Можна довести будь-яку з цих формул, продиференціювавши праву частину та впевнившись у тому, що похідна дорівнює підінтегральній функції.

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \frac{3dx}{8x^2 + 16} = \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$.
2. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C$.

$$\begin{aligned}
3. \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)^2}{x} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 4}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} dx - 4 \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} dx + 4 \int \frac{dx}{x} = \\
&= \int x^{-\frac{1}{3}} dx - 4 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + 4 \int \frac{dx}{x} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - 12x^{\frac{1}{3}} + 4 \ln|x| + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 12\sqrt[3]{x} + 4 \ln|x| + C.
\end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} dx;$

2. $\int \left(8 - \frac{5}{\sin^3 x} \right) \sin x dx;$

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$ (застосуйте основну тригонометричну тотожність);
 $\left(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \text{ для перетворення чисельника} \right);$

4. $\int x(3\sqrt{x} - 2)^2 dx;$

5. $\int 3^x \left(e^x + \frac{3^{-x}}{x^2 - 9} \right) dx;$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 15}}.$

1.2. Метод заміни змінної (підстановки) у невизначеному інтегралі

Теорема 1.2. Будь-яка формула інтегрування залишається правильною і в тому випадку, якщо в ній замінити змінну інтегрування на якусь диференційовану функцію.

Доведення. Нехай рівність $\int f(x) dx = F(x) + C$ (C – довільна стала) справедлива на проміжку $(a; b)$. Замінімо x на $u(t)$, де $u(t)$ – функція, диференційована при тих значеннях t , при яких $u(t) \in (a; b)$. Доведемо, що $\int f(u(t)) d(u(t)) = F(u(t)) + C$, або $\int f(u(t)) u'(t) dt = F(u(t)) + C$. Продиференціюємо праву частину по t й одержимо підінтегральну функцію: $(F(u(t)) + C)' = F'_u(u(t)) \cdot u'(t) = f(u(t)) \cdot u'(t)$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що при інтегруванні іноді більш доцільно використовувати заміну змінної не у вигляді $x = u(t)$, а у вигляді $t = v(x)$.

Приклади.

$$1. \int x^2 \sin(2x^3 - 1) dx = \int \sin(2x^3 - 1) \cdot x^2 dx = \left[\begin{array}{l} t = 2x^3 - 1; \\ dt = d(2x^3 - 1) = 6x^2 dx; \\ x^2 dx = \frac{1}{6} dt \end{array} \right] =$$
$$= \int \frac{1}{6} \sin t dt = -\frac{1}{6} \cos t + C = -\frac{1}{6} \cos(2x^3 - 1) + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C =$$
$$= \arcsin(\operatorname{tg} x) + C.$$

Зауваження. Замість функції $v(x)$ нову змінну t можна не писати. Такий спосіб оформлення підстановки називають підведенням під знак диференціала.

$$3. \int \cos x e^{\sin x} dx = [\cos x dx = d(\sin x)] = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Розглянемо деякі застосування теореми 1.2.

I. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Тоді

$$\int f(ax + b) dx = [d(ax + b) = a dx] = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \text{ Отже,}$$
$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \quad (1.2)$$

Приклади.

$$1. \int \cos \frac{x}{8} dx = 8 \sin \frac{x}{8} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^4}} = \int (2x+3)^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{1}{2} (2x+3)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-3) + C = \frac{-3}{2 \cdot \sqrt[3]{2x+3}} + C.$$

II. Якщо підінтегральна функція є часткою похідної деякої функції $\varphi(x)$ та самої цієї функції, то після заміни $t = \varphi(x)$ ($dt = \varphi'(x) dx$) інтеграл зводиться до

$\int \frac{dt}{t}$, отже

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C. \quad (1.3)$$

Так само, як у випадку лінійної заміни, тепер для обчислення таких інтегралів можна користуватися готовою формулою:

$$\int \frac{2^x dx}{2^x + 7} = \left[(2^x + 7)' = 2^x \ln 2 \right] = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{(2^x + 7)' dx}{2^x + 7} = \ln |2^x + 7| + C.$$

III. Застосувавши ту ж саму заміну $t = \varphi(x)$, одержимо ще одну корисну формулу:

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + C. \quad (1.4)$$

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$;

2. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)}$;

3. $\int \frac{x+3}{x^2-16} dx$;

4. $\int \operatorname{tg} x dx$;

5. $\int 5^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$;

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 8}}$;

7. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x - 1}$;

8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 4}}$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$;

10. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{9-9^x}}$;

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\lg^2 x + 7}}$.

1.3. Інтегрування виразів, що містять квадратичну функцію у знаменнику

I. Для обчислення інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a, b, c - \text{const's}, a \neq 0)$$

квадратичну функцію доповнюють до повного квадрату двочлена, після чого підводять цей двочлен під знак диференціала (або застосовують формулу (1.2)).

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x-2) + C.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 + 2x - 1,25)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-((x+1)^2 - 2,25)}} =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{2,25 - (x+1)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2(x+1)}{3} + C.$$

II. Щоб обчислити інтеграли виду $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$,
 $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($A, B, a, b, c - \text{const's}, A \neq 0, a \neq 0$), спочатку слід підвести під знак
 диференціалу квадратичну функцію, тобто скористатися формулою 1.3 або 1.4,
 після чого знайти отриманий табличний інтеграл або інтеграл з попереднього пу-
 нкту.

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{(7x+5)dx}{\sqrt{x^2-9}} &= \left[(x^2-9)' = 2x \right] = \frac{7}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2-9}} + \int \frac{5dx}{\sqrt{x^2-9}} = \\ &= 7\sqrt{9-x^2} + 5 \ln \left| x + \sqrt{x^2-9} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+5} &= \left[(x^2+6x+5)' = 2x+6 \right] = \frac{3}{2} \int \frac{\left(2x-\frac{4}{3}\right)dx}{x^2+6x+5} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{\left(2x+6-6-\frac{4}{3}\right)dx}{x^2+6x+5} = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)dx}{x^2+6x+5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{22}{3} \int \frac{dx}{(x+3)^2-4} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2+6x+5| - \frac{11}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x+5} \right| + C. \end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{x^2-3x+1}{x^2+9} dx;$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2-6x};$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}};$$

$$4. \int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}};$$

$$5. \int \frac{(5-7x)dx}{x^2-4x+13}.$$

1.4. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

Теорема 1.3. Для будь-яких двох диференційованих на проміжку $(a; b)$ функцій $u(x)$ та $v(x)$ на цьому проміжку справедлива рівність

$$\int u dv = uv - \int v du . \quad (1.5)$$

Доведення. За однією з властивостей диференціалу маємо:

$$d(uv) = vdu + u dv \text{ або } u dv = d(uv) - vdu .$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності. Одержимо: $\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$, що і треба було довести.

Розглянемо деякі типи функцій, що інтегрують частинами.

I. В інтегралах виду $\int P_n(x) \cos(kx + b) dx$, $\int P_n(x) \sin(kx + b) dx$, $\int \frac{Ax + B}{\cos^2(kx + b)} dx$, $\int \frac{Ax + B}{\sin^2(kx + b)} dx$, $\int P_n(x) a^{kx+b} dx$, де $A, B, k, b, a - \text{const's}$, $0 < a \neq 1$, $P_n(x)$ – многочлен степеня n , функцією u слід вважати многочлен.

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int (2x - 1) \cos 3x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x - 1; \quad du = 2dx; \\ dv = \cos 3x dx; \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \frac{2x - 1}{3} \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x dx = \frac{2x - 1}{3} \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C .$$

2. $\int (x^2 + 3x - 1) 3^{2x} dx$. Після першого застосування формули інтегрування частинами степінь многочлена буде знижено на один, отже, знадобиться повторне інтегрування частинами, щоб позбутися многочлена під знаком інтеграла.

$$\int (x^2 + 3x - 1) 3^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 3x - 1; \quad du = (2x + 3) dx; \\ dv = 3^{2x} dx; \quad v = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} \end{array} \right] =$$

$$= (x^2 + 3x - 1) \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 3} \int (2x + 3) 3^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x + 3; \quad du = 2 dx; \\ dv = 3^{2x} dx; \quad v = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} \end{array} \right] =$$

$$= (x^2 + 3x - 1) \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 3} \left((2x + 3) \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{2}{2 \ln 3} \int 3^{2x} dx \right) =$$

$$= (x^2 + 3x - 1) \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - (2x + 3) \frac{3^{2x}}{4 \ln^2 3} + \frac{3^{2x}}{4 \ln^3 3} + C.$$

$$3. \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad v = \operatorname{tg} x \end{array} \right] = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

II. Якщо підінтегральна функція є добутком степеневі функції або многочлена та логарифмічної або оберненої тригонометричної функції, то через u позначають логарифмічну або обернену тригонометричну функцію.

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

$$4. \int \frac{\ln x dx}{x^2} = \left[\begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x}; \\ dv = \frac{dx}{x^2}; \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right] = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

$$5. \int \arcsin 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin 2x; \quad du = \frac{2 dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \\ dv = dx; \quad v = x \end{array} \right] = x \arcsin 2x -$$

$$- \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = x \arcsin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{(1-4x^2)'}{\sqrt{1-4x^2}} dx = x \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C.$$

III. Після застосування формули інтегрування частинами іноді виникає лінійне рівняння відносно невідомого інтеграла, зокрема в інтегралах

$\int a^x \cos(kx + b) dx$, $\int a^x \sin(kx + b) dx$, $\int \cos \ln x dx$, $\int \sin \ln x dx$ та інших.

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

$$6. \int e^{2x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right] = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right] = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x dx.$$

Оскільки многочлен безпосередньо інтегрується, то для інтегрування раціональної функції залишається розробити алгоритм інтегрування її дробової частини – правильного дробу.

Відомо, що будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на множники, що є многочленами першого та другого степеня. При цьому квадратичні множники мають від'ємний дискримінант. Адже, якби серед них були многочлени $ax^2 + bx + c$ з дійсними коренями x_1, x_2 , то ми б розклали їх на лінійні множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Тоді у розкладанні знаменника правильного раціонального дробу матимемо лише множники виду $(x + a)$, $(x + a)^n$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $a, p, q \in \mathbb{R}$, $D = p^2 - 4q < 0$.

Означення. Раціональні дроби виду $\frac{A}{x+a}$, $\frac{A}{(x+a)^n}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $a, p, q \in \mathbb{R}$, $D = p^2 - 4q < 0$, називають *простими (або елементарними) дробами*.

Зауважимо, що методи інтегрування дробів $\frac{A}{x+a}$, $\frac{A}{(x+a)^n}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ розглянуто вище. Розглянемо тепер $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx &= \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + \frac{p}{2}; \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{At + B - \frac{Ap}{2}}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} dt = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2tdt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} = \frac{A}{2} \int \frac{d\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} = -\frac{A}{2(n-1)\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $q - \frac{p^2}{4} = \frac{4q - p^2}{4} > 0$, і позначимо це число через m^2 . Введемо

рекурентну формулу, за допомогою якої у інтегралі $\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$ степінь n

знижується на 1. Введемо позначення: $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$ і розглянемо I_{n-1} :

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}} = \left[\begin{array}{l} u = \frac{1}{(t^2 + m^2)^{n-1}}; \quad du = -\frac{2(n-1)t}{(t^2 + m^2)^n}; \\ dv = dt; \quad v = t \end{array} \right] = \frac{t}{(t^2 + m^2)^{n-1}} +$$

$$+ 2(n-1) \int \frac{t^2 + m^2 - m^2}{(t^2 + m^2)^n} dt = \frac{t}{(t^2 + m^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)m^2 I_n.$$

З отриманого рівняння маємо:

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)m^2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)m^2(t^2 + m^2)^{n-1}}.$$

Застосовуючи цю формулу, можна поступово перейти від інтегралу

$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$ до табличного інтегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2}$. Отже, тепер ми мо-

жемо інтегрувати усі прості дроби.

Можна довести, що будь-який правильний раціональний дріб може бути представлений у вигляді суми простих дроби. При цьому кожному множнику

$(x + a)$ у розкладанні знаменника відповідає простий дріб виду $\frac{A}{x + a}$; кожному

множнику $(x + a)^n$ відповідає n простих дроби: $\frac{A_1}{x + a}, \frac{A_2}{(x + a)^2}, \dots, \frac{A_n}{(x + a)^n}$; ко-

жному множнику $x^2 + px + q$ відповідає простий дріб виду $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$; кож-

ному множнику $(x^2 + px + q)^n$ відповідає n простих дроби: $\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q},$

$\frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2}, \dots, \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + px + q)^n}$. Коефіцієнти чисельників цих дроби спочатку

не визначені, але їх можна буде знайти з умови тотожної рівності раціонального дроби та суми відповідних простих дроби. Отже, інтеграл від раціональної функції завжди можна виразити через елементарні функції.

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

1. $\int \frac{4x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$. Розкладемо підінтегральну функцію на прості

доби:
$$\frac{4x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Ми отримали тотожну рівність двох раціональних дробів з однаковими знаменниками, яка є правильною лише в тому випадку, якщо тотожно рівні многочлени у чисельниках дробів.

$$A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1) = 4x^2 + 5x + 3, \quad (1.6)$$

або

$$Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx^2 - C = 4x^2 + 5x + 3. \quad (1.7)$$

Прирівняємо тепер коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівності (1.7):

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B + C = 4; \\ x & 3A + B = 5; \\ x^0 & 2A - 2B - C = 3. \end{array}$$

Розв'яжемо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

Додаємо перше рівняння до третього, одержимо систему:
$$\begin{cases} A + B + C = 4; \\ 3A + B = 5; \\ 3A - B = 7. \end{cases}$$

Тепер друге рівняння потрібно додати до третього. Маємо:
$$\begin{cases} A + B + C = 4; \\ 3A + B = 5; \\ 6A = 12. \end{cases}$$

Звідки $A=2, B=-1, C=3$. Отже, $\frac{4x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$. Тоді

$$\int \frac{4x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx =$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{x+2} = 2 \ln|x-1| - \ln|x+1| + 3 \ln|x+2| + C.$$

Зауваження. Невизначені коефіцієнти простих дробів можна було знайти простіше. Якщо у рівність (1.6) замість x підставити 1, то одержимо: $6A=12, A=2$. Тепер замість x підставимо -1 , маємо: $-2B=2, B=-1$. Надавши x значення -2 , отримаємо: $3C=9, C=3$. Такий спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів, коли у рівність чисельників підставляють нулі знаменника раціонального дробу, називають методом підстановки.

Приклади. Знайдіть невизначені інтеграли

$$2. \int \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} &= \frac{5x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} = \frac{5x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}. \end{aligned}$$

У рівність чисельників $A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 5x^2 - 4x + 1$ підставимо замість x по черзі 0 та 1 (це всі нулі знаменника). Одержимо $A=1, C=2$. Методом підстановки не вдалося знайти коефіцієнт B , проте, розкривши дужки у рівності чисельників та прирівнявши коефіцієнти лише при x^2 або при x , можна виразити невідомий коефіцієнт через відомі.

$$x^2 \mid A + B = 5; \quad B = 5 - A = 5 - 1 = 4.$$

Отже,

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{dx}{x} + 4 \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| + 4 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C.$$

$$3. \int \frac{x+4}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx.$$

Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 5$ у знаменнику не має дійсних коренів ($D = 4 - 4 \cdot 5 = -16$), отже, він не може бути розкладений на лінійні множники.

$$\text{Тоді } \frac{x+4}{(x+1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+5)}.$$

Прирівняємо чисельники: $A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+1) = x+4$. Цього разу методом підстановки вдається знайти лише один коефіцієнт. При $x=-1$ маємо:

$$4A = 3, \quad A = \frac{3}{4}. \text{ Розкриємо дужки та прирівняємо коефіцієнти при } x^2 \text{ та } x:$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \end{array} \right| \begin{array}{l} A + B = 0, \\ 2A + B + C = 1. \end{array} \text{ Маємо } B = -\frac{3}{4}, C = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \int \frac{x+4}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{4} \int \frac{x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \\ - \frac{3}{8} \int \frac{2x+2-2-\frac{2}{3}}{x^2+2x+5} dx &= \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{8} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{3}{4} \ln|x+1| - \\ - \frac{3}{8} \ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \frac{x^3+5}{x^3-2x^2-3x} dx;$
2. $\int \frac{11+14x-x^2}{(x-3)(x+2)^2} dx;$
3. $\int \frac{2x^3+x^2-18x+1}{x^4-8x^2-9} dx;$
4. $\int \frac{3x^3-2x^2-14x+21}{(x^2-4)(x^2-4x+5)} dx.$

1.6. Інтегрування деяких ірраціональних виразів

Якщо підінтегральна функція є раціональним дробом відносно x , $\sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}$ ($a, b \in \mathbb{R}, n_i, m_i \in \mathbb{N}, n_i \geq 2, i = \overline{1; k}$), то за допомогою заміни $ax+b=t^n$, де n є найменшим спільним кратним чисел n_1, n_2, \dots, n_k ($n = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$), в цьому виразі можна звільнитися від ірраціональності.

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1-2\sqrt[3]{3x-1}}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-1-2\sqrt[3]{3x-1}}} = \left[\begin{array}{l} t^6 = 3x-1; \quad t = \sqrt[6]{3x-1}; \\ 6t^5 dt = 3dx; \quad dx = 2t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{2t^5 dt}{t^3-2t^2} = 2 \int \frac{t^3 dt}{t-2} = I.$$

Розділимо чисельник на знаменник з остачею та виділимо цілу частину дробу, одержимо: $\frac{t^3}{t-2} = t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2}$. Тоді

$$I = 2 \int \left(t^2 + 2t + 4 + \frac{8}{t-2} \right) dt = \frac{2t^3}{3} + 2t^2 + 8t + 16 \ln|t-2| + C, \text{ де } t = \sqrt[6]{3x-1}.$$

Аналогічно можна проінтегрувати раціональні функції відносно

$$x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, n_i, m_i \in \mathbb{N}, n_i \geq 2, i = \overline{1; k}).$$

Тут $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, $n = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{2 + \sqrt[3]{3x+1}} dx; & \quad 2. \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx; & \quad 3. \int \frac{1-x}{x\sqrt{2x+3}} dx; \\ 4. \int \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1-2x-3}} dx; & \quad 5. \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

1.7. Інтегрування деяких тригонометричних виразів

I. Для знаходження інтегралів виду

$$\int \sin ax \cdot \sin bx dx; \quad \int \sin ax \cdot \cos bx dx; \quad \int \cos ax \cdot \cos bx dx$$

підінтегральну функцію перетворюють на суму або різницю за формулами:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int \cos 4x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-3x) + \sin 5x) dx = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

II. Нехай підінтегральна функція має вигляд $\cos^m x \cdot \sin^n x$, де хоча б один з показників степеня (m або n) є непарним. Тоді при непарному m застосовують підстановку $t = \sin x$, а при непарному n : $t = \cos x$.

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right] = -\int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^4 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

III. Якщо у виразі $\cos^m x \cdot \sin^n x$ обидва показники степеня парні, то, застосовуючи формулу подвійного аргументу $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$ або формули зниження степеня $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha)$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$, такий інтеграл зводять до табличного, або до такого, який розглянуто у пункті II.

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x dx &= \int (\cos x \sin x)^2 \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{\sin^3 2x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

IV. Для знаходження інтегралів виду $R(\cos x; \sin x)$ (де $R(\cos x; \sin x)$ – раціональний дріб відносно $\cos x$ та $\sin x$) використовують універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. При цьому, як відомо, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \text{ тому } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Приклад. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{3 \cos x - 2 \sin x + 1} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; x = 2 \operatorname{arctg} t; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2dt}{-2t^2 - 4t + 4} = - \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 2} = - \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 3} =$$

$$= - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} \right| + C = - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Задачі для самостійної роботи

Знайдіть невизначені інтеграли

1. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx;$
2. $\int \sin^2 3x dx;$
3. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx;$
4. $\int \sin^3 x dx;$
5. $\int \cos^3 5x \sin^4 5x dx;$
6. $\int \sin^5 2x dx ;$
7. $\int \frac{dx}{\sin x};$
8. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}.$

Розглянуті тут тригонометричні вирази можуть виникати у процесі інтегрування функцій виду $R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c})$, $a, b, c - \text{const}'s$, тобто раціональних дробів відносно x та $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ після застосування *тригонометричних підстановок*.

Спочатку квадратний тричлен доповнюють до повного квадрату і переходять до інтегралу від $R\left(x; \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}\right)$, який після заміни

$t = x + \frac{b}{2a}$ та винесення $|a|$ з-під кореня зводиться до інтегралу одного з трьох типів:

$$1) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{t^2 + m^2}\right) dt, \quad 2) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{t^2 - m^2}\right) dt, \quad 3) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{m^2 - t^2}\right) dt,$$

$$0 < m - \text{const.}$$

У кожному з цих інтегралів слід позбутися ірраціональності за допомогою відповідної тригонометричної підстановки:

$$1) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{t^2 + m^2}\right) dt = \left[\begin{array}{l} t = m \cdot \operatorname{tg} z, \quad dt = \frac{m dz}{\cos^2 z}, \\ m^2 \operatorname{tg}^2 z + m^2 = m^2 (1 + \operatorname{tg}^2 z) = \\ = \frac{m^2}{\cos^2 z} \end{array} \right] =$$

$$= \int R\left(m \cdot \operatorname{tg} z - \frac{b}{2a}; \frac{m}{\cos z}\right) \frac{m dz}{\cos^2 z};$$

$$2) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{t^2 - m^2}\right) dt = \left[\begin{array}{l} t = \frac{m}{\cos z}, \quad dt = \frac{m \sin z dz}{\cos^2 z}, \\ \frac{m^2}{\cos^2 z} - m^2 = m^2 \frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z} = \\ = m^2 \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} \end{array} \right] =$$

$$= \int R\left(\frac{m}{\cos z} - \frac{b}{2a}; m \cdot \operatorname{tg} z\right) \frac{m \cdot \sin z dz}{\cos^2 z};$$

$$3) \int R\left(t - \frac{b}{2a}; \sqrt{m^2 - t^2}\right) dt = \left[\begin{array}{l} t = m \cdot \sin z, \quad dt = m \cdot \cos z dz, \\ m^2 - m^2 \sin^2 z = m^2 \cos^2 z \end{array} \right] =$$

$$= \int R\left(m \sin z - \frac{b}{2a}; m \cos z\right) m \cos z dz.$$

Отже, в усіх випадках під знаком інтегралу одержимо раціональну функцію від $\cos x$ та $\sin x$.

Приклад.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx = \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{\cos z}; \quad dx = \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz; \\ x^2 - 4 = \frac{4 \sin^2 z}{\cos^2 z} \end{array} \right] = \int \frac{2 \sin z}{\cos z} \cdot \frac{16}{\cos^4 z} \cdot \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 z \cdot \cos z \cdot dz = \frac{1}{4} \int \sin^2 z d(\sin z) = \frac{1}{12} \sin^3 z + C.$$

Зауваження. Ми розглянули методи інтегрування та за їх допомогою знайшли первісні для деяких функцій. Тепер логічно поставити питання: за яких умов

функція має первісну і як її знайти. На першу частину цього запитання відповідає теорема Коші, згідно з якою неперервна на проміжку $[a;b]$ функція має на цьому проміжку первісну. Проте алгоритму її знаходження немає. Більше того, часто ця первісна не може бути виражена через скінченну кількість елементарних функцій, тобто сама не є елементарною функцією. Інтеграли, що не виражаються через скінченну кількість елементарних функцій, зазвичай називають такими, що «не беруться». До них відносять, наприклад, інтеграли виду $\int \frac{dx}{\ln x}$; $\int \frac{\cos x}{x} dx$; $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int e^{-x^2} dx$ та деякі інші.

1.8. Означення та властивості визначеного інтеграла

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача 1. Криволінійною трапецією назвемо фігуру, що обмежена лініями $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, де $f(x)$ – неперервна і невід’ємна на $[a;b]$ функція (рис.1.1). Треба знайти площу S цієї фігури.

Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ точками $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ на частинні відрізки довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1;n}$. Таким чином, розбиваємо криволінійну трапецію на n вертикальних смужок. Знайдемо площу кожної з них. Візьмемо на кожному з частинних проміжків $[x_{k-1}, x_k]$ по одній довільній точці c_k , $k = \overline{1;n}$, і обчислимо $f(c_k)$ – значення функції в цій точці. Добуток $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ з геометричної точки зору дорівнює площі прямокутника, одна зі сторін якого співпадає з

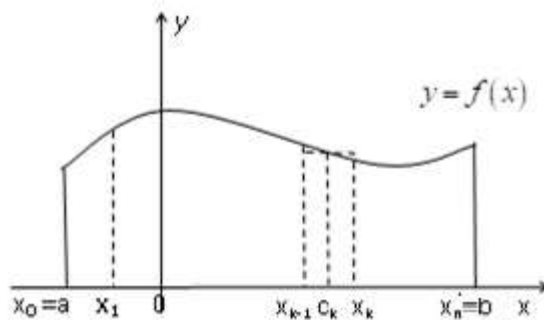


Рис. 1.1

відрізком $[x_{k-1}, x_k]$ осі Ox , а друга має довжину $f(c_k)$. Цей прямокутник зображено на рисунку 1.1 пунктиром. Як бачимо, площа прямокутника $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ наближено дорівнює площі відповідної смужки криволінійної трапеції. Підсумувавши площі всіх таких прямокутників, одержимо наближене значення площі

криволінійної трапеції. Тобто $S \approx \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Позначимо довжину найбільшого з частинних відрізків через λ , назвемо її рангом розбиття. Точне значення площі криволінійної трапеції дорівнює границі $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$.

Задача 2. Потрібно знайти масу стрижня, що співпадає з відрізком $[a; b]$ осі Ox і має густину, що задана як неперервна та невід’ємна на цьому проміжку функція $y = f(x)$.

Розіб’ємо відрізок $[a; b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на частинні відрізки довжиною $\Delta x_k, k = \overline{1; n}$. На кожному з частинних відрізків довільним чином виберемо точку $c_k, k = \overline{1; n}$, тоді $\sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$ наближено дорівнює масі m стрижня, за умови, що частинні відрізки достатньо малі. Увівши позначення

$$\lambda = \max_{k=1, n} (\Delta x_k), \text{ отримаємо точну рівність } m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

Отже, різні геометричні та фізичні задачі можуть приводити до одного й того ж математичного виразу, який називають визначеним інтегралом. Дамо точне означення цього поняття.

Означення. Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$. Розіб’ємо відрізок точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на частинні відрізки і знайдемо їх довжини $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1; n}$. Рангом розбиття назвемо величину, що задана рівністю $\lambda = \max_{k=1, n} (\Delta x_k)$. Виберемо на кожному з відрізків довільну точку $c_k, k = \overline{1; n}$, та обчислимо $f(c_k)$ – значення функції в цій точці. Знайдемо тепер добуток

$$f(c_k) \cdot \Delta x_k \text{ та складемо суму } \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k. \text{ Її називають інтегральною сумою або}$$

сумою Рімана. Вона, звичайно, залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ і вибору проміжних точок c_k . Обчислимо границю інтегральної суми, коли ранг розбиття прямує до нуля. Якщо ця границя існує, скінченна, не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ і вибору проміжних точок, то її називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ по проміжку $[a; b]$. Пишуть

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k. \text{ Функцію } f(x) \text{ називають підінтегральною}$$

функцією, вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, числа a і b – відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування.

Теорема 1.4 (Рімана). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

З геометричної точки зору $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y=0$, $x=a$, $x=b$ та графіком неперервної й невід’ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла

$\int_a^b f(x)dx$ дорівнює масі стрижня, що співпадає з відрізком $[a;b]$ осі Ox і має густину, що задається функцією $y = f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від суми двох або декількох функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Сталій множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c - const.$$

3. Якщо проміжок інтегрування $[a; b]$ розбити точкою c на частини, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що остання рівність виконана і у тому випадку, коли точка c не належить відрізку $[a; b]$.

4. Нехай на відрізку $[a; b]$ виконано нерівність $f(x) \leq g(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

$$5. \int_a^a f(x)dx = 0. \quad 6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \quad 7. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Справедливість властивостей 1 – 7 впливає або з самого означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми або з його геометричного змісту.

8. Інтеграл від непарної функції у симетричних межах дорівнює 0:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ якщо } f(x) \text{ – непарна функція.}$$

9. Якщо ж функція $f(x)$ є парною, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Справедливість властивостей 8 та 9 впливає з геометричного змісту визначеного інтеграла, а також того факту, що графік парної функції є симетричним відносно осі Oy , а графік непарної – відносно початку координат.

Теорема 1.5. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, тоді на цьому відрізку знайдеться таке число c , що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a). \quad (1.8)$$

Доведення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значення. Тоді з геометричного змісту визначеного інтеграла випливає нерівність

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Адже ліва і права частини цієї подвійної нерівності відповідно дорівнюють площам прямокутників $AKNB$ та $ACDB$ (рис.1.2), а середня частина – площі криволінійної трапеції, що заштрихована.

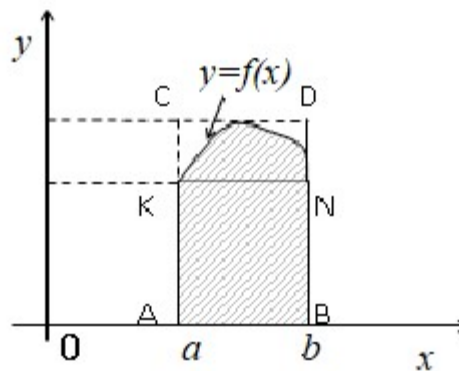


Рис. 1.2

Тоді, розділивши всі частини останньої нерівності на $b - a$, отримаємо:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M.$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Введемо позначення: $C = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$, тоді $m \leq C \leq M$. Згідно з теоремою про середнє значення неперервної на відрізку $[a; b]$ функції, існує така точка

$c \in [a; b]$, в якій виконано $f(c) = C \Rightarrow f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$. Помноживши обидві частини цієї рівності на $b-a$ одержимо рівність (1.8).

1.9. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ дорівнює певному числу. Якщо змінити верхню межу b так, щоб функція залишалася неперервною на новому проміжку, то зміниться і значення визначеного інтеграла. Таким чином, визначений інтеграл можна розглядати як функцію від верхньої межі

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a; b]$, $f(x)$ неперервна на $[a; b]$.

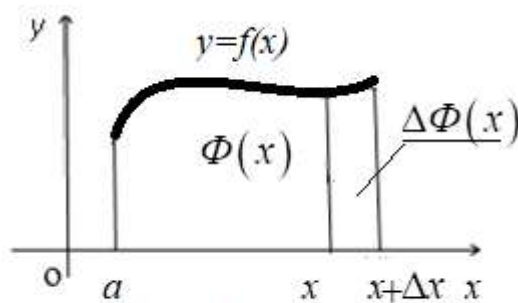


Рис. 1.3

Теорема 1.6 (про похідну від інтеграла зі змінною верхньою межею).

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ диференційована на $[a; b]$ по змінній x і

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t) dt\right)}{dx} = \Phi'(x) = f(x).$$

Доведення. Зафіксуємо $x \in [a, b]$ і обчислимо $\Phi(x)$. З геометричної точки зору $\Phi(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції (рис.1.3), побудованої на відрізку $[a; x]$. Дано аргументові x приріст Δx і обчислимо $\Phi(x + \Delta x)$, що дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a; x + \Delta x]$. Приріст функції $\Delta\Phi(x)$ тоді має вигляд:
$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt =$$

$$= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \text{ За теоремою 1.5 маємо: існує}$$

така точка $c \in [x; x + \Delta x]$, що $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)\Delta x$. Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$ за означенням.
$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x),$$
 тому що $c \rightarrow x$, коли $\Delta x \rightarrow 0$.

1.10. Формула Ньютона – Лейбніца

Теорема 1.7. Якщо $y = F(x)$ – яка-небудь первісна для функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.9)$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.6, інтеграл зі змінною верхньою межею $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a; b]$, також є первісною для $y = f(x)$ на цьому проміжку. Тоді $\Phi(x)$ і $F(x)$ можуть відрізняються одна від одної лише на сталий доданок C , тобто $\Phi(x) = F(x) + C$. Отже

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Підставимо в обидві частини останньої рівності a замість x . Отримаємо:
$$0 = \int_a^a f(t) dt = F(a) + C. \text{ Звідки маємо: } C = -F(a), \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Підставимо тепер b в отриману рівність замість x і замінимо змінну інтегрування

$$t \text{ на } x, \text{ одержимо: } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Формулу (1.9) називають формулою Ньютона – Лейбніца. Якщо ввести позначення $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, то ця формула може бути записана у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Приклади.

$$1. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

$$2. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_e^{e^2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

1.11. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 1.8. Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x) dx$ функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$. Введемо нову змінну t за формулою $x = u(t)$. Якщо 1) числа α і β такі, що $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$; 2) функції $u(t)$, $u'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt. \quad (1.10)$$

Доведення. Нехай $F(x)$ первісна функції $f(x)$ на $[a; b]$. Тоді інтеграл у лівій частині рівності (1.10) обчислимо за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a). \text{ Доведемо, що і права частина дорівнює цьому ж числу.} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) du(t) = F(u(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що при виконанні заміни змінної у визначеному інтегралі ми не повертаємось до старої змінної x . Замість t у первісну $F(u(t))$ просто підставляємо нові межі інтегрування α і β .

Приклад. Обчисліть визначений інтеграл

$$\int_0^{\ln 6} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 3}} = \left[\begin{array}{l} t = e^x + 3, \quad x = 0 \Rightarrow t = e^0 + 3 = 4 \\ dt = e^x dx, \quad x = \ln 6 \Rightarrow t = e^{\ln 6} + 3 = 9 \end{array} \right] = \int_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_4^9 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = 2.$$

1.12. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 1.9. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовані на відрізку $[a; b]$ функції тоді:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1.11)$$

Доведення. Обчислимо визначений інтеграл $I = \int_a^b (u(x)v(x))' dx$ за формулою Ньютона – Лейбніца: $I = \int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x) \Big|_a^b$. З іншого боку маємо:

$$I = \int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx = \int_a^b v du + \int_a^b u dv. \quad \text{Отже.}$$

$u \cdot v \Big|_a^b = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$. Це означає, що рівність (1.11) доведена.

Приклад. Обчисліть визначений інтеграл

$$\int_0^1 x \cdot 2^{1-3x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 2^{1-3x} dx, \quad v = -\frac{2^{1-3x}}{3 \ln 2} \end{array} \right] = -\frac{x \cdot 2^{1-3x}}{3 \ln 2} \Big|_0^1 + \frac{1}{3 \ln 2} \int_0^1 2^{1-3x} dx = -\frac{x \cdot 2^{1-3x}}{3 \ln 2} \Big|_0^1 - \frac{2^{1-3x}}{9 \ln^2 2} \Big|_0^1 = -\frac{2^{-2}}{3 \ln 2} - \left(\frac{2^{-2}}{9 \ln^2 2} - \frac{2}{9 \ln^2 2} \right) = -\frac{1}{12 \ln 2} + \frac{7}{36 \ln^2 2}.$$

Задачі для самостійної роботи

Обчисліть визначені інтеграли

$$\begin{array}{lll}
1. \int_1^4 (3\sqrt{x} - 6x) dx; & 2. \int_0^1 x e^{x^2} dx; & 3. \int_0^{\pi/6} \sin 2x dx; \\
4. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}; & 5. \int_1^e \frac{4}{x} \ln^3 x dx; & 6. \int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} 2x dx; \\
7. \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}; & 8. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx; & 9. \int_0^1 x \cdot 10^x dx; \\
10. \int_0^1 \operatorname{arcctg} x dx.
\end{array}$$

1.13. Невластивий інтеграл по нескінченному проміжку (невластивий інтеграл I роду)

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a; +\infty)$. Розглянемо інтеграл $\int_a^b f(x) dx = I(b)$. Він існує при будь-якому скінченному значенні $b > a$. Згідно з теоремою 1.6, цей інтеграл є диференційованою функцією від верхньої межі інтегрування b , отже, він є неперервною на проміжку $[a; +\infty)$ функцією $I(b)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, то її називають *невластивим інтегралом* від функції $f(x)$ по проміжку $[a; +\infty)$. Пишуть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Кажуть, що в цьому випадку невластивий інтеграл збігається. Якщо ж скінченної границі не існує, то будемо казати, що інтеграл розбігається. Якщо функція $f(x)$ невід'ємна, то збіжний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ можна тлумачити як скінченну площу нескінченної фігури, обмеженої віссю Ox , прямою $x=a$ і графіком функції $f(x)$.

Аналогічно визначають невластивий інтеграл по нескінченному проміжку $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Розглянемо невластивий інтеграл по всій числовій прямій $(-\infty; +\infty)$. Ви- значимо його рівністю: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$, де c – будь-яке число, за умови, що обидва інтеграли в правій частині рівності збігаються.

Приклади. Обчисліть невластиві інтеграли або доведіть їх розбіжність

$$1. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2};$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = I.$$

Якщо $p=1$, то $I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = +\infty$. Якщо $p \neq 1$, то $I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b$. При цьому,

коли $p > 1$, маємо: $I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1}$, а коли $p < 1$

$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{(1-p)} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$. Таким чином, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається і дорівнює $\frac{1}{p-1}$,

якщо $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

$$3. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}, \\ x = e \Rightarrow t = 1, \\ x = b \Rightarrow t = \ln b \end{array} \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{\ln b} \frac{dt}{t} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|t| \Big|_1^{\ln b} =$$

$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|\ln b| = +\infty$. Отже, невластивий інтеграл розбігається.

4. Невластивий інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ називають *інтегралом Пуассона*.

В теоретичному курсі математичного аналізу доводиться, що $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, цей результат можна тлумачити як площу нескінченної фігури, обмеженої графіком функції $y = e^{-x^2}$ ($y > 0, x \in R$) та віссю абсцис.

5. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Зробимо заміну $x = t\sqrt{2}$, тоді $dx = \sqrt{2}dt$. Маємо:
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}$. Цей інтеграл широко використовують у теорії ймовірностей.

Ознаки збіжності невластивого інтеграла по нескінченному проміжку

Теорема 1.10. Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та задовольняють нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то:

а) якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, то збігається й $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

б) якщо розбігається інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то розбігається $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Ця теорема дає достатню ознаку збіжності (чи розбіжності) невластивих інтегралів, основу на порівнянні підінтегральних функцій, тому її називають *ознакою порівняння*. Вона має цілком очевидне геометричне тлумачення: через нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$ нескінченна фігура, обмежена прямою $x=a$, віссю Ox і графіком функції $y = f(x)$, лежить всередині аналогічної фігури, обмеженої згори графіком функції $y = g(x)$. Якщо площа більшої фігури є скінченне число (інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ збігається), то і площа меншої фігури є скінченне число, тобто інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається. Якщо ж площа меншої фігури нескінченно велика, то і площа більшої фігури нескінченно велика (інтеграли розбігаються).

Приклади. Дослідити на збіжність інтеграли:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + 3}}$. Оскільки для всіх $x \in [0; +\infty)$ справджується нерівність

$$0 < \frac{x}{\sqrt{x^5 + 3}} = \frac{x}{x^{5/2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2} \sqrt{1 + \frac{3}{x^5}}} < \frac{1}{x^{3/2}}, \text{ а } \frac{3}{2} > 1 \text{ й } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ збігається}$$

(приклад 2 попереднього пункту), то і заданий інтеграл збігається.

2. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2 + \sin x + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[5]{x^3 - 1}} dx$.

Цей інтеграл розбігається, тому що для будь-якого $x \in [\sqrt{3}; +\infty)$ виконано:

$$\frac{2 + \sin x + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[5]{x^3 - 1}} > \frac{2 - 1 + \frac{\pi}{3}}{\sqrt[5]{x^3 - 1}} > \frac{1}{x^{3/5}} > 0, \text{ а інтеграл } \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/5}} \text{ розбігається (адже } p = \frac{3}{5} < 1).$$

Теорема 1.11 (Ознака порівняння у граничній формі). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, набувають додатних значень на проміжку $[a; +\infty)$ і існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, то обидва інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ й

$\int_a^{+\infty} g(x) dx$ є водночас або збіжними або розбіжними.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою ніж попередня, адже не вимагає перевірки нерівності $f(x) \leq g(x)$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} (\ln(x+10) - \ln x) dx = \int_1^{+\infty} \ln \frac{x+10}{x} dx.$$

Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+10}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{10}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{\frac{1}{x}} = 10$. Вона скін-

ченна і відмінна від нуля. Оскільки $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається, то і заданий інтеграл розбігається.

Розглянуті ознаки діють лише при невід'ємних підінтегральних функціях. Якщо ж підінтегральна функція знакозмінна, то в деяких випадках збіжність інтеграла можна встановити за допомогою наступної достатньої ознаки.

Теорема 1.12. Якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

В такому разі інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ називають абсолютно збіжним.

Зауваження. Дана теорема встановлює *достатню*, але *не необхідну* умову збіжності. Тобто для збіжного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ може виявитися розбіжним. В такому разі інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *умовно* (або *не абсолютно*) збіжним. Отже, ця теорема дозволяє виявити абсолютну збіжність інтеграла від знакозмінної функції, користуючись ознаками збіжності інтегралів від невід'ємних функцій ($|f(x)| \geq 0$).

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sqrt{x^3 + 8}} dx$.

Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оцінимо її абсолютну величину:

$$\left| \frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\sqrt{x^3 + 8}} \right| < \frac{7}{\sqrt{x^3 + 8}} < \frac{7}{x^{3/2}}. \text{ Оскільки інтеграл } \int_1^{+\infty} \frac{7}{x^{3/2}} dx = 7 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ збігається (тому що } p=1,5 > 1), \text{ то збігається і заданий інтеграл, причому абсолютно.}$$

Як уже сказано вище, для знакозмінної підінтегральної функції розглянута ознака виявляє лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо абсолютної збіжності немає, то подальше дослідження інтеграла вимагає більш тонких ознак, які ми тут не розглядаємо.

1.14. Невластивий інтеграл від необмеженої функції (невластивий інтеграл II роду)

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна при $x \in [a; b)$, а в точці b має розрив другого роду (при $x \rightarrow b$ функція $f(x)$ необмежена), то неможливо говорити про інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ як про границю інтегральної суми, тобто він не є визначеним інтегралом.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна при $x \in [a; b)$, а в точці b має розрив другого роду. Нехай ε – таке довільне фіксоване додатне число, що $b - \varepsilon$ належить проміжку $[a; b)$. Невластивий інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ в цьому випадку визначається рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо границя в правій частини цієї рівності існує та скінченна, то кажуть, що невластивий інтеграл збігається. В противному разі невластивий інтеграл

$\int_a^b f(x) dx$ не існує або розбігається і жодного числового значення не має.

Цілком аналогічно визначається невластивий інтеграл від необмеженої функції, якщо функція $f(x)$ має розрив другого роду на лівому кінці проміжка

$[a; b]$: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$. Якщо у кожній точці відрізка $[a; b]$, окрім деякої

внутрішньої точки C , підінтегральна функція є неперервною, а у точці C має

розрив другого роду, то $\int_a^b f(x) dx$ також є невластивим інтегралом другого роду.

Його визначають рівністю $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (за умови збіжності обох інтегралів у правій частині).

Приклади. Обчисліть невластиві інтеграли або доведіть їх розбіжність.

1. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$. При $x \rightarrow 3$ підінтегральна функція є необмеженою. Отже,

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{(x-3)^{2/3}}{2/3} \right|_2^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{3 \cdot \sqrt[3]{\varepsilon^2}}{2} - \frac{3}{2} \right) = -1,5. \text{ Інтеграл}$$

збігається.

$$2. \int_2^3 \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{2-\varepsilon}^3 \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 - 4, dt = 2x dx, \\ x = 2 - \varepsilon \Rightarrow t = \varepsilon^2 - 4\varepsilon, \\ x = 3 \Rightarrow t = 5 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon^2 - 4\varepsilon}^5 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{t} \Big|_{\varepsilon^2 - 4\varepsilon}^5 = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{\varepsilon^2 - 4\varepsilon} \right) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$. При $p > 0$ точка $x = 0$ є особливою, тобто підінтегральна функція в

ній є необмеженою.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{при } p < 1, \\ \infty & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Якщо $p=1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\ln \varepsilon) = \infty$.

Таким чином, заданий інтеграл збігається при $p < 1$ і дорівнює $\frac{1}{1-p}$; розбігається при $p \geq 1$.

Ознаки збіжності невластивого інтеграла від необмеженої функції

Теорема 1.13. Якщо на проміжку $[a; b)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні, мають особливу точку $x = b$ і задовольняють нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то:

а) якщо збігається інтеграл $\int_a^b g(x) dx$, то збігається й $\int_a^b f(x) dx$;

б) якщо розбігається інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, то розбігається й інтеграл

$$\int_a^b g(x) dx.$$

Цю достатню умову збіжності (або розбіжності) невластивих інтегралів називають *ознакою порівняння* і за своїм геометричним тлумаченням вона цілком аналогічна до відповідної ознаки для невластивих інтегралів по нескінченному проміжку.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 3x^3}}$. Оскільки для всіх $x \in [0; 1)$ виконується нерівність $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 3x^3}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}}$, а $\frac{2}{3} < 1$ й інтеграл

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ збігається (див. приклад 3), то і заданий інтеграл збігається.

Теорема 1.14 (Ознака порівняння в граничній формі). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і набувають додатних значень на проміжку $[a; b)$, а в точці $x = b$ є нескінченними (тобто ця точка є для них особливою) й існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, то обидва інтеграли $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ є водночас або збіжними або розбіжними.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x}$.

Функції $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2x}$ та $g(x) = \frac{1}{x}$ мають особливу точку $x = 0$. Оскільки існує границя $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\operatorname{arctg} 2x} = \frac{1}{2} \neq 0$ і інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається, то розбігається і заданий інтеграл.

Зауваження. Ознаки порівняння справедливі лише у випадку знакосталих підінтегральних функцій. Збіжність невластивого інтеграла від знакозмінної функції в деяких випадках можна виявити за допомогою наступної достатньої умови.

Теорема 1.15. Якщо функція $f(x)$ має особливу точку на відрізку $[a; b]$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ збігається, то збігається і $\int_a^b f(x) dx$.

В цьому випадку інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називають *абсолютно збіжним*. Якщо ж інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ збігається, а $\int_a^b |f(x)| dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називають *умовно (або не абсолютно) збіжним*.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

Підінтегральна функція має особливу точку $x = 0$. При цьому $\left| \frac{\cos 3x}{\sqrt{x}(1+x)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки збігається інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, то збігається і $\int_0^{2\pi} \left| \frac{\cos 3x}{\sqrt{x}(1+x)} \right| dx$, отже, збігається (абсолютно) і заданий інтеграл.

Задачі для самостійної роботи

Обчисліть невластиві інтеграли або доведіть їх розбіжність

- 1) $\int_0^{+\infty} e^{4x} dx$;
- 2) $\int_{-\infty}^1 x^2 10^{x^3} dx$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$;

$$4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}; \quad 5) \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad 6) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}};$$

$$7) \int_1^{+\infty} x^{-0,5} \cdot 2\sqrt{x} \, dx; \quad 8) \int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^2 4x}; \quad 9) \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx;$$

$$10) \int_2^{\sqrt{5}} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

1.15. Застосування визначеного інтеграла

Визначений інтеграл застосовують для обчислення геометричних, фізичних величин, для розв'язування задач техніки, економіки тощо. Ми вже застосовували визначений інтеграл для обчислення площі криволінійної трапеції та маси стрижня. Ці величини були обчислені за допомогою інтегральних сум. Існує також метод диференціала, сутність якого полягає у тому, що спочатку знаходять диференціал шуканої величини. Потім інтегруванням у відповідних межах обчислюють саму величину. Розглянемо застосування цього метода для розв'язування деяких геометричних задач.

1. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутній декартовій системі координат

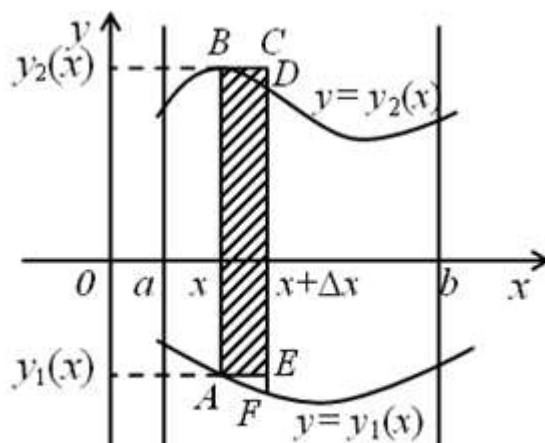


Рис. 1.4

Розглянемо фігуру, що обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, де $y_1(x) \leq y_2(x)$ при $x \in [a; b]$ (рис.1.4). Оберемо довільне значення x , $x \in [a; b]$

і розглянемо площу частини фігури, що міститься між прямими $x = a$ та $x = x$ як функцію $S(x)$, при цьому $S(a) = 0$, $S(b) = S$ – площа всієї фігури. Дамо поточній абсцисі x приріст $\Delta x = dx$ і одержимо приріст площі ΔS , що дорівнює площі фігури $ABDF$. Диференціал площі dS – це головна, лінійна відносно Δx частина ΔS , яка при $\Delta x \rightarrow 0$ дорівнює площі прямокутника $ABCE$. Отже, $dS = (y_2(x) - y_1(x))dx$. Проінтегруємо цю рівність в межах від $x = a$ до $x = b$ й одержимо:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx. \quad (1.12)$$

Фігуру, що зображена на рисунку 1.4, називають правильною в напрямі осі Oy . Якщо ж фігура правильна у напрямі осі Ox , тобто обмежена лініями $y = \alpha$, $y = \beta$, $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, де $x_1(y) \leq x_2(y)$ при $y \in [\alpha; \beta]$, то її площу обчислюють за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (x_2(y) - x_1(y)) dy. \quad (1.13)$$

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = 1 - 2x$.

Розв'язання. Побудуємо параболу $y = 4 - x^2$ і пряму $y = 1 - 2x$ (рис.1.5). Точки їх перетину знайдемо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 1 - 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 1 - 2x, \\ y = 1 - 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ y = 1 - 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 3, \\ y = -5. \end{cases}$$

Як бачимо, ця фігура є правильною в напрямі осі Oy , розташована між прямими $x = -1$ та $x = 3$, обмежена зверху параболою, а знизу – прямою. Тоді за формулою (1.12) маємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 ((4 - x^2) - (1 - 2x)) dx = \int_{-1}^3 (3 + 2x - x^2) dx = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^3 = \\ &= 9 + 9 - 9 - \left(-3 + 1 + \frac{1}{3} \right) = 10 \frac{2}{3} \text{ квадратних одиниць.} \end{aligned}$$

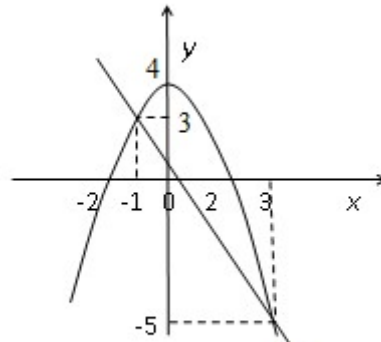


Рис. 1.5

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=1$, $y=-1$, $x-y+1=0$, $y=\ln x$.

Розв'язання. Побудуємо вказані лінії (рис. 1.6). Легко бачити, що отримана фігура є правильною в напрямі осі Ox . Вона розташована у смужці між прямими $y=1$, $y=-1$, з лівого боку обмежена прямою $x-y+1=0$ або $x=y-1$ а з правого – лінією $y=\ln x$, рівняння якої слід розв'язати відносно x і записати у вигляді $x=e^y$. За формулою (1.13) маємо:

$$S = \int_{-1}^1 (e^y - y + 1) dx = \left(e^y - \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} + 1 = \left(e - \frac{1}{e} + 2 \right) \text{ квадратних одиниць.}$$

них одиниць.

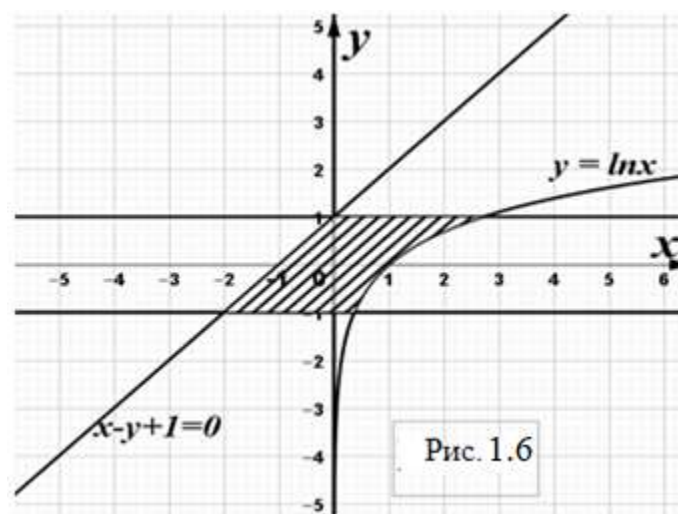


Рис. 1.6

2. Обчислення площі фігури у полярних координатах

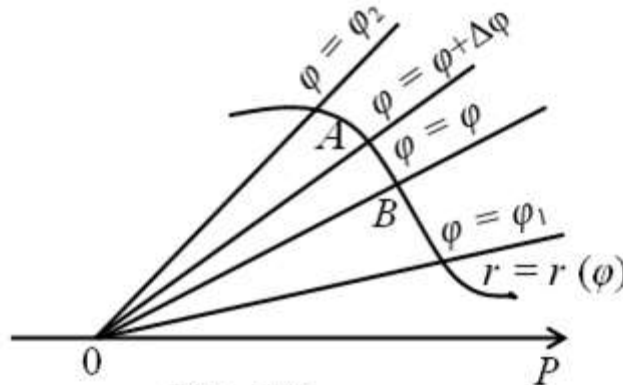


Рис. 1.7

У полярній системі координат аналогом криволінійної трапеції можна вважати криволінійний сектор, тобто фігуру, що обмежена двома променями $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi_2$ ($\varphi_1 \leq \varphi_2$), а також кривою лінією $r = r(\varphi)$ (рис.1.7). Зафіксуємо значення φ , $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$ і розглянемо функцію $S(\varphi)$, що дорівнює площі криволінійного сектора між променями $\varphi = \varphi_1$ та $\varphi = \varphi$.

Дамо аргументові приріст $\Delta\varphi = d\varphi$, тоді приріст площі дорівнює площі криволінійного сектора OAB , диференціал площі дорівнює площі сектора круга радіуса $OB = r(\varphi)$ з таким самим кутом розхилу $d\varphi$. Отже, $dS = \frac{1}{2}r^2(\varphi)d\varphi$, тоді площу криволінійного сектора обчислюємо за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (1.14)$$

Якщо ж потрібно обчислити площу фігури, що обмежена двома променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ ($\varphi_1 \leq \varphi_2$) та двома кривими $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$) (рис.1.8), то застосовують формулу

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi, \quad (1.15)$$

адже шукана площа дорівнює різниці площ двох криволінійних секторів, один з яких обмежений кривою $r = r_2(\varphi)$, другий – $r = r_1(\varphi)$

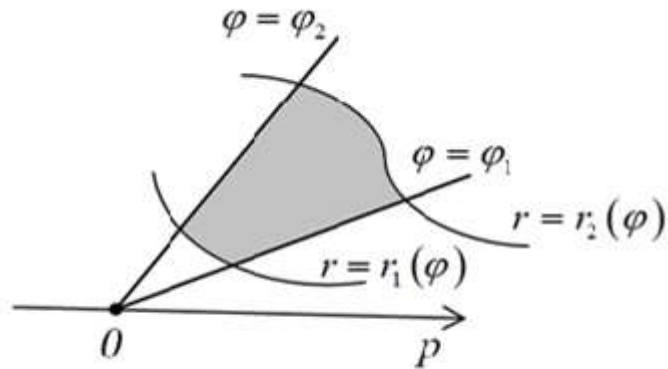


Рис. 1.8

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 < a = \text{const}$.

Розв'язання. Враховуючи те, що полярна вісь є віссю симетрії кардіоїди (рис.1.9), обчислимо спочатку площу S_1 верхньої відносно полярної осі половини фігури, а потім подвоїмо її. Цю частину фігури слід розглядати як криволінійний сектор, що обмежений двома променями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ та кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi)$. Отже, за формулою (1.14) маємо:

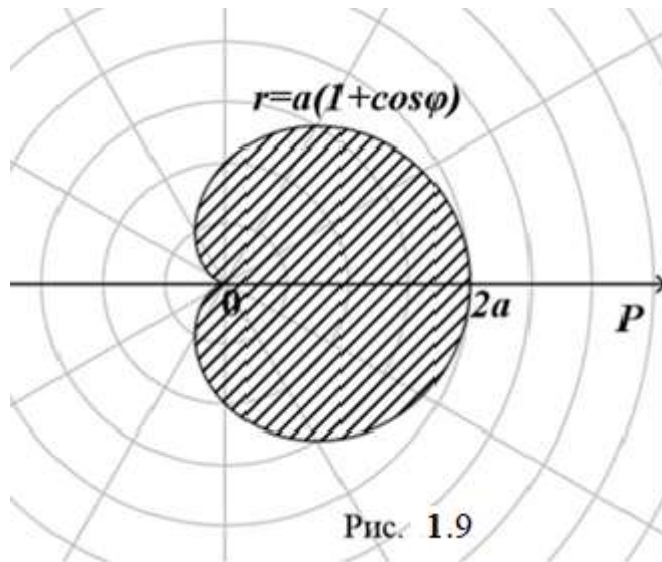
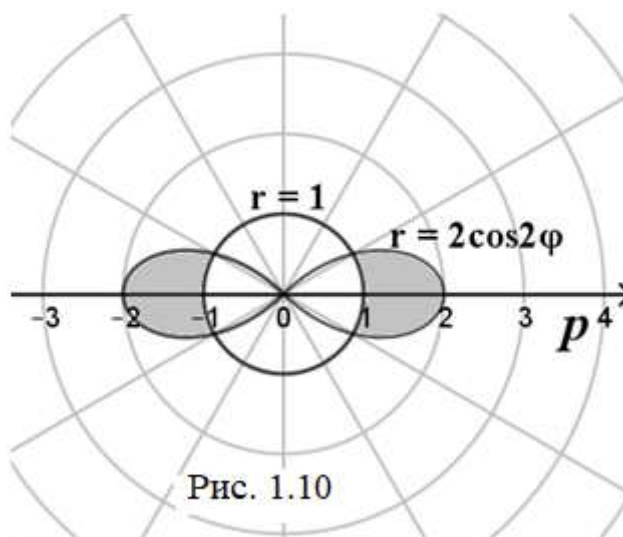


Рис. 1.9

$$S_1 = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3\varphi}{2} + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{4}, \text{ тоді } S = \frac{3\pi a^2}{2}$$

квадратних одиниць.



Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $r = 2 \cos 2\varphi$, $r = 1$ ($r \geq 1$).

Розв'язання. Вказана фігура обмежена двопелюстковою трояндою $r = 2 \cos 2\varphi$ та колом $r = 1$. Вона складається з двох рівних за площею частин, що зафарбовані на рисунку 1.10. Обчислимо площу S_1 однієї з них (правої), а потім подвоїмо. Для застосування формули (1.15) слід знайти полярні координати точок перетину двопелюсткової троянди та кола. Знайдемо їх з рівняння:

$2 \cos 2\varphi = 1$, або $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$. Маємо: $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$ для правої частини фігури. Тоді

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (4 \cos^2 2\varphi - 1) d\varphi = \int_0^{\pi/6} (1 + 2 \cos 4\varphi) d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad S = 2S_1 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ квадратних одиниць.}$$

Задачі для самостійної роботи

Обчисліть площу фігури, що обмежена лініями

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $y = (x+1)^2$, $y = x+3$; | 2) $x+y=0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 4$; |
| 3) $xy=5$, $x+y=6$; | 4) $x = y^2$, $x = 2y - y^2$; |

5) $r = 1 + \sin \varphi, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{3} \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right)$; 6) $r = 2 \cos \varphi, r = 1$.

3. Обчислення довжини дуги

Нехай рівняння $x = x(t), y = y(t)$ задають лінію, довжину дуги якої між точками A і B (рис. 1.11), треба знайти. Вважаємо, що точці A відповідає значення параметра $t = \alpha$, а точці B – $t = \beta$ ($\alpha < \beta$).

Обчислимо приріст довжини дуги, що дорівнює довжині кривої між точками $M(x(t); y(t))$ та $N(x(t) + dx; y(t) + dy)$, де $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$. Диференціал довжини дуги dl дорівнює довжині прямолінійного відрізка MN : $MN = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt$. Таким чином, довжина дуги l кривої AB може бути обчислена за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (1.16)$$

Якщо лінія AB задана в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $y = y(x), a \leq x \leq b$, то замінивши в рівності (1.16) параметр t на x , одержимо:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1.17)$$

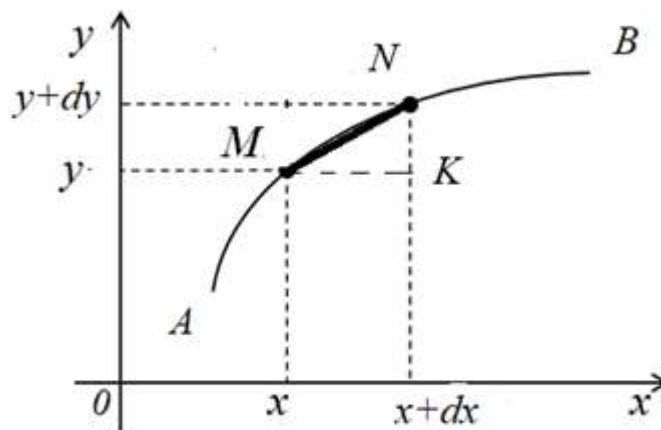


Рис. 1.11

Приклад. Знайти довжину першої арки циклоїди: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 < a - \text{const}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (1.16), оскільки крива задана параметрично. Знайдемо $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$. Тоді

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a \quad \text{одиниць}$$

довжини. Звернімо увагу на те, що $\sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right|$, проте

$\sin \frac{t}{2} \geq 0$, $t \in [0; 2\pi]$, тому знак модуля прибрати.

Приклад. Знайдіть довжину дуги лінії $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (1.17). Знайдемо $y'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$, тоді

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{|\cos x|} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, x=0 \Rightarrow t=0, \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{array} \right] = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1-t^2} = -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln \left| \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \right| \quad \text{одиниць}$$

довжини.

Задачі для самостійної роботи

Обчисліть довжину дуги лінії

1) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$; 2) $y = 0,25 \ln x - 0,5x^2$, $1 \leq x \leq 9$;

3) $\begin{cases} x = 1 - \frac{t^2}{2}, \\ y = \frac{t^3}{3}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\sqrt{2};$ 4) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$

4. Обчислення об'єму за площею поперечного перерізу

Нехай треба обчислити об'єм тіла, зображеного на рис.1.12. Вважаємо, що відома площа перерізу цього тіла будь-якою площиною, перпендикулярною до осі Ox . Ця площа залежить від положення такої площини, тобто вона є функцією $S(x)$.

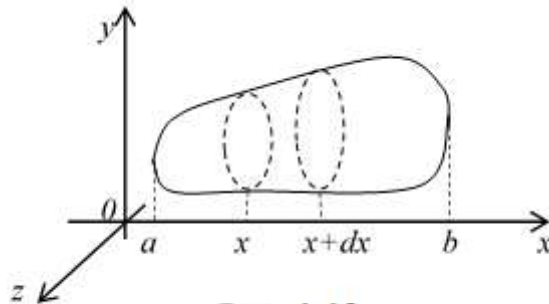


Рис. 1.12

Зафіксуємо довільне значення x , $x \in [a; b]$ і приріст $\Delta x = dx$. Знайдемо приріст об'єму ΔV , що дорівнює об'єму тієї частини фігури, що заключена між площинами $x = x$ та $x = x + \Delta x$. Диференціал об'єму dV дорівнює об'єму циліндра, основою якого служить вказаний переріз з площею $S(x)$, а висота дорівнює dx . Маємо: $dV = S(x)dx$. Тоді

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1.18)$$

5. Об'єм тіла обертання. Площа поверхні обертання

Розглянемо фігуру, яка утворена обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що обмежена лініями $y = 0$, $y = y(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис.1.13).

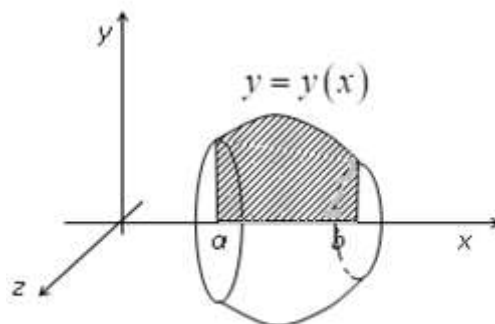


Рис. 1.13

Поперечним перерізом такої фігури є круг, радіус якого при заданому $x \in [a; b]$ дорівнює $y(x)$. Тоді $S(x) = \pi y^2(x)$, тому формула (1.18) набуває вигляду:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (1.19)$$

Нескладно довести, що площу поверхні тіла обертання, зображеного на рисунку 1.13, можна обчислити за формулою:

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1.20)$$

Якщо навколо осі Ox обертається правильна в напрямі осі Oy фігура, що зображена на рисунку 1.4, але розташована над віссю Ox , то утворюється тіло обертання із порожниною всередині. Об'єм такого тіла можна знайти за формулою:

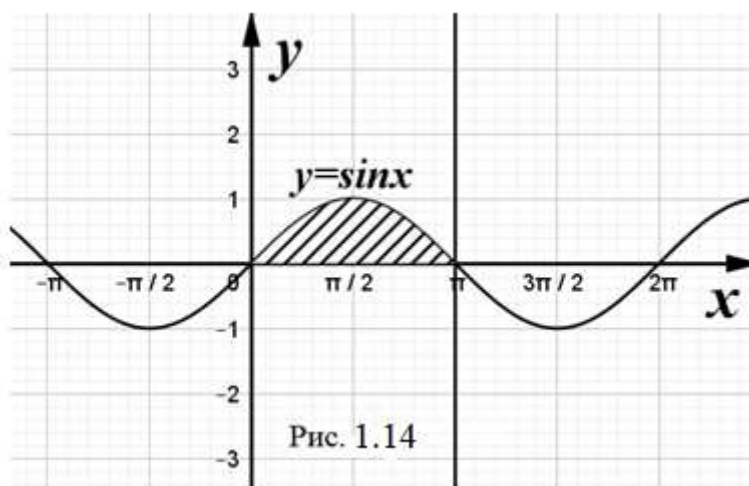
$$V = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx. \quad (1.21)$$

Адже він дорівнює різниці об'ємів двох тіл обертання, кожен з яких обчислюємо за формулою (1.19).

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями

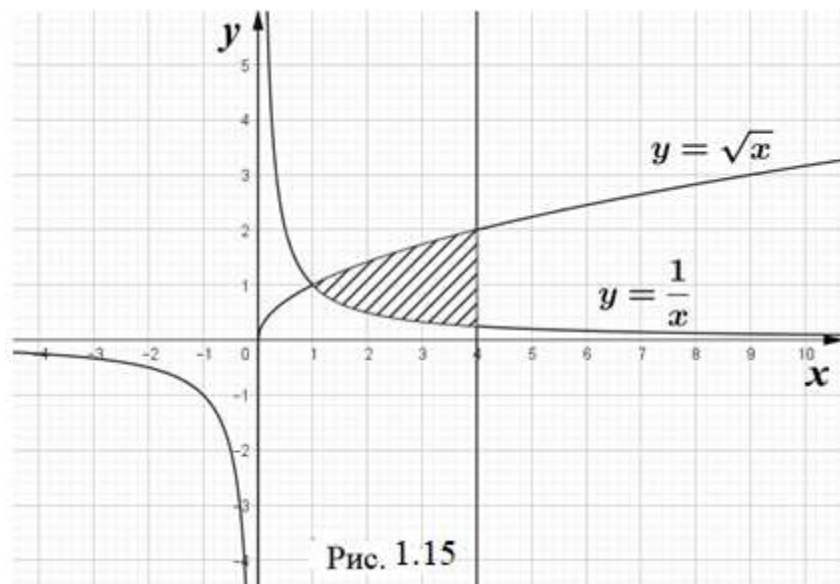
1. $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$;

2. $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, x = 4$.



Розв'язання. 1. У смужці $0 \leq x \leq \pi$ синусоїда знаходиться у верхній відносно осі Ox півплощині, отже, фігура, що обертається, є криволінійною трапецією (рис.1.14). Тому $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ кубічних одиниць.

2. Побудуємо вказані лінії. Отримана фігура знаходиться у смужці між прямими $x=1$, $x=4$, у верхній, відносно осі Ox півплощині, знизу обмежена лінією $y = \frac{1}{x}$ а зверху – $y = \sqrt{x}$ (рис.1.15). Тоді об'єм тіла обертання знайдемо за формулою (1.21):



$$V = \pi \int_1^4 \left((\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right) dx = \pi \int_1^4 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \pi \left(8 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 \right) = 6\frac{3}{4} \pi \text{ кубічних одиниць.}$$

Приклад. Знайдіть площу поверхні, отриманої обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Розв'язання. Знайдемо $y' = \cos x$, тоді

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array} \right] = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$, оскільки підінтегральна функція парна. Для обчислення інтег-

ралу $I = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$ застосуємо метод інтегрування частинами:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{1+t^2}, \quad du = \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}}, \\ dv = dt, \quad v = t \end{array} \right] = t\sqrt{1+t^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2} -$$

$$- \int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2} - I + \ln|t + \sqrt{t^2+1}| \Big|_0^1 = \sqrt{2} - I + \ln|1 + \sqrt{2}|.$$

З отриманого рівняння маємо $2I = \sqrt{2} + \ln|1 + \sqrt{2}|$, $I = \frac{\sqrt{2} + \ln|1 + \sqrt{2}|}{2}$. Отже, шу-
кана площа поверхні: $S = 2\pi(\sqrt{2} + \ln|1 + \sqrt{2}|)$ квадратних одиниць.

Задачі для самостійної роботи

Обчисліть об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями

1. $y = x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$;
2. $y=x$, $y=2-x^2$, $x=0$;
3. $y=e^x$, $y=e$, $x=0$;
4. $y=\cos x$, $y=2\cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.

Обчисліть площу поверхні, що утворена обертанням навколо осі абсцис дуги лінії

5. $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$;
6. $y = \sqrt{x+1}$, $-1 \leq x \leq 1$.

6. Обчислення координат центра ваги

Нехай однорідна дуга плоскої кривої задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Можна довести, що координати центра ваги цієї дуги визначаються за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{l} \int_a^b x dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{l} \int_a^b y dl,$$

де, як нам вже відомо, $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$, а l – довжина відповідної дуги.

Координати центра ваги криволінійної трапеції обчислюються за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x dS = \frac{1}{S} \int_a^b x y dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx.$$

Тут $dS = y dx$, а S – площа криволінійної трапеції.

Теорема Гульдена

Теорема 1.16. *Площа поверхні, отриманої обертанням дуги плоскої кривої навколо осі, що лежить у площині цієї кривої та не перетинає її, дорівнює добутку довжини дуги кривої та довжини кола, описаного центром ваги дуги.*

Теорема 1.17. *Об'єм тіла, отриманого обертанням плоскої фігури навколо осі, яка не перетинає її та розташована у площині фігури, дорівнює добутку площі цієї фігури та довжини кола, описаного центром ваги цієї фігури.*

Приклад. Обчислити центр ваги однорідної пластинки, обмеженої лінією $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ та осями координат.

Розв'язання. Вказана однорідна фігура є симетричною відносно бісектриси

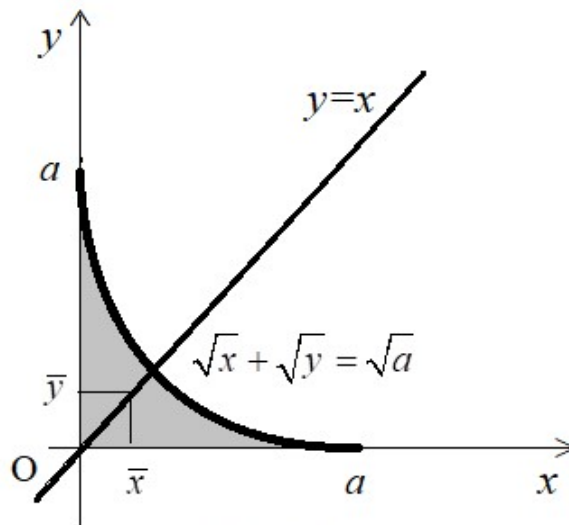


Рис. 1.16

першого координатного кута (рис. 1.16), тому абсциса та ордината центру ваги збігаються: $\bar{x} = \bar{y}$.

Обчислимо площу заштрихованої фігури:

$$S = \int_a^b y dx = \int_0^a (a^{0,5} - x^{0,5})^2 dx = \int_0^a (a - 2a^{0,5}x^{0,5} + x) dx =$$

$$= \left(ax - \frac{2a^{0,5}x^{1,5}}{1,5} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = a^2 - \frac{2a^{0,5}a^{1,5}}{1,5} + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

квadratних

одиниць.

Позначимо:
$$I = \int_a^b xy dx = \int_0^a x(a^{0,5} - x^{0,5})^2 dx = \int_0^a (ax - 2a^{0,5}x^{1,5} + x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{4a^{0,5}x^{2,5}}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{30}.$$

Отже, шуканий центр ваги має координати:

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{I}{S} = \frac{a^2}{6}.$$

7. Обчислення роботи та тиску

Роботу змінної сили $F = f(x)$, що діє в напрямі осі Ox на відрізьку $[a; b]$, обчислюють за формулою

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Для обчислення сили тиску рідини використовують закон Паскаля, згідно з яким тиск рідини на площадку знаходять за формулою

$$P = \rho ghS,$$

де S – відповідна площа, h – глибина занурення, ρ – густина рідини, g – прискорення сили тяжіння.

Приклади. 1. Обчислити роботу по розтягненню пружини на 4 см, якщо від навантаження в 1 Н вона розтягується на 1 см.

Розв'язання. Згідно з законом Гука сила, що розтягує пружину, дорівнює $F = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови: якщо $x = 0,01$ м, то

$$F = 1 \text{ Н}. \text{ Отже, } k = \frac{1}{0,01} = 100. \text{ Тоді } A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ Дж}.$$

2. Знайти силу тиску бензину, залитого в циліндричну ємність висотою $h = 3,5$ м та радіусом основи $r = 1,5$ м, на її стінки, якщо $\rho = 900$ кг/м³.

Розв'язання. Виразимо елемент сили тиску на поверхню стінки елементарної смужки: $dP = \rho g \cdot 2\pi r x dx$. Звідки

$$P = 2\pi r \rho g \int_0^h x dx = \pi r \rho g h^2 = 9,8\pi \cdot 1,5 \cdot 3,5^2 \cdot 900 = 162067\pi \text{ Н} = 162,067\pi \text{ кН}.$$

1.16. Наближене обчислення визначених інтегралів

Задачі з практичним змістом приводять іноді до інтегралів, точне обчислення яких за допомогою формули Ньютона–Лейбніца неможливе або пов'язане з певними труднощами: первісна підінтегральної функції може не виражатися через елементарні функції, відшукання первісної може вимагати надто

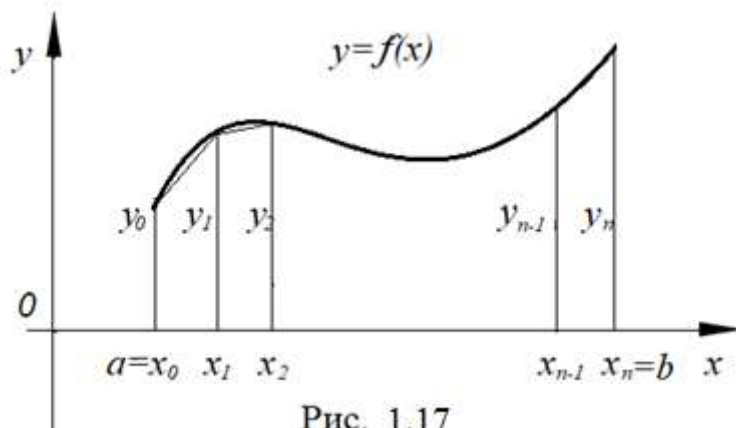
громіздких обчислень, нарешті підінтегральна функція може бути задана таблицею чи графіком, а не аналітичним виразом. В таких випадках інтеграл доводиться обчислювати наближено за допомогою чисельних методів. Ми розглянемо тут два таких методи, найпростіші і в той же час широко використовувані.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція неперервна на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, де $h = \frac{b-a}{n}$ – крок розбиття (або крок інтегрування).

Позначимо $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ – ординати графіка підінтегральної функції в точках поділу. Задача полягає в тому, щоб дати вираз наближеного значення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ через ці ординати.

Метод трапецій

Геометричний зміст інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ – площа фігури, обмеженої графіком підінтегральної функції, віссю Ox і вертикальними прямими $x=a$ та $x=b$ (рис. 1.17).



Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин довжиною $h = \frac{b-a}{n}$. Внаслідок виконаного розбиття відрізка $[a;b]$ ця фігура розбита на n смужок шириною h . Якщо h достатньо мале, то площу кожної такої смужки можна вважати наближено рівною площі трапеції з висотою h та основами, які дорівнюють

ординатам, що обмежують смужку. Тоді площа першої смужки дорівнює $\frac{h}{2}(y_0 + y_1)$, площа другої смужки $\frac{h}{2}(y_1 + y_2)$, ..., площа n -ї смужки дорівнює $\frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$.

Наближене значення шуканого інтеграла отримаємо, додавши ці площі:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Це і є правило або *формула трапецій*.

Можна довести, що гранична абсолютна похибка Δ цієї формули наближено пропорційна h^2 , тобто $\Delta = O(h^2)$. Таким чином, при зменшенні кроку h вдвічі похибка зменшується приблизно в 4 рази. Цим можна скористатися для наближеної (а для деяких функцій і точної) оцінки похибки. Для цього обирають число n парним і обчислення інтеграла повторюють з подвоєним кроком. Нехай I – точне значення інтеграла, I_h – результат обчислення з кроком h , I_{2h} – результат обчислення з кроком $2h$ і Δ – похибка результату I_h . Тоді $I = I_h + \Delta \approx I_{2h} + 4\Delta$, звідки одержуємо оцінку $\Delta = \frac{I_h - I_{2h}}{3}$.

Правило Сімпсона (метод парабол)

За правилом Сімпсона число n береться парним. Позначимо, як і раніше, через I_h результат обчислення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ за формулою трапецій з кроком h , а I_{2h} – результат обчислення з подвоєним кроком $2h$. Для похибки результату I_h було отримано вираз $\Delta = \frac{I_h - I_{2h}}{3}$. Якщо до I_h додати цю похибку, то результат вочевидь стане точнішим. Тому природно покласти

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_h + \frac{1}{3}(I_h - I_{2h}) = \frac{1}{3}(4I_h - I_{2h}).$$

Замінімо $4I_h$ та I_{2h} їх виразами:

$$4I_h = h(2y_0 + 4y_1 + 4y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1} + 2y_n);$$

$$I_{2h} = 2h \left(\frac{y_0}{2} + y_2 + y_4 + \dots + \frac{y_n}{2} \right) = h(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \dots + y_n).$$

Тоді $4I_h - I_{2h} = h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$, звідки отримуємо

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Це і є формула Сімпсона. Її називають також формулою парабол, тому що її можна отримати подібно до формули трапецій, але замінюючи на кожній парі частинних відрізків графік функції $y = f(x)$ параболою, яка проходить через ті ж точки (а не ламаною, як у методі трапецій). Правило Сімпсона при незначному збільшенні обсягу обчислень значно точніше, ніж правило трапецій. Його гранична абсолютна похибка Δ наближено пропорційна h^4 , тобто $\Delta = O(h^4)$ і при зменшенні кроку h вдвічі похибка зменшується приблизно в 16 разів.

Розділ 2

Кратні та криволінійні інтеграли. Елементи теорії поля

2.1. Міра множини. Інтеграл по мірі множини

Мірою множини називають функцію, що кожній множині Ω ставить у відповідність невід'ємне дійсне число $\mu(\Omega)$ ($\mu(\Omega) \geq 0$). Крім невід'ємності, функція $\mu(\Omega)$ повинна мати властивість *зліченної адитивності*. Це означає: якщо множина Ω є об'єднанням зліченної кількості малих множин Ω_i (з мірами $\mu(\Omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$), що попарно не перетинаються ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_i \cup \dots$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$), то сума мір цих множин дорівнює мірі самої множини Ω ($\mu(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Omega_i)$).

Мірою відрізка або кривої лінії є довжина, мірою плоскої фігури або поверхні є площа, мірою об'ємного тіла – його об'єм.

Множину Ω інакше можна назвати фігурою. Розіб'ємо фігуру Ω на n фігур Ω_i , $i = \overline{1, n}$, що попарно не перетинаються, з мірами $\mu(\Omega_i)$, $i = \overline{1, n}$. Число $\lambda = \max_{i=1, n} (\mu(\Omega_i))$ назвемо рангом розбиття. Нехай у будь-якій точці P фігури Ω визначена функція $f(P)$. Виберемо у кожній частині Ω_i довільну точку P_i і складемо суму $f(P_1)\mu(\Omega_1) + f(P_2)\mu(\Omega_2) + \dots + f(P_n)\mu(\Omega_n)$ (її називають інтегральною сумою). Обчислимо границю інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$. Якщо ця границя існує, скінченна, не залежить від способу розбиття множини Ω і від вибору точок P_i , то назвемо її інтегралом по мірі фігури Ω . Пишуть

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\mu(\Omega_i) = \int_{\Omega} f(P) d\Omega.$$

Про функцію $f(P)$, для якої існує інтеграл по мірі фігури Ω кажуть, що вона інтегрована в Ω .

Властивості інтегралу по мірі

1. Інтеграл по мірі Ω від 1 визначає міру цієї фігури: $\int_{\Omega} d\Omega = \mu(\Omega)$.
2. Якщо $\Omega_1 \subset \Omega_2$ та $\int_{\Omega_2} f(P)d\Omega$ існує, то існує також $\int_{\Omega_1} f(P)d\Omega$.

3. Нехай $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$, функція $f(P)$ інтегрована в Ω , тоді вона інтегрована у кожній з фігур Ω_i , і справедлива рівність:

$$\int_{\Omega} f(P) d\Omega = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} f(P) d\Omega.$$

4. Якщо функції $f_i(P)$, $i = \overline{1, n}$, інтегровані на множині Ω , то для будь-яких чисел α_i , $i = \overline{1, n}$, функція $\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \dots + \alpha_n f_n(P)$ також є інтегрованою на цій множині, причому справедлива рівність:

$$\int_{\Omega} (\alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) + \dots + \alpha_n f_n(P)) d\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} f_i(P) d\Omega.$$

5. Якщо функції $f(P)$ та $g(P)$ інтегровані на множині Ω , $f(P) \leq g(P)$ на цій множині, то $\int_{\Omega} f(P) d\Omega \leq \int_{\Omega} g(P) d\Omega$.

6. Якщо $f(P)$ – невід’ємна інтегрована на Ω_2 функція, а $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\int_{\Omega_1} f(P) d\Omega \leq \int_{\Omega_2} f(P) d\Omega$.

2.2. Криволінійний інтеграл по довжині дуги

1. *Задача про знаходження маси кривої.* Розглянемо криву $l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$\alpha \leq t \leq \beta$, що є неоднорідною за густиною. Введемо поняття густини у точці $P(x; y)$. Виділимо маленьку дугу кривої, що містить точку P і має довжину Δl та масу Δm . Тоді середня густина виділеної частини кривої дорівнює $\frac{\Delta m}{\Delta l}$. Ліній-

ною густиною або густиною у точці P називають $\rho(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}$ (вважаємо, що при $\Delta l \rightarrow 0$ виділена частина кривої стягується у точку P). Отже, маємо функцію $\rho(P)$, що кожній точці P цієї кривої ставить у відповідність густину в цій точці.

Розіб’ємо криву l (або $M_0 M_n$) довільним чином точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на n частинок $M_0 M_1, M_1 M_2, \dots, M_{n-1} M_n$ (рис. 2.1), довжини яких дорівнюють відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$. Знайдемо число $\lambda = \max_{i=1, n} (\Delta l_i)$. У кожній частині виберемо довільну точку $P_i, i = \overline{1, n}$, та складемо суму $\rho(P_1) \Delta l_1 + \rho(P_2) \Delta l_2 + \dots + \rho(P_n) \Delta l_n$,

яка, вочевидь, дорівнює наближеному значенню маси кривої. Тоді шукана маса дорівнює

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta l_i. \quad (2.1)$$

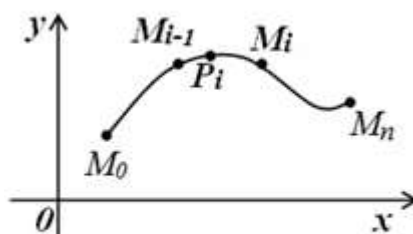


Рис. 2.1

Права частина рівності (2.1) дорівнює інтегралу по мірі фігури. Фігурою є крива l , а мірою – її довжина. Формулу (2.1) тоді запишемо у вигляді:

$$m = \int_l \rho(P) dl = \int_l \rho(x; y) dl. \quad (2.2)$$

Зауважимо, що диференціал довжини дуги дорівнює: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Тоді обчислення маси кривої буде зведене до обчислення визначеного інтегралу

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t); y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

2. *Перехід від криволінійного інтегралу по довжині дуги до визначеного інтегралу.* Розв'язуючи задачу про обчислення маси кривої, ми прийшли до поняття криволінійного інтегралу по довжині дуги $\int_l f(x; y) dl$, де $f(x; y)$ – неперервна на кривій l функція двох змінних. Зрозуміло, що цей інтеграл має усі властивості інтегралу по мірі фігури. Зауважимо також, що криволінійний інтеграл по довжині дуги не змінить свого значення при зміні напрямку, у якому проходить крива. Ми також звели криволінійний інтеграл по довжині дуги до визначеного інтегралу. При параметричному заданні кривої маємо:

рвна на кривій l функція двох змінних. Зрозуміло, що цей інтеграл має усі властивості інтегралу по мірі фігури. Зауважимо також, що криволінійний інтеграл по довжині дуги не змінить свого значення при зміні напрямку, у якому проходить крива. Ми також звели криволінійний інтеграл по довжині дуги до визначеного інтегралу. При параметричному заданні кривої маємо:

$$\int_l f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (2.3)$$

при цьому крива необов'язково має бути плоскою. Для кривої, що у просторі задається рівняннями

$$l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$

справедлива рівність:

$$\int_l f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (2.4)$$

Якщо ж у площині xOy крива задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то, вважаючи x параметром ($x = x$, $y = y(x)$) і користуючись формулою (2.3), до визначеного інтегралу переходимо за формулою:

$$\int_l f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x; y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (2.5)$$

Приклад. Обчислити $\int_l \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dl$, де l – перший виток конічної

гвинтової лінії:
$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] . \\ z = t. \end{cases}$$

Розв'язання. Лінія l задана параметричними рівняннями. Отже, скористаймося формулою (2.4). Знайдемо $x'(t) = \cos t - t \sin t$; $y'(t) = \sin t + t \cos t$; $z'(t) = 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 &= \cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \\ &+ \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t + 1 = 1 + (t^2 + 1)(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2 + t^2; \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = |t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = t, \text{ враховуючи, що } t \in [0; 2\pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_l \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dl &= \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{2 + t^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2} t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + t^2)^{\frac{1}{2}} d(2 + t^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left((2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Приклад. Обчислити масу дуги $l: y = 0,25(x^2 - 2\ln x)$, $1 \leq x \leq 2$, з густиною $\rho = x$.

Розв'язання. Згідно з формулою (2.2), маємо: $m = \int_l x dl$. Криволінійний інтеграл обчислимо за формулою (2.5). Для цього знайдемо:

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(0,25\left(2x - \frac{2}{x}\right)\right)^2 = 1 + \left(0,5\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2 = 1 + 0,25\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 0,25\left(4 + x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0,25\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(0,5\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2.$$

$$m = \int_1^2 x \cdot 0,5\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = 0,5 \int_1^2 (x^2 + 1) dx = 0,5 \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{3} \text{ (од. маси).}$$

2.3. Криволінійний інтеграл по координатах.

1. *Обчислення роботи силового поля уздовж кривої.* Нехай до кожної точки $K(x, y)$ деякої області $D \in \mathbb{R}^2$ прикладено силу $\vec{F} = \vec{F}(K)$, тобто у цій точці задано вектор $\vec{F}(K) = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Інакше можна сказати, що в області D діє силове поле. Ставиться задача: обчислити роботу силового поля по

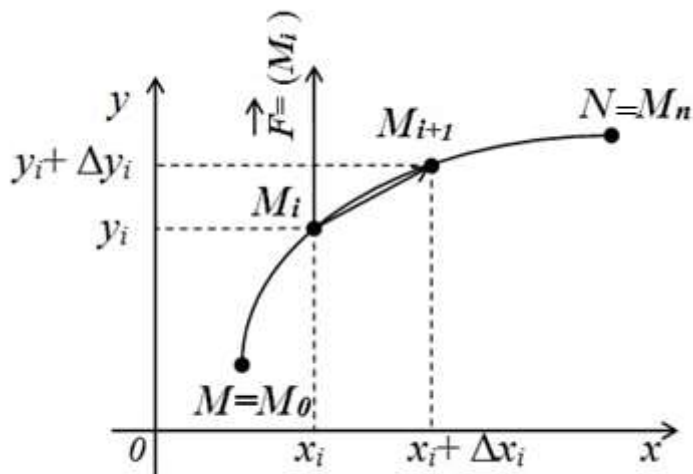


Рис. 2.2

переміщенню матеріальної точки вздовж плоскої кривої MN (що лежить в області D) в напрямі від M до N . Розіб'ємо криву довільним чином точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} на n частинок $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ (рис.2.2).

Робота силового поля A_i уздовж дуги $M_i M_{i+1}$ наближено дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}(M_i) = P(x_i; y_i)\vec{i} + Q(x_i; y_i)\vec{j}$ на вектор переміщення $\vec{\Delta s}_i = \overline{M_i M_{i+1}} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$, отже $A_i \approx P(x_i; y_j)\Delta x_i + Q(x_i; y_j)\Delta y_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Знайдемо наближене значення роботи уздовж всієї кривої MN : $A \approx \sum_{i=0}^{n-1} (P(x_i; y_j)\Delta x_i + Q(x_i; y_j)\Delta y_i)$. Якщо ж спрямувати до нуля $\max_{i=0, n-1}(\overline{\Delta s}_i)$, а це означає, що $\max_{i=0, n-1}(\Delta x_i) \rightarrow 0$ та $\max_{i=0, n-1}(\Delta y_i) \rightarrow 0$, отримаємо точну рівність:

$$A = \lim_{\substack{\max_{i=0, n-1}(\Delta x_i) \rightarrow 0 \\ \max_{i=0, n-1}(\Delta y_i) \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} (P(x_i; y_j)\Delta x_i + Q(x_i; y_j)\Delta y_i). \quad (2.6)$$

Якщо границя у правій частині рівності (2.6) існує, скінченна та не залежить від способу розбиття кривої, то її називають криволінійним інтегралом по координатах від $P(x; y)$ та $Q(x; y)$ уздовж кривої MN і позначають так:

$$\int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \text{ Отже,}$$

$$A = \int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \quad (2.7)$$

Значення цього криволінійного інтегралу (на відміну від криволінійного інтегралу по довжині дуги) зміниться на протилежне при зміні напрямку, у якому проходиться крива. Якщо крива замкнена, то початкова точка руху співпадає з кінцевою. У цьому випадку криву позначають однією буквою (наприклад l) та використовують інший символ інтегралу. Пишуть $\oint_l P(x; y)dx + Q(x; y)dy$, обов'язково вказуючи напрям обходу контура l (за годинниковою стрілкою або проти).

2. *Перехід від криволінійного інтегралу по координатах до визначеного інтегралу.* Якщо крива задана параметрично, тобто $MN: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$, то

$$dx = x'(t)dt, \quad dy = y'(t)dt. \text{ Отже,}$$

$$\int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t))x'(t) + Q(x(t); y(t))y'(t)]dt. \quad (2.8)$$

При цьому крива необов'язково має бути плоскою. Для кривої, що у просторі задається рівняннями

$$MN: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \text{ та сили } \bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \text{ справедлива рівність:} \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + R(x(t); y(t); z(t))z'(t)] dt. \quad (2.9)$$

Для плоскої кривої $MN: y = y(x), a \leq x \leq b$, у прямокутній декартовій системі координат маємо:

$$\int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b [P(x; y(x)) + Q(x; y(x))y'(x)] dx. \quad (2.10)$$

Приклад. Обчисліть $\int_{MN} 2xydx + (x+y)dy$, $MN: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$.

Розв'язання. $x'(t) = -\sin t$; $y'(t) = \cos t$. Згідно з формулою (2.8) маємо:

$$\begin{aligned} \int_{MN} 2xydx + (x+y)dy &= \int_0^{\pi/2} (-2\cos t \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t \cos t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t d(\sin t) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t + \sin 2t) dt = \left(-\frac{2}{3} \sin^3 t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Приклад. Знайдіть роботу сили $\bar{F} = x^5\bar{i} - 3y\bar{j}$ уздовж кривої $MN: y = x^3$ від точки $M(1;1)$ до точки $N(2;8)$.

Розв'язання. За формулами (2.7), (2.10) маємо:

$$A = \int_{MN} x^5 dx - 3y dy = \int_1^2 (x^5 - 3x^3 \cdot 3x^2) dx = -8 \int_1^2 x^5 dx = -8 \frac{x^6}{6} \Big|_1^2 = -84 \text{ (од. роботи).}$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисліть масу дуги l з густиною ρ :

а) $l: y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \rho = x^2(1+x^2)^{3/2};$

$$\text{б) } l: \begin{cases} x = 2t \cos t \\ y = 2t \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} + \frac{x}{y}\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж кривої $y = e^{-x}$ з положення $A(-1; e)$ в точку $B(0; 1)$.

3. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$ при переміщенні точки уздовж еліпса $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq \pi$.

4. Обчисліть криволінійний інтеграл $\int_{AB} (x^2 - y^2) dx + xy dy$, де AB – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1; 1)$ і $B(3; 4)$.

2.4. Подвійний інтеграл

1. *Задача про обчислення об'єму циліндроїда.* Циліндроїдом або циліндричним тілом (рис. 2.3) називають фігуру, що обмежена знизу областю D у площині xOy , зверху – поверхнею $z = f(x; y)$ ($f(x; y) \geq 0$ при $(x; y) \in D$), а бічна його поверхня є циліндричною з твірною, паралельною осі Oz та напрямною – ∂D (межа області D).

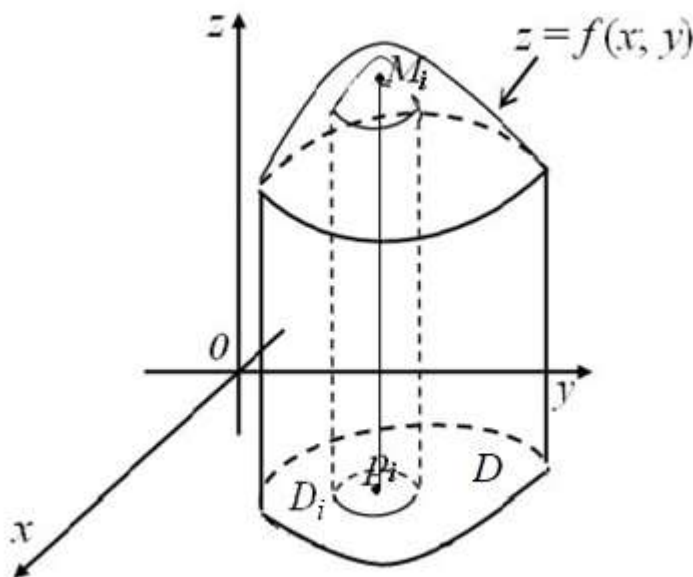


Рис. 2.3

Розділимо область D довільним чином на n частин $D_i, i = \overline{1, n}$, що попарно не перетинаються і мають площі $\Delta s_i, i = \overline{1, n}$. Тоді циліндроїд буде розділено на n циліндроїдів, кожен з яких обмежений знизу областю $D_i, i = \overline{1, n}$ у площині xOy (рис. 2.3). У кожній з них виберемо довільну точку $P_i(x_i; y_i)$ і знайдемо $f(P_i), i = \overline{1, n}$ (це апліката точки M_i поверхні $z = f(x; y)$). Зауважимо, що добуток $f(P_i) \cdot \Delta s_i$ дорівнює об'єму циліндра з основою D_i та висотою $f(P_i), i = \overline{1, n}$. Тоді об'єм циліндроїда наближено дорівнює $\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta s_i$. Якщо ранг розбиття $\lambda = \max_{i=1, n}(\Delta s_i)$ спрямувати до нуля, то одержимо точну рівність для обчислення об'єму циліндроїда V :

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta s_i. \quad (2.11)$$

Права частина рівності (2.11) відповідає означенню інтеграла по мірі фігури, якщо ця границя існує, скінченна, не залежить від способу розбиття області D та вибору точок P_i . Цією фігурою є область D , а мірою – площа. Пишуть:

$$V = \iint_D f(x; y) dx dy. \quad (2.12)$$

Для довільної неперервної в області D функції $f(x; y)$ інтеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ називають подвійним; вираз $dx dy$ - елементом площі. Подвійному інтегралу притаманні всі властивості інтегралу по мірі фігури.

2. *Обчислення подвійного інтеграла через повторні.* Скористаймося геометричним змістом подвійного інтеграла від неперервної функції $f(x; y)$ ($f(x; y) \geq 0$ при $(x; y) \in D$) та виразимо об'єм циліндроїда через площу $S(x)$ поперечного перерізу (рис. 2.4): $V = \int_a^b S(x) dx$. Припустимо, що область D у площині xOy задається системою нерівностей

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \end{cases} \text{ тобто ця об-}$$

ласть є правильною в напрямі осі Oy , а $S(x)$ – площа криволінійної трапеції, що для кожного фіксованого x дорівнює визначеному інтегралу:

$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy$. Тоді з рівності (2.12) маємо:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy. \quad (2.13)$$

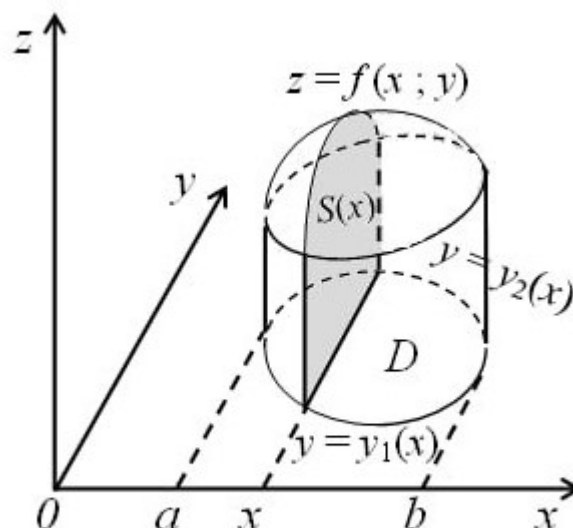


Рис. 2.4

Формула (2.13) виражає подвійний інтеграл через повторні визначені інтеграли. Їх обчислюють таким чином: спочатку функцію $f(x; y)$ інтегрують по y (внутрішній інтеграл) в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$, вважаючи x константою. В результаті отримують функцію від x , яку інтегрують в межах від a до b (зовнішній інтеграл). Можна довести, що формула (2.13) справедлива і для знакозмінної в області інтегрування неперервної функції $f(x; y)$. Якщо область D

правильна в напрямі осі Ox , тобто $D: \begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta, \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \end{cases}$ то справедлива рівність:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx. \quad (2.14)$$

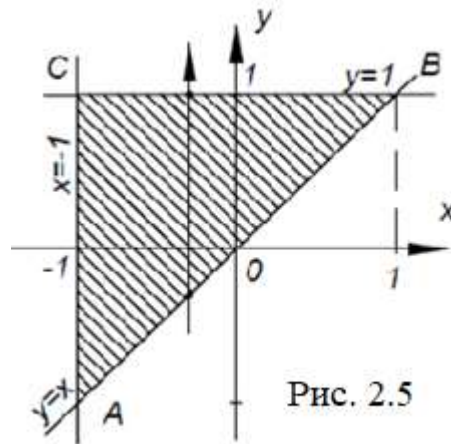
Формули (2.13) та (2.14) відрізняються порядком інтегрування у повторних інтегралах.

Приклад. Виразити подвійний інтеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ через повторні, якщо область D – трикутник ACB , $A(-1; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 1)$.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування (рис. 2.5).

Розглянемо її як правильну у напрямі осі Oy . $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \leq y \leq 1, \end{cases}$ тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$



Приклад. Обчисліть $\iint_D (x^2 + 2xy) dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$xy = 1$; $y = \sqrt{x}$; $x = 2$.

Розв'язання. Область інтегрування зображена на рисунку 2.6. Вона правильна у напрямі осі Oy , тому при зведенні до повторних інтегралів скористаймося формулою (2.13).

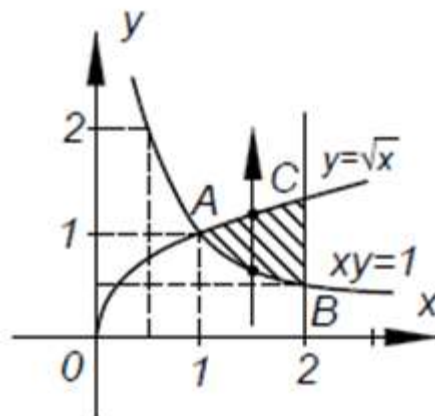


Рис. 2.6

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + 2xy) dx dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2xy) dy = \left[\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2xy) dy = (x^2 y + xy^2) \right]_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} = \\
&= x^{2,5} + x^2 - x - \frac{1}{x} \Big]_1^2 = \int_1^2 \left(x^{2,5} + x^2 - x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{2x^{3,5}}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \\
&= \frac{3 \cdot 2^{5,5} + 23}{42} - \ln 2 = \frac{96\sqrt{2} + 23}{42} - \ln 2.
\end{aligned}$$

Приклад. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx$, якщо область D обмежена лініями $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 2$.

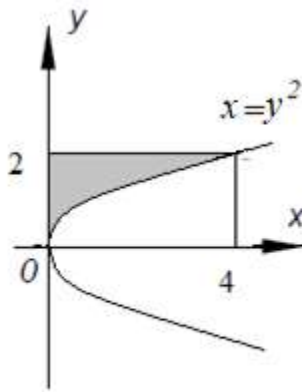


Рис. 2.7

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування (рис. 2.7). Її можна розглядати як правильну у напрямі осі Oy . Розв'яжемо рівняння параболи відносно змінної y : $y = \pm\sqrt{x}$. Область інтегрування знизу обмежена верхньою віткою параболи

– лінією $y = \sqrt{x}$. Отже, $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x} \leq y \leq 2, \end{cases}$ тому

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 e^{\frac{x}{y}} dy, \text{ але ж внутрішній інтеграл } \int_{\sqrt{x}}^2 e^{\frac{x}{y}} dy \text{ (у якому } y -$$

змінна інтегрування, x – число) не можна виразити через елементарні функції. Потрібно змінити порядок інтегрування з тією метою, щоб у внутрішньому інтегралі змінною інтегрування була x . Область D є правильною і в напрямі осі Ox також.

Запишемо відповідну систему нерівностей $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2, \\ 0 \leq x \leq y^2, \end{cases}$ отже

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^2 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int_0^2 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} dy =$$

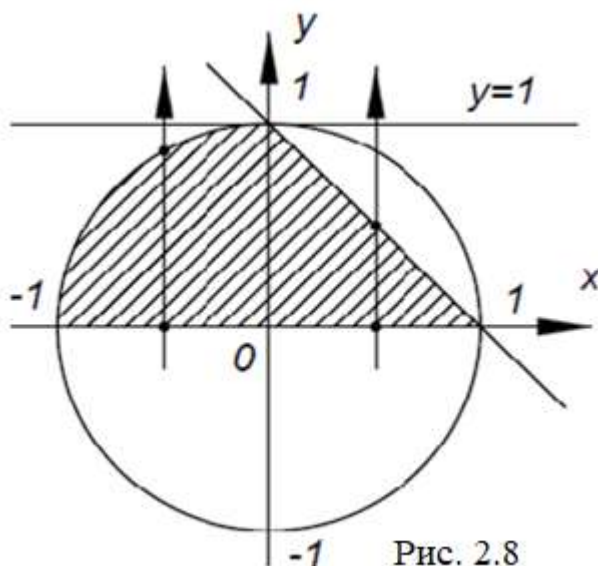
$$= \int_0^2 y e^y dy - \int_0^2 y dy = \left[\begin{array}{l} u = y, du = dy \\ dv = e^y dy, v = e^y \end{array} \right] = y e^y \Big|_0^2 - \int_0^2 e^y dy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 - 2 = e^2 - 1.$$

Як бачимо, при обчисленні подвійного інтеграла зміна порядку інтегрування може виявитися корисною. Розглянемо декілька прикладів.

Приклади. Змініть порядок інтегрування у заданих інтегралах

$$1. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx .$$

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена лініями $y=0$, $y=1$,



$x=1-y$ – пряма, $x=-\sqrt{1-y^2}$ – ліва половина кола $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 2.8).

Проведемо прямі перпендикулярні до осі Ox , що перетинають область D . Оскільки точка виходу такої прямої з області при $-1 \leq x \leq 0$ лежить на колі, а при $0 \leq x \leq 1$ – на прямій, то цю область слід розбити на дві області: $D=D_1 \cup D_2$.

З рівняння кола $x^2 + y^2 = 1$ маємо: $y = \sqrt{1-x^2}$ – рівняння верхнього півкола; рівняння прямої $x=1-y$ запишемо у вигляді $y=1-x$.

$$D_1: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x, \end{cases} \quad \text{тоді}$$

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

$$2. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-y)} f(x, y) dx.$$

Розв'язання. Области інтегрування задано системами нерівностей:

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq x \leq y^2, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} 1 \leq y \leq 3, \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}(3-y). \end{cases}$$

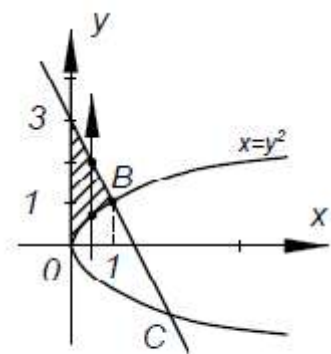


Рис. 2.9

Побудувавши ці області, помітимо, що їх можна об'єднати в одну область D , що заштрихована на рисунку 2.9. Якщо вважати, що задані повторні інтеграли отримані при обчисленні подвійного інтеграла по області D , стає зрозуміло, що розбиття D на дві частини ($D = D_1 \cup D_2$) відбулося через те, що було обрано напрям осі Ox для проходження області. Оскільки область D правильна у напрямі

осі Oy , $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x} \leq y \leq 3 - 2x, \end{cases}$ то

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{\frac{1}{2}(3-y)} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{3-2x} f(x, y) dy.$$

3. *Заміна змінних у подвійному інтегралі.* Для спрощення обчислення подвійних інтегралів зазвичай використовують перехід від прямокутної декартової системи координат xOy до іншої системи координат uOv , у якій область інтегрування D набуває більш простого вигляду. Нехай перетворення координат довільної точки $M(x; y)$ ($M(x; y) \in D$) задається формулами $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$.

Вважаємо, що з цих формул u та v виражаються однозначно через x та y , тобто справедливі рівності $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, де функції $u(x; y)$, $v(x; y)$ неперервно диференційовані в області D . Цими рівностями область інтегрування D взаємно однозначно відображається у область D^* в системі координат uOv . Можна довести, що при зроблених припущеннях, а також за умови, що функції $x(u; v)$, $y(u; v)$ неперервно диференційовані в D^* і визначник

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, справедлива формула:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u; v); y(u; v)) |I(u; v)| du dv. \quad (2.15)$$

Визначник $I(u; v)$ називають *визначником Якобі* або *якобіаном* перетворення.

У полярних координатах, що пов'язані з прямокутними декартовими координатами формулами

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ або } -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (2.16)$$

маємо: $I(\varphi; r) = \begin{vmatrix} x'_\varphi & x'_r \\ y'_\varphi & y'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi \\ r \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -r \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi = -r$. Таким чином,

формула переходу до полярної системи координат у подвійному інтегралі має вигляд:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) r d\varphi dr. \quad (2.17)$$

Приклад. Обчисліть $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, якщо область D обмежена лініями

$$x^2 + y^2 - 2y = 0; \quad x^2 + y^2 - 4y = 0; \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x; \quad y = \sqrt{3}x.$$

Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 - 2y = 0$ можна записати у вигляді $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Воно задає коло з центром у точці $(0; 1)$ та радіусом $R = 1$. Аналогічно, $x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 4$ – коло з центром у точці $(0; 2)$ та радіусом $R = 2$; $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$; $y = \sqrt{3}x$ – прямі (рис. 2.10).

Оскільки область інтегрування обмежена частинами кіл, отже, досить складно задається у прямокутних декартових координатах, то для спрощення

обчислень у подвійному інтегралі доцільно перейти до полярних координат за

$$\text{формулами: } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad \text{Тоді} \quad x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 2r \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow r^2 - 2r \sin \varphi = 0$, звідки $r = 2 \sin \varphi$. Аналогічно, рівняння $x^2 + y^2 - 4y = 0$ в полярних координатах має вигляд: $r = 4 \sin \varphi$.

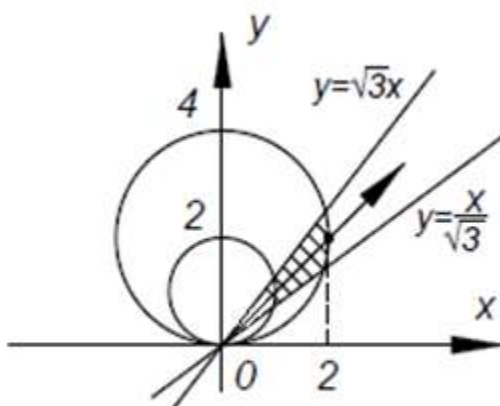


Рис. 2.10

З рівнянь прямих знайдемо кути їх нахилу до додатного напрямку осі Ox : з рівняння $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ маємо: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$; з рівняння $y = \sqrt{3}x$ маємо:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, у полярних координатах область D^* задається нерівностями:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \\ 2 \sin \varphi \leq r \leq 4 \sin \varphi. \end{cases} \quad \text{Тоді}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r^2 dr =$$

$$\left[\int_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} r^2 dr = \frac{r^3}{3} \Big|_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} = \frac{56}{3} \sin^3 \varphi \right] = \frac{56}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{56}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) =$$

$$= \frac{56}{3} \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{56}{3} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7}{9} (9\sqrt{3} - 11).$$

2.5. Застосування подвійного інтеграла

1. *Площа фігури.* З властивості 1 інтеграла по мірі фігури випливає, що інтеграл $\iint_D dx dy$ дорівнює площі області D :

$$\iint_D dx dy = S_D.$$

Приклад. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 3 - 2x$, $x = 0$.

Розв'язання. Задана фігура зображена на рисунку 2.9.

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{3-2x} dy = \int_0^1 y \Big|_{\sqrt{x}}^{3-2x} dx = \int_0^1 (3 - 2x - \sqrt{x}) dx = \left(3x - x^2 - \frac{2x^{1.5}}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 3 - 1 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (квадратних одиниць)}. \end{aligned}$$

2. *Об'єм циліндроїда.* Вище було доведено, що у випадку, коли функція $z = f(x; y)$ неперервна та невід'ємна в області D , інтеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ дорівнює об'єму циліндроїда, який знизу обмежений областю D , зверху – поверхнею $z = f(x; y)$, збоку – циліндричною поверхнею з твірною паралельною осі Oz :

$$\iint_D f(x; y) dx dy = V_{\text{циліндроїда}}.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями: $x^2 + y^2 = z$; $x + y = 3$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Розв'язання. Параболоїд $x^2 + y^2 = z$ і площина xOy ($z = 0$) мають одну спільну точку $O(0; 0; 0)$, а з площинами $x = 0$ та $y = 0$ параболоїд перетинається відповідно по параболом $y^2 = z$ та $x^2 = z$. З площиною $x + y = 3$ цей параболоїд перетинається по лінії l (рис. 2.11).

Отже, задане тіло є циліндричним з твірними бічної поверхні, паралельними осі Oz . Його нижньою основою є трикутник AOB , це проекція на площину $z = 0$ тієї частини параболоїда, що вирізана площинами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. Шуканий об'єм $V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$.

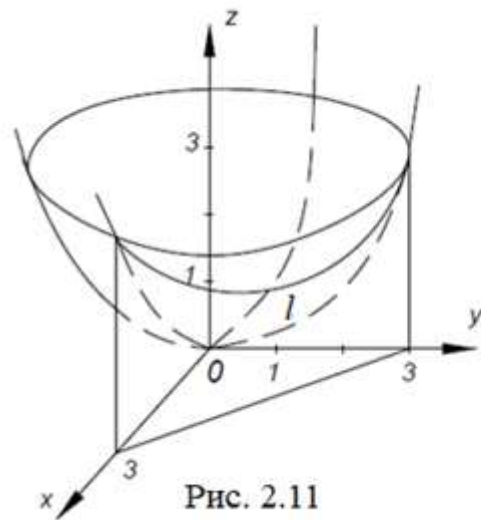


Рис. 2.11

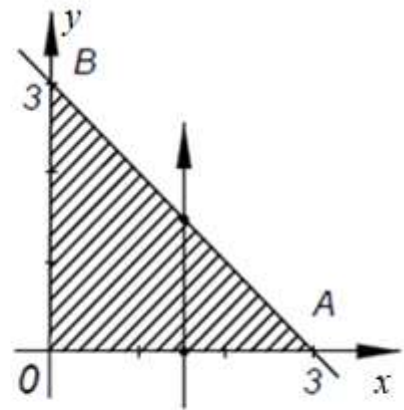


Рис. 2.12

Щоб перейти до повторних інтегралів, зобразимо область $D = \Delta AOB$ у площині xOy (рис. 2.12). $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 3 - x. \end{cases}$ Тоді

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \left[\int_0^{3-x} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{3-x} = \left(x^2(3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} \right) \right] = \\
 &= \int_0^3 \left(x^2(3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} \right) dx = \left(x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{(3-x)^4}{12} \right) \Big|_0^3 = \\
 &= 3^3 - \frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{12}3^4 = 13,5 \text{ кубічних одиниць.}
 \end{aligned}$$

3. *Маса пластини.* Двовимірна область D тут розглядається як пластинка. Введемо поняття поверхневої густини, тобто густини у точці $(x; y)$, аналогічно до поняття лінійної густини кривої. Тут замість довжини відрізка кривої, що містить цю точку, слід розглянути площу відповідної частинки пластини.

Нескладно довести, що маса m плоскої пластини, що співпадає з областю D і має густину $\rho(x; y)$ у кожній точці цієї області з координатами $(x; y)$, визначається формулою:

$$\iint_D \rho(x; y) dx dy = m.$$

Приклад. Знайдіть масу квадратної пластини зі стороною a , якщо її поверхнева густина у кожній точці пропорційна квадрату відстані від цієї точки до одної з вершин квадрата.

Розв'язання. Розмістимо квадрат у системі координат xOy так, як показано на рисунку 2.13. Початок координат знаходиться у тій вершині, про яку йдеться в умові задачі. Тоді у довільній точці квадрата $\rho(x; y) = k(x^2 + y^2)$, де k – коефіцієнт пропорційності ($k > 0$). Маса пластини дорівнює

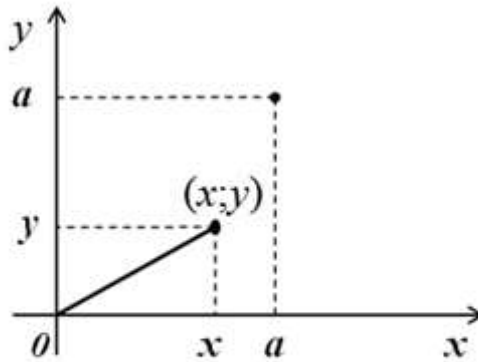


Рис. 2.13

$$m = \iint_D \rho(x; y) dx dy = k \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \text{ Квадрат задається системою нерівностей } \begin{cases} 0 \leq x \leq a; \\ 0 \leq y \leq a. \end{cases} \text{ Тоді } m = k \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy = \left[\int_0^a (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = ax^2 + \frac{a^3}{3} \right] = k \int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = k \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2ka^4}{3} \quad (\text{одиниць маси}).$$

4. Координати центру ваги пластини, що співпадає з областю D і має поверхневу густину $\rho(x; y)$ у точці з координатами $(x; y)$, знаходять за формулами:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \cdot \rho(x; y) dx dy}{\iint_D \rho(x; y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \cdot \rho(x; y) dx dy}{\iint_D \rho(x; y) dx dy}.$$

Вирази $M_y = \iint_D x \cdot \rho(x; y) dx dy$, $M_x = \iint_D y \cdot \rho(x; y) dx dy$ називають *статичними моментами* фігури D відносно осей Oy та Ox відповідно. Враховуючи те, що маса пластини $m = \iint_D \rho(x; y) dx dy$, отримаємо такі формули для координат центру ваги: $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$.

Приклад. Обчисліть статичні моменти відносно осей координат та координати центру ваги сектора круга $x^2 + y^2 \leq 4$, що знаходиться у першій чверті між віссю Ox та прямою $y = \sqrt{3}x$, якщо поверхнева густина $\rho(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Розв'язання. Зобразимо сектор (рис. 2.14) і знайдемо його статичні моменти відносно осей Oy та Ox .

$$M_y = \iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad M_x = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

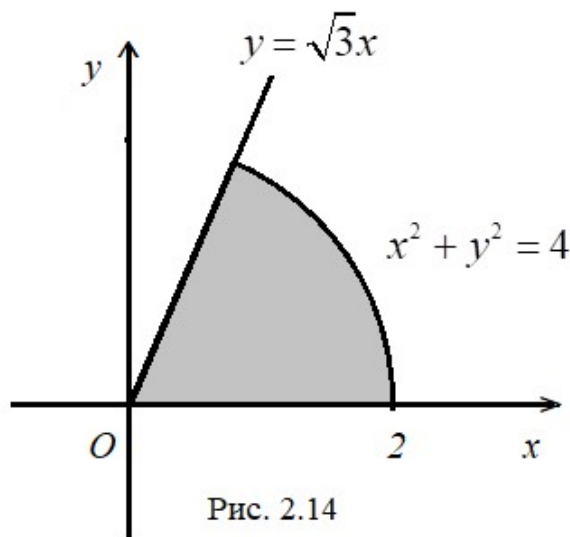


Рис. 2.14

Враховуючи форму області інтегрування та вигляд підінтегральних функцій, доречно перейти до полярних координат. Запишемо рівняння кола

$x^2 + y^2 = 4$ у полярних координатах: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 4 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2$,

тож сектор матиме вигляд D^* :
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

Тоді статичні моменти дорівнюють:

$$M_y = \iint_{D^*} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 r \cos \varphi dr = \sin \varphi \Big|_0^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3},$$

$$M_x = \iint_{D^*} \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 r \sin \varphi dr = -\cos \varphi \Big|_0^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 =$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1.$$

Знайдемо масу пластинки:

$$m = \iint_{D^*} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 r dr = \varphi \Big|_0^{\pi/3} \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Координати центру ваги: $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, $\bar{y} = \frac{3}{2\pi}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Змініть порядок інтегрування:

а) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$; б) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{2-y} f(x, y) dx$;

в) $\int_{-2}^0 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$.

2. Обчисліть подвійні інтеграли:

а) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, область D обмежена лініями: $y = x$; $x = 2$; $xy = 1$;

б) $\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy$, область D обмежена лініями: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$.

3. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями

а) $y^2 = 4x$; $y = 2x$; б) $y = \frac{9}{x}$; $y = x$; $x = 6$.

4. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями

а) $y = x^2$; $x + y + z = 2$; $z = 0$;

б) $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$;

в) $z = 1 - y^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

5. Обчисліть масу пластини D , що обмежена лініями $4x - 4y + \pi = 0$, $x = 0$, $y = 0$ і має густину $\rho = \sin y + \cos 2y$.

6. Обчисліть масу пластинки D , що обмежена лініями $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$, ($y \geq 0$) і має густину $\rho = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

7. Знайдіть координати центру ваги пластинки, що обмежена кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 < a = \text{const}$, і має густину $\rho = 1$.

2.6. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій області D ($D \subset \mathbb{R}^2$) та криволінійним інтегралом по замкненому контуру l , що обмежує цю область. Припустимо, що область D є правильною у напрямі обох координатних осей Oy та Ox і може бути задана нерівностями: $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ (рис. 2.15).

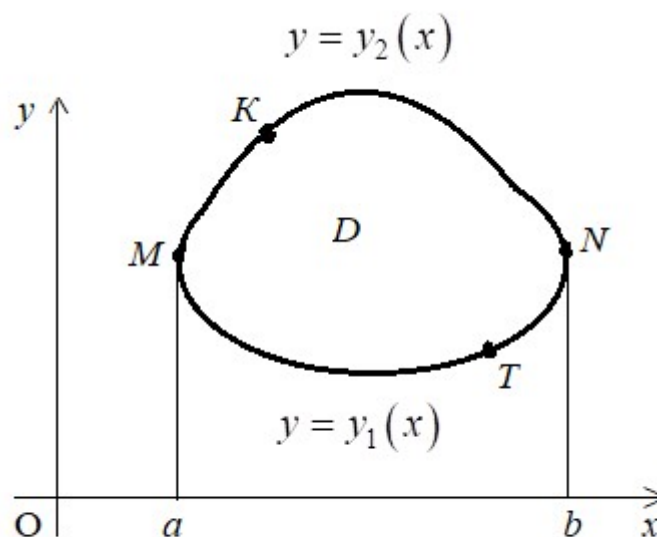


Рис. 2.15

Нехай у області D визначені неперервні функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$, що мають неперервні частинні похідні. Розглянемо подвійний інтеграл

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x; y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [P(x; y_2(x)) - P(x; y_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Зауважимо, що визначений інтеграл $\int_a^b P(x; y_2(x)) dx$ дорівнює криволінійному

інтегралу $\int_{MKN} P(x; y) dx$. Так само $\int_a^b P(x; y_1(x)) dx = \int_{MTN} P(x; y) dx$, звідки, зміни-

вши напрям проходження кривої MTN на протилежний, маємо:

$$-\int_a^b P(x; y_1(x)) dx = \int_{NTM} P(x; y) dx. \text{ Отже,}$$

$$\iint_D \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} dx dy = \int_{MKN} P(x; y) dx + \int_{NTM} P(x; y) dx = \oint_l P(x; y) dx, \text{ де межу області } D$$

обходимо за годинниковою стрілкою.

Зауважимо, що якби частиною межі області D був прямолінійний відрізок, паралельний осі Oy , то інтеграл від $P(x; y)$ уздовж нього дорівнював би нулю.

Отже, рівність

$$\iint_D \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} dx dy = \oint_l P(x; y) dx \quad (2.18)$$

у цьому випадку також виконана. Аналогічно знайдемо:

$$\iint_D \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} dx dy = -\oint_l Q(x; y) dy. \quad (2.19)$$

Тут контур l також обходимо за годинниковою стрілкою. Тепер від обох частин рівності (2.19) відніmemo відповідні частини рівності (2.18) та змінимо напрям обходу контура l на протилежний. Маємо:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_l P(x; y) dx + Q(x; y) dy, \quad (2.20)$$

де контур l проходимо проти годинникової стрілки. Отримана формула (2.20) носить ім'я англійського фізика і математика Д. Гріна (1793 – 1841).

Зауваження. Додатним напрямом обходу контура інтегрування у криволінійному інтегралі вважається напрям проти годинникової стрілки, тобто такий,

при якому область, що обмежена цим контуром, залишається ліворуч. Надалі, якщо контур обходимо у додатному напрямку, писатимемо l^+ , якщо у від'ємному l^- .

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint_{l^+} -x^2 y dx + xy^2 dy$, використовуючи формулу Гріна, де l – коло $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання. $P(x, y) = -x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, $Q(x, y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.

Отже, $\oint_{l^+} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy$.

Оскільки областю інтегрування є круг, то перейдемо до полярних координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad D^* : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тоді $\iint_{D^*} (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = 8\pi$.

2.7. Незалежність криволінійного інтегралу по координатах від шляху інтегрування

Розглянемо криволінійний інтеграл $\int_{MN} P(x; y) dx + Q(x; y) dy$ уздовж деякої кривої l , що з'єднує точки M та N . Вважатимемо, що функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$ мають неперервні частинні похідні у деякій області D , що містить цю криву. З'ясуємо, за яких умов цей криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від положення початкової та кінцевої точок M та N .

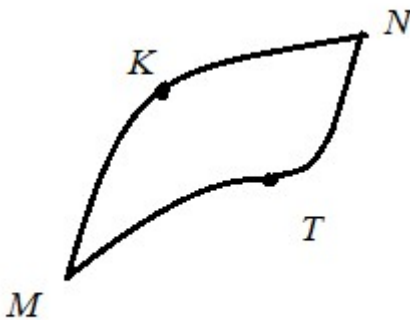


Рис. 2.16

Розглянемо дві довільні криві MKN та MTN , що лежать в області D та з'єднують точки M і N (рис. 2.16).

Нехай $\int_{MKN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{MTN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy$, тобто

$$\int_{MTN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy - \int_{MKN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \quad \text{або}$$

$\int_{MTN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy + \int_{NKM} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$. Остання рівність означає, що $\oint_{l^+} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$, де l – довільний замкнений контур, що проходить через точки M та N . Справедливе наступне твердження:

Теорема 2.1. *Нехай в усіх точках деякої області D функції $P(x; y)$ та $Q(x; y)$ разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл по будь-якому замкненому контуру l , що лежить у цій області, дорівнював нулю, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Доведення. Виконання достатньої умови безпосередньо випливає з формули Гріна, адже виконання умови (2.21) означає: $\oint_{l^+} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \iint_{D_l} \left(\frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} \right) dx dy = 0$ (D_l – область, обмежена контуром l).

Доведемо необхідну умову. Нехай $\oint_{l^+} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ для будь-якого контура l , що лежить в області D , при цьому $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ хоча б у одній

точці $(x_0; y_0)$. Нехай $\frac{\partial Q(x_0; y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0; y_0)}{\partial y} > 0$, тоді знайдеться область D' ($D' \subset D$), у якій виконано $\frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} > \delta > 0$ ($\delta - const$). Тоді

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x; y)}{\partial y} \right) dx dy > \iint_{D'} \delta dx dy = \delta \iint_{D'} dx dy = \delta S_{D'} > 0, \text{ тут } S_{D'} - \text{ площа області } D'.$$

Отже, якщо умова (2.21) порушена хоча б в одній точці, то, згідно з формулою Гріна, $\oint_{l'} P(x; y)dx + Q(x; y)dy \neq 0$ (l' – межа D'), що суперечить умові.

Отримане протиріччя доводить теорему.

Можна довести, що виконання умови $\frac{\partial Q(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x; y)}{\partial y}$ рівносильне тому, що вираз $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x; y)$, тобто $\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} = P(x; y)$, $\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} = Q(x; y)$. Тоді вектор $P(x; y)\bar{i} + Q(x; y)\bar{j}$ є градієнтом цієї функції. Функцію $u(x; y)$ називають *потенціалом* цього вектора.

Теорема 2.2. Якщо $\frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$, то $\int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ уздовж будь-якої кривої, що з'єднує точки M та N , дорівнює різниці значень потенціалу $u(x; y)$ у цих точках

$$\int_{MN} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = u(N) - u(M).$$

Отже, криволінійний інтеграл від повного диференціалу деякої функції $u(x; y)$ уздовж кривої MN (де $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$) не залежить від форми цієї кривої і дорівнює $u(x_2; y_2) - u(x_1; y_1)$. Тому цей інтеграл зазвичай записують у вигляді:

$$\int_{M(x_1; y_1)}^{N(x_2; y_2)} P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисліть $\oint_{l^+} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, де l – контур трикутника ABC , $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$, використовуючи формулу Гріна.

2. Обчисліть $\int_{A(0; 0)}^{B(\pi; \pi)} (x + y)dx + (x - y)dy$ по різних контурах:

а) по кривій $y = x + \sin x$; б) по прямій AB . Чому значення вказаних криволінійних інтегралів збігаються?

2.8. Потрійний інтеграл

1. *Задача про обчислення маси тіла.* Застосуємо загальну схему введення інтегралу по мірі фігури до тривимірного тіла V , що обмежене замкненою поверхнею S . Розіб'ємо тіло довільним чином на n частин, що мають об'єми

$\Delta V_i, i = \overline{1, n}$. Ранг розбиття – $\lambda = \max_{i=1, n}(\Delta V_i)$, $\rho(P) = \rho(x; y; z)$ – густина у довільній точці $P \in V$ ($\rho(x; y; z) \geq 0, (x; y; z) \in V$).

У кожній частині довільним чином виберемо точку $P_i, i = \overline{1, n}$, та знайдемо $\rho(P_i) = \rho(x_i; y_i; z_i)$. Наближеним значенням маси тіла є сума $\rho(P_1)\Delta V_1 + \rho(P_2)\Delta V_2 + \dots + \rho(P_n)\Delta V_n$. Тоді точне значення маси:

$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(P_i) \cdot \Delta V_i$. Якщо ця границя існує, скінченна, не залежить від способу розбиття фігури та вибору точок $P_i, i = \overline{1, n}$, то її називають потрійним інтегралом від функції $\rho(x; y; z)$ по фігурі V . Пишуть

$$m = \iiint_V \rho(x; y; z) dx dy dz. \quad (2.22)$$

2. *Обчислення потрійного інтеграла*. Для довільної неперервної в усіх точках тривимірної області V функції $f(x; y; z)$ маємо:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = \iiint_V f(x; y; z) dx dy dz, \quad (2.23)$$

$dx dy dz$ – елемент об'єму. Зауважимо, що потрійному інтегралу $\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz$ притаманні усі властивості інтеграла по мірі фігури.

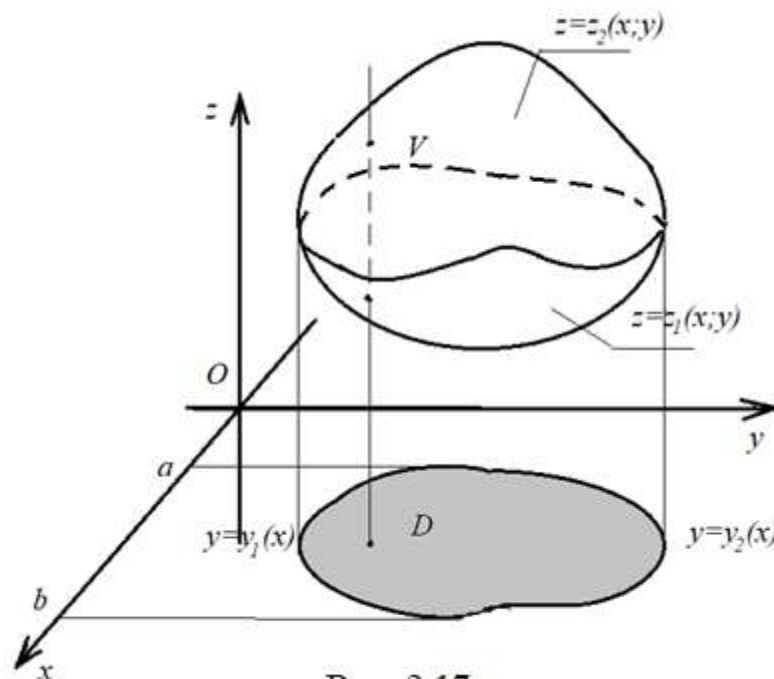


Рис. 2.17

Припустимо, що область інтегрування V (рис. 2.17) (обмежена поверхнею S) має такі властивості:

1) будь-яка пряма, паралельна осі Oz , що проходить через внутрішню точку області V , перетинає поверхню S у двох точках (точці входу та точці виходу);

2) вся область V проектується на площину xOy у правильну двовимірну область D ;

3) будь-яка частина області V , що відтинається площиною, паралельною до якоїсь з координатних площин, також має властивості 1) та 2).

Поверхня, де розташовані точки входу, задається рівнянням $z = f_1(x; y)$, її називають поверхнею входу, відповідно $z = f_2(x; y)$ – поверхнею виходу. Можна довести, що справедлива формула:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (2.22)$$

Підінтегральну функцію $f(x; y; z)$ спочатку інтегрують по Z , одержуючи при цьому функцію від x та y , яка потрапляє під знак подвійного інтегралу по області D (що є проекцією V на площину xOy). Якщо D задається системою

нерівностей: $\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \end{cases}$ то, згідно з формулою (2.13), маємо:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz, \quad (2.23)$$

що зводить потрібний інтеграл до повторного, трикратного інтеграла. Якщо ж

область D є правильною в напрямі осі Ox , $D: \begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta, \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y), \end{cases}$ то порядок ін-

тегрування буде іншим. Взявши до уваги формулу (2.14), отримаємо:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (2.24)$$

Приклад. Обчисліть $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, де область V обмежена площинами

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Розв'язання. Зобразимо область V (рис. 2.18) і запишемо відповідну їй систему трьох нерівностей. Рівняннями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ задано координатні

площини, $x + y + z = 1$ – площина, яка перетинає осі координат у точках $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$. Таким чином, область інтегрування – тетраедр $OACB$

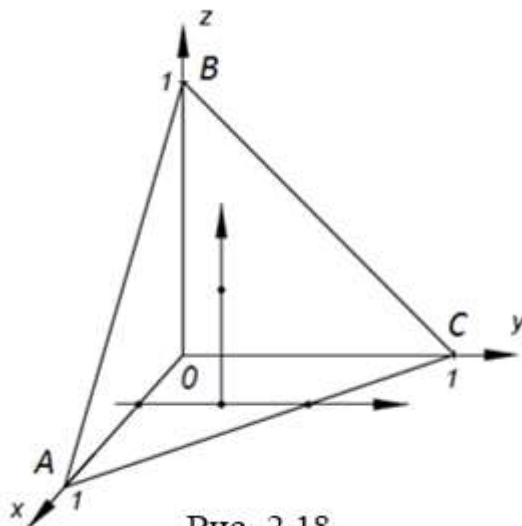


Рис. 2.18

Область інтегрування можна описати нерівностями $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$. (Рівняння прямої AC – лінії перетину площин $x + y + z = 1$ і $z = 0$ має вигляд $x + y = 1$ або $y = 1 - x$ в площині xOy). Перейдемо до повторних інтегралів і обчислимо їх.

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{1-x-y} \int_0^{1-x-y} dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{1-x-y} \cdot \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \\ &= \int_0^1 dx \cdot \left(y \Big|_0^{1-x} \right) = \int_0^1 (1-x) dx = \left(x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. *Перехід до циліндричних координат.* Розглянемо довільну точку $P(x; y; z)$ у прямокутній декартовій системі координат.

Нехай її проекцією на площину xOy є точка P' (рис. 2.19) із полярними координатами $(\varphi; r)$, тоді $(\varphi; r; z)$ називають циліндричними координатами точки

P . Таким чином, у циліндричній системі координат положення точки P визначається трьома числами, перші два з яких є полярними координатами точки P' у площині xOy , третє – апліката точки P .

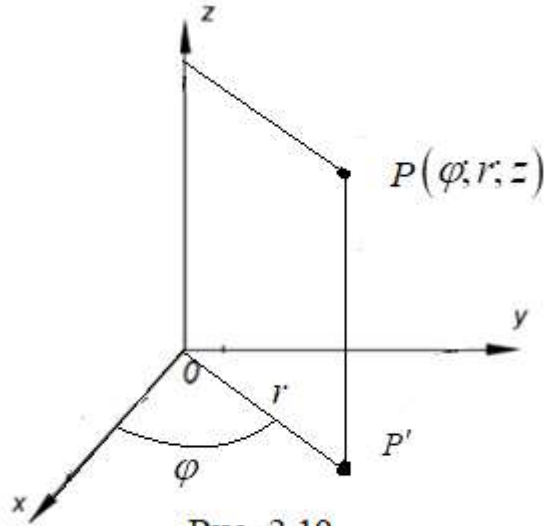


Рис. 2.19

З прямокутними декартовими циліндричні координати пов'язані формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Для переходу від потрійного інтегралу по області V у прямокутних декартових координатах до інтегралу по відповідній області V^* у циліндричних координатах справедлива формула:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \varphi; r \sin \varphi; z) |I(\varphi; r; z)| d\varphi dr dz.$$

$$\text{Тут } I(\varphi; r; z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -r \text{ — яacobian перетворення.}$$

Отже, остаточно маємо формулу:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi; z) r d\varphi dr dz. \quad (2.25)$$

Приклад. Обчисліть $\iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, де область V обмежена поверхнями $4z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

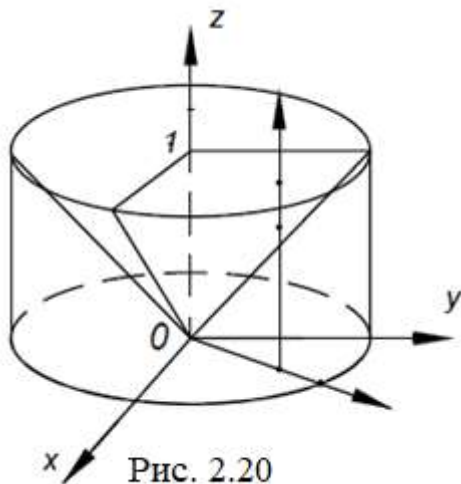


Рис. 2.20

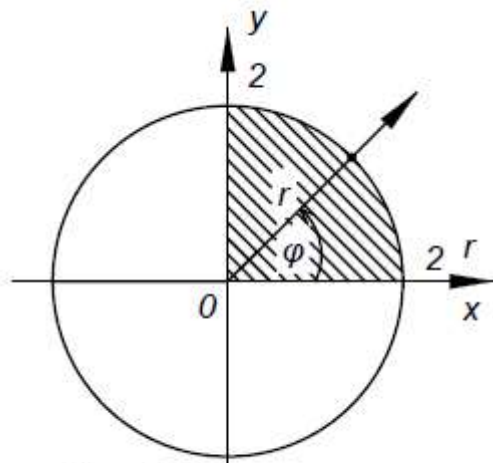


Рис. 2.21

Розв'язання. Зобразимо область V . Вона розташована в першому октанті та обмежена конусом $4z^2 = x^2 + y^2$, координатними площинами xOz , yOz і площиною $z = 1$ (рис. 2.20). Проекцію області V на площину xOy є чверть кола з центром у точці $O(0;0)$ і радіусом $R = 2$, адже конус $4z^2 = x^2 + y^2$ перетинає площину $z = 1$ по колу $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$ (рис. 2.21).

При обчисленні цього потрібного інтеграла зручно перейти до циліндричних координат. У циліндричних координатах область інтегрування описується нерівностями

$$V^* : \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 2, & (4z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 4z^2 = r^2; \Rightarrow z = \frac{1}{2} r \ (z \geq 0)). \\ \frac{1}{2} r \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz &= \iiint_{V^*} \frac{r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{\sqrt{z}} r d\varphi dr dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{1}{2}r}^1 z^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d(\sin \varphi) \int_0^2 r^3 dr \left(2\sqrt{z} \Big|_{\frac{1}{2}r}^1 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \frac{\sin^2 \phi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^2 r^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} r^{\frac{1}{2}} \right) dr = 1 \cdot \int_0^2 \left(r^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} r^{\frac{7}{2}} \right) dr = \\
&= \left(\frac{r^4}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{9} r^{\frac{9}{2}} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{2}{9\sqrt{2}} \cdot 2^4 \cdot \sqrt{2} = 4 - \frac{32}{9} = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

4. *Перехід до сферичних координат.* У сферичній системі координат положення точки P визначається трьома числами φ, ρ, θ , де ρ – відстань від точки P до початку координат – довжина так званого радіус-вектора \overline{OP} цієї точки, φ – кут між проекцією радіус-вектора на площину xOy та додатним напрямом осі Ox , θ – кут між радіус-вектором та додатним напрямом осі Oz . Зауважимо, що $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Знайдемо зв'язок між прямокутними декартовими та сферичними координатами точки P (рис. 2.22).

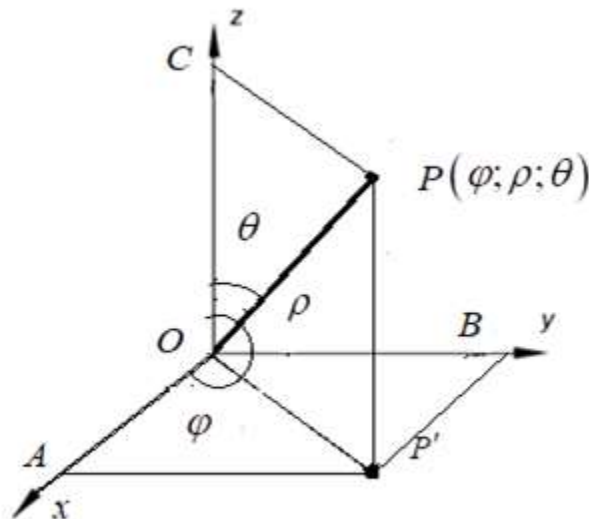


Рис. 2.22

З прямокутного трикутника OPC ($\angle C = 90^\circ$) маємо: $CP = OP' = \rho \sin \theta$, $OC = \rho \cos \theta$. Тепер з прямокутного трикутника $OP'A$ ($\angle A = 90^\circ$) знайдемо: $OA = OP' \cos \varphi$, $OB = OP' \sin \varphi$. Таким чином, формули, що виражають прямокутні декартові координати точки $(x; y; z)$ через сферичні, мають вигляд:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Знайдемо якобіан цього перетворення координат

$$I(\varphi; \rho; \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \rho \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & \cos \theta & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \theta (\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi) + \rho \sin \theta (\rho \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) = \rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \theta = \rho^2 \sin \theta.$$

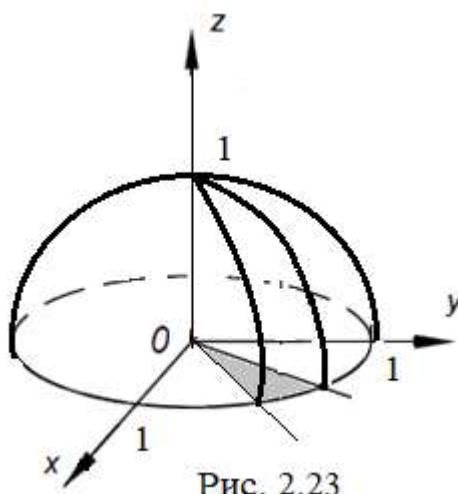
Отже, для переходу від потрійного інтеграла по області V у прямокутній декартовій системі координат до інтеграла по відповідній області V^* у сферичних координатах використовують формулу:

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi; \rho \sin \theta \sin \varphi; \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\rho d\theta. \quad (2.26)$$

Приклад. Обчисліть $\iiint_V z dx dy dz$, де область V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = y$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$ й розташована у першому октанті.

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування (рис. 2.23). Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ задає сферу з центром у початку координат радіуса 1, площини $x = y$ та $y = \sqrt{3}x$ проходять через вісь Oz відповідно під кутами $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{\pi}{3}$ до площини xOz . З площиною xOy сфера перетинається уздовж кола $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Отже, у сферичних координатах область інтегрування V^* задається нерівностями:

$$0 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



Тому, згідно з формулою (2.26), маємо:

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{V^*} \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\varphi \, \rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\ &= \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta = -\frac{\pi}{192} \cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{96}. \end{aligned}$$

2.9. Застосування потрійного інтеграла

1. Об'єм тіла $V = \iiint_V dx \, dy \, dz$.
2. Маса тіла V з густиною $\rho(x; y; z)$: $m = \iiint_V \rho(x; y; z) \, dx \, dy \, dz$.
3. Центр ваги тіла V з густиною $\rho(x; y; z)$ має координати:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \cdot \rho(x; y; z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V \rho(x; y; z) \, dx \, dy \, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \cdot \rho(x; y; z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V \rho(x; y; z) \, dx \, dy \, dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z \cdot \rho(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x; y; z) dx dy dz}.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \frac{9}{2}z = x^2 + y^2.$$

Розв'язання. $V = \iiint_V dx dy dz$. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ – півкуля ($z \geq 0$) радіуса

$R = 3$ з центром в точці $O(0; 0; 0)$; $\frac{9}{2}z = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання навколо осі Oz (рис. 2.24).

Знайдемо лінію перетину сфери та параболоїда.

$$\begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ \frac{9}{2}z = x^2 + y^2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} = \frac{2}{9}(x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - x^2 - y^2 = \frac{4}{81}(x^2 + y^2)^2.$$

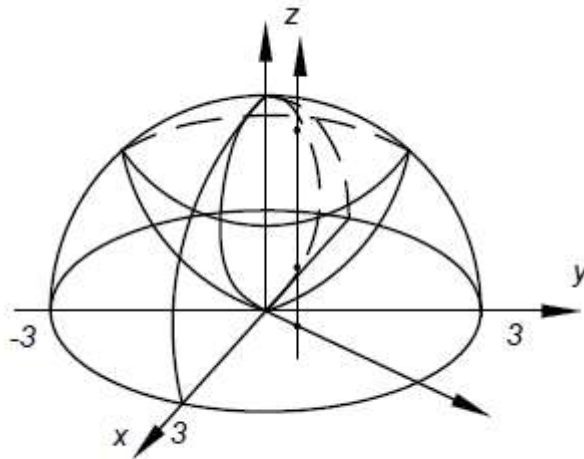


Рис. 2.24

Позначимо $x^2 + y^2 = t$, де $t > 0$. Одержимо рівняння $4t^2 + 81t - 729 = 0$, коренями якого є $t_1 = -27 < 0$, $t_2 = \frac{27}{4}$. Маємо: $x^2 + y^2 = \frac{27}{4}$. Отже, проекцією заданого тіла є круг у площині xOy радіуса $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Оскільки тіло симетричне відносно осі Oz , то $V = 4V_1$, де V_1 – частина тіла, розташована в першому октанті. В циліндричних координатах тіло V_1 описується нерівностями:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{2}{9} r^2 \leq z \leq \sqrt{9 - r^2}. \quad \text{Отже,}$$

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} r dr \int_{\frac{2}{9}r^2}^{\sqrt{9-r^2}} dz = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} r \left(\sqrt{9-r^2} - \frac{2}{9} r^2 \right) dr = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(\sqrt{9-r^2} \right)^3 - \frac{2}{9} \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \\ &= 4\varphi \Bigg|_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{3} \left(\left(\sqrt{9 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right)^3 - 3^3 \right) - \frac{1}{18} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \left(-\frac{9}{8} + 9 - \frac{81}{32} \right) = 2\pi \left(9 - 3\frac{21}{32} \right) = 10\frac{11}{16}\pi \text{ кубічних одиниць.} \end{aligned}$$

Приклад. Знайти масу тіла, обмеженого циліндричною поверхнею $x^2 = 2y$ і площинами $y+z=1$, $2y+z=2$, якщо в кожній його точці об'ємна густина дорівнює ординаті цієї точки.

Розв'язання. За умовою в точці $P(x, y, z)$ густина $\rho(P) = y$. Маса тіла може бути знайдена за формулою $m = \iiint_V \rho(P) dx dy dz = \iiint_V y dx dy dz$, де V – область, яку займає дане тіло. Побудуємо область V (рис. 2.25).

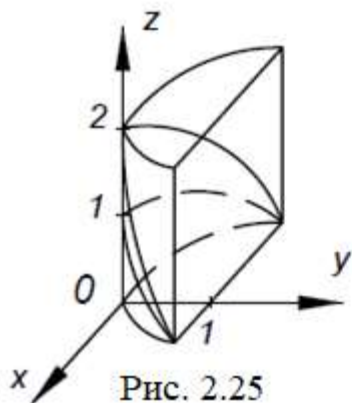


Рис. 2.25

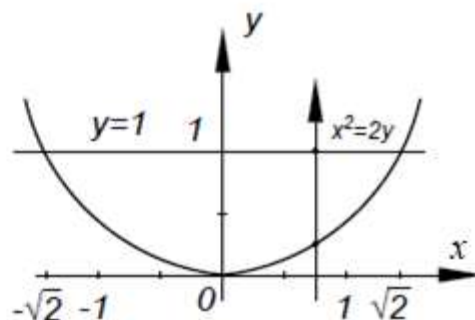


Рис. 2.26

$x^2 = 2y$ – параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $x^2 = 2y$ в площині xOy , а твірні – прямі, паралельні осі Oz ; $y + z = 1$ – площина, паралельна осі Ox , яка перетинає вісь Oy при $y = 1$, а Oz – при $z = 1$. Площина $2y + z = 2$ ($\frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$) паралельна осі Ox та перетинає осі Oy і Oz відповідно при $y = 1$, $z = 2$. Точки тіла задовольняють нерівність $1 - y \leq z \leq 2 - 2y$. Площини $1 - y = z$ та $z = 2 - 2y$ перетинаються по прямій $y = 1$ в площині $z = 0$. Проекція цього тіла на площину xOy – це точки, які лежать між параболою $x^2 = 2y$ і прямою $y = 1$ (рис. 2.26).

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x \pm \sqrt{2}. \text{ Тоді вказана проекція задається нерівностями:}$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \quad \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq 1.$$

Отже,

$$m = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^1 y dy \int_{1-y}^{2(1-y)} dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^1 y dy \cdot \left(z \Big|_{1-y}^{2(1-y)} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^1 y(1-y) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^1 = \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} \right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} \right) dx = \\
&= \frac{2}{8} \left(\frac{4x}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{4}{5} \sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 7} \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{21} \right) = \sqrt{2} \frac{24}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{8\sqrt{2}}{35} \text{ одиниць маси.}
\end{aligned}$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.
2. Обчисліть координати центру ваги тіла, обмеженого поверхнями $x = 2$, $y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = y + 2$, якщо густина $\rho = 2z$.
3. Обчисліть масу тіла, обмеженого поверхнями $z = 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$; з густиною $\rho = x^2 + y^2$.

2.10. Поверхневий інтеграл першого роду

1. *Означення.* Нехай у прямокутній системі координат $Oxyz$ задана деяка область V , у якій лежить поверхня σ , що обмежена просторовою лінією l . У цьому випадку кажуть, що поверхня *натягнута* на контур l .

У кожній точці області V задана деяка функція $F(x; y; z)$. Розіб'ємо поверхню довільним чином на n частин σ_i , площі яких дорівнюють $\Delta\sigma_i$, $i = \overline{1; n}$.

Найбільшу з відстаней між двома точками поверхні σ_i назвемо діаметром цієї поверхні і позначимо через $d(\sigma_i)$. Рангом розбиття поверхні назвемо число $\lambda = \max_{i=1, n} d(\sigma_i)$. У кожній такій частині поверхні виберемо довільну точку

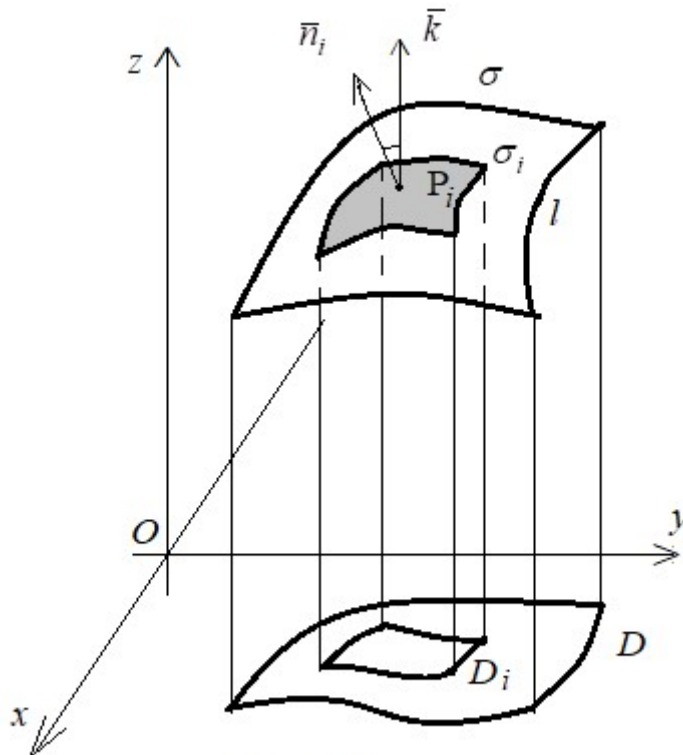


Рис. 2.27

$P_i(x_i; y_i; z_i)$ і знайдемо $F(x_i; y_i; z_i)$. Складемо суму $\sum_{i=1}^n F(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta\sigma_i$. Поверхневим інтегралом першого роду назвемо границю цієї суми, коли ранг розбиття прямує до нуля (якщо ця границя існує, скінченна і не залежить від способу розбиття поверхні та вибору точок P_i). Пишуть:

$$\iint_{\sigma} F(x; y; z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Зауважимо, що поверхневий інтеграл першого роду має усі властивості інтеграла по мірі фігури (мірою тепер є площа поверхні).

2. *Обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійний інтеграл.* Припустимо, що рівняння поверхні можна записати у явному вигляді $z = f(x; y)$, де $(x; y) \in D$. Тут D – проекція поверхні σ на площину xOy (рис. 2.27), припустимо також, що функції $f(x; y)$, $f'_x(x; y)$, $f'_y(x; y)$ є неперервними в області D , а функція $F(x; y; z)$ неперервна в усіх точках поверхні σ . При розбитті поверхні на частини кожна з них проектується у відповідну область D_i з площею ΔD_i . Оскільки поверхня розбита на достатньо малі частинки, слід вважати справедливою наближену рівність: $\Delta D_i \approx \Delta\sigma_i \cdot \cos \gamma_i$, $i = \overline{1; n}$. Тут γ_i – кут

між нормальним вектором поверхні $z - f(x; y) = 0$ у точці P_i та віссю Oz . Во-

чевидь, $\vec{n}_i = (-f'_x(x_i; y_i); -f'_y(x_i; y_i); 1)$, $\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(x_i; y_i))^2 + (f'_y(x_i; y_i))^2}}$.

Тоді інтегральну суму можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n F(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n F(x_i; y_i; f(x_i; y_i)) \cdot \frac{\Delta D_i}{\cos \gamma_i} = \sum_{i=1}^n F(x_i; y_i; f(x_i; y_i)) \cdot \Delta D_i \cdot \sqrt{1 + (f'_x(x_i; y_i))^2 + (f'_y(x_i; y_i))^2}.$$

Такий зв'язок між інтегральними сумами дозволяє перейти до подвійного інтегралу за формулою

$$\iint_{\sigma} F(x; y; z) d\sigma = \iint_D F(x; y; z(x; y)) \sqrt{1 + (f'_x(x; y))^2 + (f'_y(x; y))^2} dx dy. \quad (2.27)$$

Зауважимо, що нормальним вектором до поверхні у точці P_i було взято вектор, який утворює гострий кут з віссю Oz . Це, так би мовити, нормальний вектор верхньої сторони поверхні, зображеної на рисунку 2.27. Можна було б вважати нормальним вектором протилежний до нього вектор з координатами $(f'_x(x_i; y_i); f'_y(x_i; y_i); -1)$, тобто обрати нижню сторону поверхні або, як кажуть, змінити її *орієнтацію*. У цьому випадку $\Delta D_i \approx \Delta\sigma_i \cdot |\cos \gamma_i|$, $i = \overline{1; n}$, і формула (2.27) залишиться справедливою. Отже, значення поверхневого інтегралу першого роду не залежить від орієнтації поверхні.

Якщо поверхня інтегрування замкнена (тобто поділяє тривимірний простір на дві частини: внутрішню та зовнішню відносно цієї поверхні), то поверхневий інтеграл позначають так: $\oiint_{\sigma} F(x; y; z) d\sigma$.

Приклад. Обчисліть $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де σ – поверхня конуса $z^2 = x^2 + y^2$,

що розташована між площинами $z = 0$ та $z = 1$.

Розв'язання. Запишемо рівняння верхньої половини конуса у вигляді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Знайдемо частинні похідні: $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Тоді

$$\sqrt{1 + (z'_x(x; y))^2 + (z'_y(x; y))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Отже, $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D – круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Для

обчислення цього подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат. Тоді

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

3. Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

1. $\iint_{\sigma} d\sigma = S_{\sigma}$ – площа поверхні σ .

2. Масу поверхні σ , поверхнева густина якої у кожній точці задана функцією $\rho(x; y; z)$ від її координат, обчислюють за формулою $m = \iint_{\sigma} \rho(x; y; z) d\sigma$.

3. Координати центру ваги поверхні σ з густиною $\rho(x; y; z)$ визначені формулами:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x \cdot \rho(x; y; z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x; y; z) d\sigma}; \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y \cdot \rho(x; y; z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x; y; z) d\sigma}; \quad \bar{z} = \frac{\iint_{\sigma} z \cdot \rho(x; y; z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \rho(x; y; z) d\sigma}.$$

Вирази $M_{yz} = \iiint_{\sigma} x \cdot \rho(x; y; z) d\sigma$, $M_{xz} = \iiint_{\sigma} y \cdot \rho(x; y; z) d\sigma$,

$M_{xy} = \iiint_{\sigma} z \cdot \rho(x; y; z) d\sigma$ називають статичними моментами поверхні відносно

площин yOz , xOz та xOy відповідно. Отже, маємо такі формули для знаходження координат центру ваги тіла:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисліть $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, де σ – частина площини $x+y+z=1$, що знаходиться у першому октанті.

2. Обчисліть масу півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, густина якої визначається функцією $\rho(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Знайдіть координати центру ваги тієї частини поверхні параболоїда $z = 2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, яка розташована над площиною $z = 0$.

2.11. Елементи теорії поля

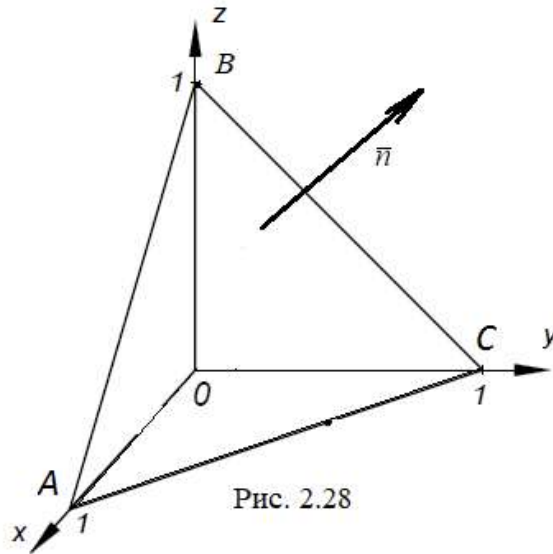
Означення. Нехай у будь-якій точці з координатами $(x; y; z)$ області Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) визначено вектор $\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$. Тоді кажуть, що в цій області задане *векторне поле*. Прикладами векторних полів можуть бути електричне та магнітне поля, поле швидкостей часточок рідини або газу у гідродинаміці. Розглянемо основні характеристики векторних полів.

Потоком векторного поля через поверхню σ в напрямі її вектора нормалі (з напрямними косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$) називають поверхневий інтеграл

$$\Pi_{\sigma}(\vec{F}) = \iint_{\sigma} (P(x; y; z)\cos\alpha + Q(x; y; z)\cos\beta + R(x; y; z)\cos\gamma) d\sigma. \quad (2.28)$$

Термін «потік» прийшов з гідродинаміки і пізніше став однією з характеристик інших векторних полів. Для розуміння значення цього терміну у гідродинаміці розглянемо дещо спрощену ситуацію. Нехай всередині труби тече рідина зі сталою швидкістю \vec{v} . У трубі встановлено пластинку σ площі S (наприклад, фільтр у формі многокутника). Потоком вектора \vec{v} через пластинку назвемо об'єм рідини, що протече через пластинку за одиницю часу. Якщо пластинка встановлена перпендикулярно вектору \vec{v} , то шуканий об'єм дорівнює об'єму прямої призми з площею основи S і висотою $|\vec{v}|$ (адже $|\vec{v}|$ – це відстань, яку частинки рідини пройдуть за одиницю часу). Отже, потік рідини через ту сторону пластинки, вектор нормалі до якої напрямлений так само, як вектор \vec{v} , дорівнює $S \cdot |\vec{v}|$. Потік через іншу сторону пластинки дорівнює протилежному числу: $-S \cdot |\vec{v}|$. Якщо пластинка встановлена так, що вектор нормалі відповідної її сторони утворює кут φ з вектором \vec{v} , то потік дорівнює об'єму похилої призми: $\Pi_{\sigma}(\vec{v}) = S \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$. Як бачимо, знак $\Pi_{\sigma}(\vec{v})$ залежить від того, яку сторону поверхні розглядають, тобто, яким є кут φ : гострим чи тупим. Якщо ж пластинка встановлена так, що вектор \vec{v} лежить у її площині, то $\Pi_{\sigma}(\vec{v}) = 0$. Означення потоку за формулою (2.28) відповідає випадку, коли вектор $\vec{v} = \vec{F}(x; y; z)$ не є сталим, а поверхня не обов'язково є плоскою.

Приклад. Знайти потік векторного поля $\vec{F}(x; y; z) = (2z - x)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + 3z\vec{k}$ через поверхню трикутника ABC , вирізаного з площини $x + y + z - 1 = 0$ координатними площинами, у напрямі того вектора нормалі, який утворює гострий кут з віссю Oz .



Розв'язання. На рисунку 2.28 зображено трикутник ABC та вказаний вектор нормалі площини $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Знайдемо його напрямні косинуси. Оскільки $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, то $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тоді

$$P_{ABC}(\vec{F}) = \iint_{ABC} \left((2z - x) \frac{1}{\sqrt{3}} + (x + 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + 3z \frac{1}{\sqrt{3}} \right) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{ABC} 7z d\sigma.$$

Перейдемо до подвійного інтегралу за формулою (2.27). Областю інтегрування є трикутник AOC : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1; \\ 0 \leq y \leq 1 - x. \end{cases}$ Маємо:

$$\begin{aligned} P_{ABC}(\vec{F}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{AOC} 7(1 - x - y) \sqrt{3} dx dy = 7 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \\ &= 7 \int_0^1 \left((1 - x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{7}{2} \int_0^1 (x - 1)^2 dx = \frac{7(x - 1)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Нехай тепер у полі швидкостей рідини \vec{v} лежить замкнена поверхня σ , що обмежує тривимірну область V . Якщо $P_\sigma(\vec{v}) > 0$, то з області V витікає більше рідини, ніж туди вливається. Отже, в цій області є джерела, що збільшують потік рідини. Якщо $P_\sigma(\vec{v}) < 0$, то, навпаки, у область V більше рідини вливається, ніж з неї витікає. Тобто всередині V є стоки, що поглинають рідину з потоку. Потік вектора через замкнену поверхню називають *продуктивністю* області, яка обмежена цією поверхнею.

Для обчислення потоку векторного поля через замкнену поверхню σ зручно користуватися формулою Остроградського–Гауса, що виражає цей поверхневий інтеграл через потрійний:

$$\oiint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (2.29)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі поверхні.

Дивергенцією векторного поля

$$\bar{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$$

називають таку скалярну величину: $\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Отже, потік вектора \bar{F} через зовнішню сторону замкненої поверхні σ , що обмежує область V , дорівнює потрійному інтегралу по цій області від його дивергенції:

$$\Pi_{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dx dy dz. \quad (2.30)$$

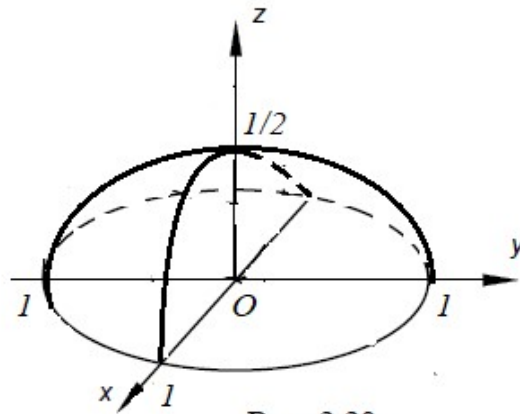
Якщо у кожній точці області V дивергенція векторного поля дорівнює нулю, то поле називають *соленоїдальним*. З рівності $\operatorname{div} \bar{F} = 0$ і формули (2.29) випливає, що у соленоїдальному полі $\bar{F}(x; y; z)$ поверхневий інтеграл $\oiint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$ по будь-якій замкненій поверхні дорівнює нулю. Це означає, що поверхневий інтеграл від $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ по поверхні, що натягнута на замкнений контур, не залежить від форми поверхні, тобто:

$$\iint_{S_1} (P \cos \alpha_1 + Q \cos \beta_1 + R \cos \gamma_1) d\sigma = \iint_{S_2} (P \cos \alpha_2 + Q \cos \beta_2 + R \cos \gamma_2) d\sigma,$$

де S_1 та S_2 – поверхні, що натягнуті на один і той самий контур. Отже, у соленоїдальному полі потік вектора через будь-яку поверхню, натягнуту на заданий контур один і той самий. Кажуть, що соленоїдальне поле не має ані джерел, ані стоків.

Приклад. Обчисліть потік вектора $\bar{F}(x; y; z) = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + (1 - 2z)\bar{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні σ , утвореної параболоїдом $1 - 2z = x^2 + y^2$ та площиною $z = 0$.

Розв'язання. Поверхня параболоїда перетинається з площиною $z = 0$ по колу $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 2.29). Зауважимо, що потік по вказаній замкненій поверхні



дорівнює сумі двох поверхневих інтегралів. Безпосереднє їх обчислення за формулою (2.27) вимагає більших зусиль, ніж застосування формули (2.30). Маємо:

$$P(x; y; z) = 2x; \quad Q(x; y; z) = 2y; \quad R(x; y; z) = 1 - 2z;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2; \quad \text{div} \bar{F} = 2. \quad \text{Тоді } \Pi_{\sigma}(\bar{F}) = \iiint_V 2 dx dy dz.$$

У потрібному інтегралі перейдемо до циліндричних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ у циліндричних координатах має вигляд $r = 1, z = 0$. Рівняння

$$\text{параболоїда: } 1 - 2z = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \text{ або } z = \frac{1 - r^2}{2}. \quad \text{Тоді } V^* = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \frac{1 - r^2}{2}. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma}(\bar{F}) &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{1-r^2}{2}} rdz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \frac{1-r^2}{2} dr = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 (r - r^3) dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Нехай у векторному полі $\bar{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$ розміщена орієнтована крива l (тобто крива із заданим напрямом руху уздовж неї). *Лінійним інтегралом* від вектора $\bar{F}(x; y; z)$ називають криволінійний

інтеграл $\int_l P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz$. Нагадаємо, що у силовому полі цей інтеграл виражає роботу поля по переміщенню матеріальної точки уздовж кривої. Якщо крива l є замкненим контуром, то лінійний інтеграл називають *циркуляцією* вектора $\vec{F}(x; y; z)$ уздовж нього. Пишуть

$$\text{Ц}_l(\vec{F}) = \oint_l P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz. \quad (2.31)$$

Ротор (або *вихор*) векторного поля $\vec{F}(x; y; z)$ – це вектор, що визначається формулою

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.32)$$

Ротор у кожній точці вказує напрям, перпендикулярно до якого обертальна спроможність поля є найбільшою.

Ротор зручно записувати у вигляді символічного визначника

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad (2.33)$$

який у формулі (2.32) розвинений за елементами першого рядка.

Нехай деяка поверхня σ натягнута на контур l ; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора нормалі до поверхні. Для обчислення циркуляції можна скористатися *формулою Стокса*:

$$\begin{aligned} & \oint_l P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz = \\ & = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Взявши до уваги формулу (2.32), підінтегральну функцію у цьому поверхневому інтегралі можна записати як скалярний добуток вектора $\text{rot}\vec{F}$ і одиничного вектора нормалі \vec{n}^0 до поверхні. Отже,

$$\text{Ц}_l(\vec{F}) = \iint_{\sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}^0 d\sigma. \quad (2.35)$$

Приклад. Обчисліть вихор векторного поля $\vec{F} = (xz; -yz^2; xy)$ в точці $A(0; -2; 4)$.

Розв'язання. $rot \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -yz^2 & xy \end{vmatrix} = \bar{i} \left((xy)'_y - (-yz^2)'_z \right) +$
 $+ \bar{j} \left((xz)'_z - (xy)'_x \right) + \bar{k} \left((-yz^2)'_x - (xz)'_y \right) = (x+2yz)\bar{i} + (x-y)\bar{j}$. Підставивши координати точки A , маємо: $rot \bar{F}(A) = -16\bar{i} + 2\bar{j}$.

Приклад. Для векторного поля $\bar{F}(x; y; z) = y^2\bar{i} - x^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ обчисліть:

1) ротор; 2) циркуляцію уздовж контура, отриманого при перетині параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - y$ з координатними площинами ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Розв'язання. 1) $rot \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + (-2x - 2y)\bar{k}$.

2) Скористаймося формулою (2.35). Поверхня інтегрування зображена на рисунку 2.30. Знайдемо координати одиничного вектора нормалі до поверхні $x^2 + z^2 + y - 1 = 0$:

$(x^2 + z^2 + y - 1)'_x = 2x, (x^2 + z^2 + y - 1)'_y = 1, (x^2 + z^2 + y - 1)'_z = 2z$. Отже,
 $\bar{n}^0 = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}; \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}}; \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} \right)$.

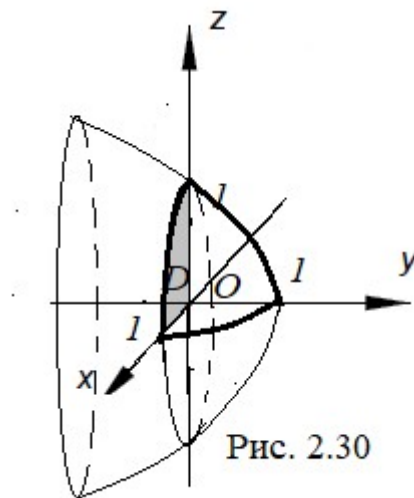


Рис. 2.30

Тоді $\iint_{\sigma} (-2x - 2y) \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} d\sigma$. Перейдемо до подвійного інтеграла

по області D в площині $y = 0$, у яку проектується вирізана частина поверхні. Параболоїд перетинається з площиною xOz по колу $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$. Отже,

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}. \end{cases} \quad \text{З рівняння параболоїда } y = 1 - x^2 - z^2 \text{ маємо: } y'_x = -2x,$$

$$y'_z = -2z, \quad d\sigma = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz = \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz. \quad \text{Тоді}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (-2x - 2(1 - x^2 - z^2)) 2z dx dz &= -4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ((x+1-x^2)z - z^3) dz = \\ &= -4 \int_0^1 \left((x+1-x^2) \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^1 (x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1) dx = \\ &= - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_0^1 = -\frac{31}{30}. \end{aligned}$$

Векторне поле $\vec{F}(x; y; z) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ називають *потенціальним* в області Ω , якщо існує функція $U(x; y; z)$, для якої вектор $\vec{F}(x; y; z)$ є градієнтом, тобто у кожній точці цієї області виконуються рівності:

$$\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial x} = P(x; y; z); \quad \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial y} = Q(x; y; z); \quad \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial z} = R(x; y; z).$$

Функцію $U(x; y; z)$ називають *потенціалом* векторного поля.

Теорема 2.3. Для того, щоб векторне поле $\vec{F}(x; y; z)$ було потенціальним в області Ω , необхідно й достатньо, щоб у кожній точці цієї області виконувалась рівність

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{0}. \quad (2.36)$$

З означення ротора (2.32) випливає, що виконання рівності (2.36) рівносильне системі трьох рівностей

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial y} &\equiv \frac{\partial Q(x; y; z)}{\partial z}, & \frac{\partial P(x; y; z)}{\partial z} &\equiv \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q(x; y; z)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial P(x; y; z)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Взявши до уваги формулу Стокса, отримаємо: якщо векторне поле \vec{F} потенціальне в області Ω , то циркуляція по будь-якому замкненому контуру, що лежить у цій області, дорівнює нулю:

$$\oint_l P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz = 0.$$

Справедливим є таке твердження

Теорема 2.4. Якщо векторне поле $\vec{F}(x; y; z)$ потенціальне в області V , то криволінійний інтеграл $\int_{MN} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz$ по будь-якій кривій, що з'єднує точки M та N і лежить у цій області, не залежить від форми кривої, а залежить лише від координат цих точок. При цьому значення криволінійного інтегралу дорівнює різниці потенціалів у кінцевій та початковій точках

$$\int_M^N P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz = U(N) - U(M). \quad (2.38)$$

Таким чином, потенціал векторного поля можна знайти, розглянувши криволінійний інтеграл $\int_{M_0M} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz$ по кривій, що з'єднує фіксовану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ з довільною точкою $M(x; y; z)$. Тоді

$$U(x; y; z) = \int_{M_0}^M P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz + C. \quad (2.39)$$

Оскільки форму кривої можна обирати довільним чином, то зазвичай обирають шлях інтегрування у формі ламаної, ланки якої паралельні осям координат.

Приклад. Перевірте, що поле

$$\vec{F} = yz(1 - \sin xy)\vec{i} + xz(1 - \sin xy)\vec{j} + (\cos xy + xy + 1)\vec{k}$$

є потенціальним в \mathbb{R}^3 і знайдіть його потенціал.

$$\text{Розв'язання. } \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz(1 - \sin xy) & xz(1 - \sin xy) & \cos xy + xy + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-x \sin xy + x - x(1 - \sin xy))\vec{i} - (-y \sin xy + y - y(1 - \sin xy))\vec{j} +$$

$$+ (z(1 - \sin xy) - xzy \cos xy - z(1 - \sin xy) + yzx \cos xy)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, поле потенціальне. Знайдемо потенціал за формулою (2.39). Вибере-
 ремо $M_0 = O(0;0;0)$, шлях інтегрування (уздовж ламаної $OBCM$) зображено на
 рисунку 2.31.

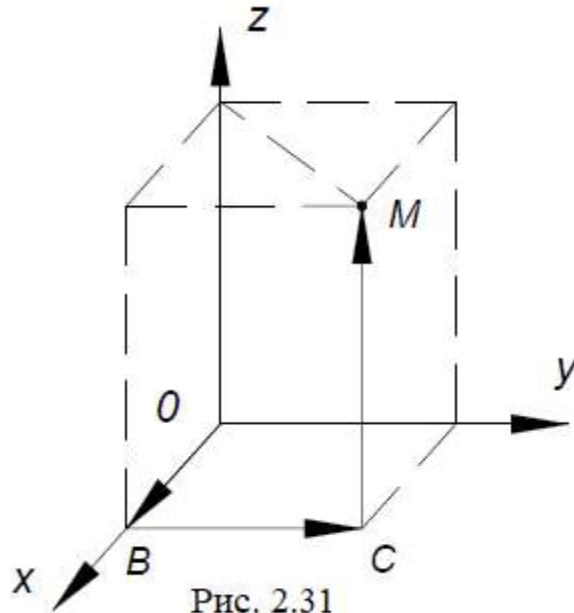


Рис. 2.31

Тоді криволінійний інтеграл $\int_{M_0}^M P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz$ дорівнює
 сумі інтегралів по окремих ланках ламаної:

$$\int_{OB} yz (1 - \sin xy) dx + xz (1 - \sin xy) dy + (\cos xy + xy + 1) dz = \left[\begin{array}{l} OB : y = 0, z = 0, \\ dy = dz = 0, \\ x \in [0; x_M] \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{x_M} 0 dx = 0;$$

$$\int_{BC} yz (1 - \sin xy) dx + xz (1 - \sin xy) dy + (\cos xy + xy + 1) dz = \left[\begin{array}{l} BC : x = x_M, z = 0, \\ dx = dz = 0, \\ y \in [0; y_M] \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{y_M} 0 dy = 0;$$

$$\int_{BC} yz (1 - \sin xy) dx + xz (1 - \sin xy) dy + (\cos xy + xy + 1) dz = \left[\begin{array}{l} CM : x = x_M, y = y_M, \\ dx = dy = 0, \\ z \in [0; z_M] \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{z_M} (\cos(x_M y_M) + x_M y_M + 1) dz = (\cos(x_M y_M) + x_M y_M + 1) z_M.$$

Отже, для довільної точки $M(x; y; z)$ маємо:

$U(x; y; z) = (\cos xy + xy + 1)z + C$ – потенціал векторного поля.

Задане в області V векторне поле $\bar{F}(x; y; z)$ називають *гармонічним*, якщо воно є одночасно потенціальним і соленоїдальним, тобто, якщо в цій області виконуються рівності:

$$\text{rot}\bar{F} = \bar{0}, \quad \text{div}\bar{F} = 0.$$

Те, що поле потенціальне, означає існування потенціалу, тобто такої функції $U(x; y; z)$, що $\bar{F}(x; y; z) = \text{grad}U(x; y; z)$.

З того, що поле соленоїдальне, випливає: $\text{div}(\text{grad}U(x; y; z)) = 0$. Отже, потенціал гармонічного поля задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2.40)$$

Рівняння (2.40) називають *рівнянням Лапласа*, а оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – *оператором Лапласа* і позначають символом Δ . Отже, потенціал гармонічного поля $U(x; y; z)$ в області V задовольняє рівняння $\Delta U(x; y; z) \equiv 0$. Функції, які задовольняють останнє рівняння, називають *гармонічними функціями*. Такими є, наприклад, $U(x; y; z) = ax + by + cz$, $a, b, c - \text{const}'s$, $U(x; y; z) = xyz$ тощо.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисліть потік вектора $\bar{F}(x; y; z) = (2x - 3y)\bar{i} + (y + 2z)\bar{j} + (2x - z)\bar{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні а) тетраедра $OABC$, зображеного на рисунку 2.28; б) утвореної півсферою $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ та площиною $z = 0$.

2. Обчисліть циркуляцію вектора $\bar{F} = y\bar{i} - x\bar{j} + 3\bar{k}$ вздовж кола $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ у додатному напрямі.

3. Знайдіть дивергенцію і ротор векторного поля

а) $\bar{F} = (y + z)\bar{i} - x\bar{j} - x\bar{k}$;

б) $\vec{F} = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(z^2 + x^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$.

4. Перевірте, чи є векторне поле $\vec{F} = (2x + 5x^2 + 10y)\vec{i} + (4x - 10xy - 5z)\vec{j} + (4x^2 - 8y - 4xy - 2z)\vec{k}$ соленоїдальним.

5. Перевірте, що векторне поле $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ є потенціальним, знайдіть його потенціал.

Розділ 3.

Звичайні диференціальні рівняння

3.1. Поняття про диференціальні рівняння

Вперше із задачами, що належать до теорії диференціальних рівнянь, вчені зіштовхнулися на межі XVI — XVII століть. Так, наприклад, Дж. Непер (1550–1617) — при визначенні натурального логарифма, Г. Галілей (1564–1642) — при вивченні падіння важкого тіла в середовищі без опору, Р. Декарт (1596–1650) і І. Барроу (1630–1677) — при вирішенні задач про визначення кривих, дотичні до яких мають задану властивість (обернене завдання на дотичні) та ін. Вивчення цих проблем стало передумовою для найбільших відкриттів XVII ст. Одним із цих відкриттів стають диференціальні рівняння. Вони були винайдені І. Ньютоном (1642–1727). {Термін "диференціальне рівняння" був введений І. Лейбніцем (1646–1716). Винахід він вважав настільки важливим, що зашифрував його у вигляді анаграми, сенс якої в сучасних термінах можна передати так: "Закони природи виражаються диференціальними рівняннями".}

Диференціальні рівняння відіграють надзвичайно важливу роль у різноманітних галузях науки і техніки. Виявилось, що не завжди можна знайти пряму залежність між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. Але в більшості випадків можна встановити зв'язок між величинами (функціями) і швидкостями їх зміни відносно інших (незалежних) змінних величин, тобто знайти рівняння, в яких незалежні функції входять під знак похідної.

Розглянемо, наприклад, фізичну задачу, яка приводить до диференціального рівняння. Нехай треба знайти закон, за яким змінюється швидкість тіла $v(t)$ (t — час), що рухається по інерції. Цим тілом може бути судно, яке ще рухається після вимикання двигуна. При цьому тіло зазнає опору оточуючого середовища, який є пропорційним до швидкості, тобто дорівнює $k \cdot v(t)$. Нехай m — маса тіла,

$a(t)$ — прискорення та, як відомо, $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Тоді сила, що діє на тіло у напрямі його руху дорівнює $m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$. Оскільки ж ця сила за абсолютною величиною дорівнює силі опору середовища, а за напрямом їй протилежна, то отримаємо рівняння

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Отже шукана функція $v(t)$ є розв'язком останнього рівняння, яке крім самої функції $v(t)$ містить також її похідну.

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням називаємо рівняння, що зв'язує незалежну змінну x , невідому (шукану) функцію y та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$ або (що те ж саме) диференціали $dx, dy, d^2y, \dots, d^n y$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

або

$$f(x, dx, dy, dy^2, \dots, dy^n) = 0 \quad (3.2)$$

Найвищий з порядків похідних (диференціалів) невідомої функції, що входять до диференціального рівняння, називаємо *порядком* диференціального рівняння.

Так, $y'' - 2y' + y = 4e^{3x} - x^5 + \sin x$ є диференціальним рівнянням другого порядку, $(1 + 5x)dy - y^2 dx = 0$ – першого порядку, рівняння (3.1) – диференціальне рівняння n -го порядку.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння на інтервалі (a, b) називаємо будь-яку функцію, при підстановці якої диференціальне рівняння перетворюється у тотожність на цьому інтервалі. Графік рівняння називаємо *інтегральною кривою*.

Наприклад, функція $\varphi(x) = \sin 2x + 5$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + 4y = 0$, оскільки $\varphi''(x) = (\sin 2x + 5)'' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x$, звідки $\varphi'' + 4\varphi = 0$.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку на інтервалі (a, b) називаємо функцію $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка окрім x залежить від n довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n і є розв'язком (3.1) при будь-яких фіксованих значеннях сталих.

Наприклад, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 3e^{3x} + 8$.

Дане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку. Послідовно проінтегруємо його (два рази) та отримаємо:

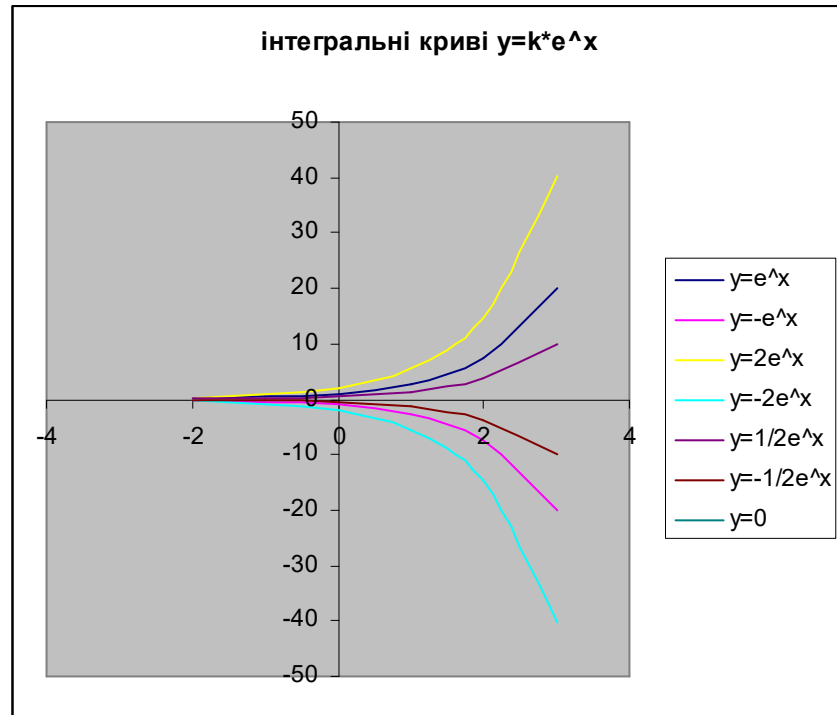
$$y' = \int (3e^{3x} + 8) dx = e^{3x} + 8x + C_1 ;$$

$$y = \int (e^{3x} + 8x + C_1) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + 4x^2 + C_1x + C_2.$$

Таким чином, $y = y(x, C_1, C_2) = \frac{1}{3}e^{3x} + 4x^2 + C_1x + C_2$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' = 3e^{3x} + 8$ на R .

З геометричної точки зору загальний розв'язок являє собою сім'ю, так званих, *інтегральних кривих*.

Якщо, наприклад, розв'язувати диференціальне рівняння $y' = y$, то його загальним розв'язком буде $y = ke^x$, де $k \in R$ (в чому легко переконатись, підставляючи функцію і її похідну в рівняння). Інтегральні криві можна зобразити так:



З множини всіх розв'язків рівняння (з загального розв'язку) можна виділити *частинний розв'язок* при фіксованих значеннях сталих. Так, для диференціального рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$ для виділення частинного розв'язка достатньо накласти одну умову $y(x_0) = y_0$ (тобто вказати точку $(x_0; y_0)$, через яку проходить інтегральна крива), для диференціального рівняння другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0$ – вже дві умови $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ (окрім точки $(x_0; y_0)$ на інтегральній кривій необхідно вказати кутівий коефіцієнт y_1 дотичної в цій точці). Для диференціального рівняння n -го порядку $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ треба накласти n , так званих, початкових умов: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Відшукування частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови, також називають розв'язанням задачі Коші.

Також деякі рівняння мають *особливі розв'язки*, які не можуть бути виділені з загального ні при яких значеннях сталих.

Вивчення теорії диференціальних рівнянь природно почати з найпростішого випадку – диференціальних рівнянь першого порядку.

Задачі для самостійної роботи

Перевірити чи є серед функцій $y_1(x) = e^x - 2$, $y_2(x) = 5$, $y_3(x) = \sin x$, $y_4(x) = e^{-2x}$ розв'язки диференціального рівняння $y''' + y'' - 2y' = 0$.

3.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \quad (3.3)$$

де x – незалежна змінна, y – невідома (шукана) функція та y' – її похідна.

Надалі будемо розглядати тільки рівняння, розв'язані відносно похідної невідомої функції, тобто такі диференціальні рівняння першого порядку, які можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y). \quad (3.4)$$

Нагадаємо, що будь-яку функцію y , що задовольняє рівняння (3.4) називаємо його розв'язком ($x \in (a, b)$); графік цієї функції – інтегральною кривою.

Приклад. Довести, що функція $y_1 = xe^x + 2$ є розв'язком рівняння $y' = y + x - 2$. Дійсно, оскільки $y'_1 = x + xe^x$ при $x \in \mathbb{R}$, то підставляючи в рівняння маємо тотожність.

Зауважимо, що іноді рівняння (3.4) зручно записувати у симетричній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.5)$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – відомі функції. Цю зручність легко пояснити рівноправністю змінних x , y в (3.5), тобто кожну з них можна розглядати як функцію від іншої.

Відповідь на питання про те, за яких умов рівняння (3.4) має розв'язки, дає теорема Коші, яку називають теоремою існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння (3.4). Вона є основною в теорії диференціальних рівнянь.

Означення. *Задачею Коші* для диференціального рівняння (3.4) називаємо пошук розв'язку цього рівняння, що задовольняє, так звану, початкову умову

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.6)$$

де x_0, y_0 – деякі числа.

Теорема 3.1 (достатня умова існування єдиного розв'язку задачі Коші). *Якщо функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені та неперервні в деякій області D площини Oxy , тоді для будь-якої внутрішньої точки $(x_0; y_0)$ області D задача Коші (3.4), (3.6) має розв'язок, причому лише один, визначений в деякому околі точки x_0 .*

Геометрично розв'язати задачу Коші означає знайти такий розв'язок рівняння (3.4), який задовольняє початкову умову (3.6), тобто знайти інтегральну криву рівняння, що проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Точки площини, через які або не проходить жодної інтегральної кривої, або більш однієї, називають *особливими*.

З означення *загального розв'язку* випливає, що для диференціального рівняння першого порядку воно задає однопараметричну сім'ю функцій $y = y(x, C)$, що задовольняє такі умови:

- 1) будь-яка функція цього сімейства є розв'язком рівняння (3.4);
- 2) для будь-якої початкової умови (3.6) у цій сім'ї знайдеться функція, що її задовольняє (початкова точка $(x_0; y_0)$ належить області, в якій виконано умови теореми 3.1).

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.4) визначає сім'ю інтегральних кривих. Якщо в околі точки $(x_0; y_0)$ виконано умови теореми 3.1, то через цю точку проходить тільки одна інтегральна крива вказаної сім'ї.

Нагадаємо, що *частинний розв'язок* диференціального рівняння можна отримати із загального при деякому конкретному значенні сталої C .

Приклад. Скільки інтегральних кривих рівняння $y' = x^2 - 3y \cdot \sin x$ проходить через точку $(1; 4)$?

Розв'язання. Рівняння $y' = x^2 - 3y \cdot \sin x$ є диференціальним рівнянням першого порядку, для якого виконано умови теореми Коші. Справді, тут $f(x, y) = x^2 - 3y \cdot \sin x$, $f'_y(x, y) = 3 \sin x$ визначені і неперервні на всій площині Oxy . Тому через точку $(1; 4)$ проходить тільки одна інтегральна крива.

Приклад. Дано рівняння $y' = \frac{y}{x}$. Визначити чи існують особливі точки цього рівняння.

Розв'язання. В рівнянні $y' = \frac{y}{x}$ маємо $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $f'_y(x, y) = -\frac{1}{x}$. Умови теореми Коші порушено при $x = 0$, звідки випливає що особливі точки розташовано на осі Oy .

Задачі для самостійної роботи

Перевірити виконання умов теореми Коші для диференціального рівняння $y' = \sqrt{x} + \ln y$ при початковій умові $(1; 0)$.

Зазначимо, що, насправді, нам відомо не так багато типів диференціальних рівнянь, для яких можемо отримати розв'язки. Отже для розв'язання

диференціального рівняння насамперед треба визначити його тип, далі для кожного типу існує алгоритм розв'язування.

Наведемо декілька типів диференціальних рівнянь першого порядку.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними мають вигляд

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (3.7)$$

Права частина цього рівняння є добутком функції, що залежить лише від x і функції тільки від y . Врахуємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$. Це дає можливість "відокремити змінні", тобто за допомогою множення обох частин рівняння (3.7) на вираз

$\frac{dx}{f_2(y)}$ перетворити його на таке рівняння:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (3.8)$$

Інтегруючи обидві частини (ліву по y , праву по x), одержимо:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Зрозуміло, що невизначені інтеграли від правої та лівої частин рівності можуть відрізнитись лише на сталий доданок, тобто $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$.

Ця рівність неявно задає загальний розв'язок $y(x, C)$. Її також називають загальним інтегралом рівняння (3.7). Відокремлюючи змінні, ми розділили обидві частини рівності (3.7) на $f_2(y)$, що можливо при $f_2(y) \neq 0$, тобто ми виключили з розгляду ті значення y , при яких $f_2(y) = 0$. Нехай y^* – розв'язок рівняння $f_2(y) = 0$. Тоді функція $y = y^*$ така, що $(y^*)' = (const)' = 0$ і підстановка в диференціальне рівняння (3.7) приведе нас до тотожності $0 \equiv 0$, звідки випливає, що $y = y^*$ також є розв'язком рівняння (3.7), а саме *особливим розв'язком*.

Приклади. 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' = \sqrt{9 - y^2} \cdot (5x + e^{4x} - 7).$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \sqrt{9 - y^2} \cdot (5x + e^{4x} - 7)$. По-

множимо обидві частини на $\frac{dx}{\sqrt{9 - y^2}}$, маємо: $\frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = (5x + e^{4x} - 7) dx$. Проін-

тегруємо обидві частини (ліву по y , праву по x) і отримаємо загальний інтеграл

$$\arcsin \frac{y}{3} = \frac{5x^2}{2} + \frac{e^{4x}}{4} - 7x + C \text{ або загальний розв'язок:}$$

$$y = 3 \sin \left(\frac{5x^2}{2} + \frac{e^{4x}}{4} - 7x + C \right).$$

Легко перевірити, що $y = \pm 3$ є особливими розв'язками даного рівняння, оскільки вони знайдені як корені рівняння $\sqrt{9 - y^2} = 0$ і перетворюють диференціальне рівняння у тотожність $0 \equiv 0$.

Відповідь: $y = 3 \sin \left(\frac{5x^2}{2} + \frac{e^{4x}}{4} - 7x + C \right)$ ($C \in R$), $y = \pm 3$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$3y^2 - x^2 = \frac{yy'}{x}.$$

Розв'язання. Подамо дане рівняння з відокремленими змінними у вигляді :

$$\frac{ydy}{x^2} = \frac{3y^2}{3x^2}.$$

Помноживши обидві частини рівняння на x^2 і розділивши на $3y^2$, маємо

$$\frac{ydy}{3y^2} = \frac{x^2}{3x^2} \quad \text{або} \quad y \cdot 3^{-y^2} dy = x \cdot 3^{-x^2} dx.$$

Інтегруючи, знаходимо $-\frac{1}{2} \cdot \frac{3^{-y^2}}{\ln 3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3^{-x^2}}{\ln 3} + C$

або $3^{-y^2} = 3^{-x^2} + C.$

Відповідь: загальний розв'язок $3^{-y^2} - 3^{-x^2} = C.$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$$

Розв'язання. Це рівняння з відокремленими змінними. Перепишемо його у вигляді $y\sqrt{1 - x^2} dy = -\sqrt{1 - y^2} dx.$

Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2} \neq 0$, маємо

$$-\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + c \quad \text{або} \quad 1-y^2 = (\arcsin x + c)^2,$$

$$y^2 = 1 - (\arcsin x + c)^2 \quad \text{— загальний розв'язок.}$$

Якщо $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} = 0$, $x = \pm 1$, або $y = \pm 1$.

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що :

$$x = \pm 1 \text{ та } y = \pm 1 \text{ — розв'язки рівняння.}$$

4. Розв'язати задачу Коші $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$, $y(0) = 3$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$ і "відокремимо

змінні". Отримаємо: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$\ln|y| = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + \ln|C|, \quad C \neq 0 \quad \text{або} \quad y = C(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Особливий розв'язок $y = 0$ можна приєднати до загального, якщо у сім'ї $y = C(x + \sqrt{x^2+1})$ довільна стала зможе також набувати значення $C = 0$. Таким

чином, $y = C(x + \sqrt{x^2+1})$ ($C \in R$) — всі розв'язки диференціального рівняння.

Виберемо з цього сімейства частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $y(0) = 3$. У цьому розв'язку стала C має бути такою, щоб

$$3 = C(0 + \sqrt{0^2+1}), \quad \text{тобто} \quad C = 3. \quad \text{Розв'язок задачі Коші: } y = 3(x + \sqrt{x^2+1}).$$

2. Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функцію $F(x, y)$ називаємо *однорідною степеня k* , якщо для всіх $\lambda > 0$ виконано $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y)$.

Наприклад, $\frac{x-2y}{3x+y}$ є однорідною степеня 0, $\frac{x^2+5xy}{x-y}$ — однорідною степеня

1, $x^{k-1}y + y^k$ — степеня k .

Диференціальне рівняння $y' = F(x, y)$ називаємо *однорідним*, якщо $F(x, y)$ — однорідна функція степеня 0, тобто є рівнянням виду

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (3.9)$$

Права частина такого рівняння може розглядатися як функція лише одного аргументу $z = \frac{y}{x}$. Вважаємо $z(x)$ новою невідомою функцією. При цьому $y = z \cdot x$, а $y' = z'x + z$. Рівняння (3.9) набуває вигляду $z'x + z = \Phi(z)$ або $z' = \frac{\Phi(z) - z}{x}$, тобто стає рівнянням з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції $z(x)$. Після того, як останнє рівняння буде розв'язане, слід повернутись до невідомої функції $y(x)$, замінивши z на $\frac{y}{x}$.

Приклади. 1. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' = y + \sqrt{5x^2 + xy}$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на x отримаємо однорідне рівняння: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{5 + \frac{y}{x}}$. Виконаємо заміну за формулою $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Одер-

ержимо рівняння $z'x + z = z + \sqrt{5 + z}$ або $z' = \frac{\sqrt{5 + z}}{x}$. Останнє рівняння з відокре-

млюваними змінними розв'яжемо за відомою схемою:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{5 + z}; \quad \frac{dz}{\sqrt{5 + z}} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{\sqrt{5 + z}} = \int \frac{dx}{x}; \quad 2\sqrt{5 + z} = \ln|x| + \ln|C| \quad (C \neq 0).$$

Замінивши z на $\frac{y}{x}$ і помноживши обидві частини на x одержимо загальний ін-

теграл $\sqrt{5x^2 + xy} = \frac{x}{2} \cdot \ln(|Cx|)$, $C \neq 0$.

Особливий розв'язок можна отримати при $z = -5$ або при $y = -5x$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Це рівняння з однорідною функцією. Перепишемо його у вигляді $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\frac{y}{x}}$. Замінімо $\frac{y}{x} = z$, де $z = z(x)$, тоді $y = z \cdot x$ та $dy = zdx + xdz$.

Підставимо в задане рівняння

$$zdx + xdz = zdx + \frac{dx}{z}, \quad \text{або} \quad xdz = \frac{dx}{z}.$$

Розв'яжемо здобуте рівняння з відокремлюваними змінними

$$zdz = \frac{dx}{x}, \quad \frac{z^2}{2} = \ln|x| + \ln|c|, \quad \text{або} \quad \frac{z^2}{2} = \ln|cx|, \quad z = \sqrt{\ln(cx)^2}.$$

Повертаючись до невідомої функції $y \left[\frac{y}{x} = z \right]$, дістаємо, що $y = x\sqrt{\ln(cx)^2}$.

Відповідь: $y = x\sqrt{\ln(cx)^2}$.

3. Розв'язати задачу Коші $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $y(1) = -1$.

Розв'язання. Це однорідне рівняння тому, що розділивши чисельник і зна-

менник на x ми приводимо його до виду $y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$. Виконаємо заміну за форму-

люю $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Одержимо рівняння $z'x + z = \frac{1+z}{1-z}$ або $z' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+z^2}{1-z}$. Отримали

рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+z^2}{1-z}; \quad \frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x}; \quad \arctg z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) =$$

$= \ln|x| + C$. Замінивши z на $\frac{y}{x}$ одержимо загальний інтеграл

$\arctg \frac{y}{x} = \ln \left(|x| \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) + C$ ($C \neq 0$). Підставимо початкові дані $x=1, y=-1$ і ви-

значимо значення сталої C : $\arctg(-1) = \ln \sqrt{2} + C$, $C = -\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$. Тому

розв'язок задачі Коші має вигляд: $\arctg \frac{y}{x} = \ln \left(|x| \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Зауваження. Рівняння $y' = f \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$, де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ –

сталі, можна звести до: а) рівняння з відокремленими змінними, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{підстановкою} \quad z = a_1x + b_1y + c_1;$$

б) однорідного, якщо $\Delta \neq 0$ заміною $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, де (α, β) – розв'язок

$$\text{системи} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \left(\frac{y+1}{x+y-2} \right)^2$$

Розв'язання. Тут $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $(3, -1)$ – розв'язок системи

$\begin{cases} y+1=0, \\ x+y-2=0, \end{cases}$ тому заміною $x = u + 3$, $y = v - 1$ з урахуванням $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ зведемо

дане рівняння до $\frac{dv}{du} = 2 \left(\frac{v}{u+v} \right)^2$, яке є однорідним, тому розв'яжемо його

заміною $z = \frac{v}{u}$ Отримаємо $\frac{dz}{du}u + z = \frac{2}{(z+1)^2}$; $\frac{dz}{du}u = \frac{2}{(z+1)^2} - z$;

$\frac{dz}{du}u = \frac{2}{(z+1)^2} - z$; $\frac{dz}{du}u = \frac{-z^3 - z}{(z+1)^2}$; $-\left(\frac{2}{1+z^2} + \frac{1}{z} \right) dz = \frac{du}{u}$; $-2 \operatorname{arctg} z = \ln |Cuz|$

$(C \neq 0)$; $e^{-2 \operatorname{arctg} z} = Cuz$; $e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x-3}} = C(y+1)$.

3. Лінійне диференціальне рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3.10)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані функції.

Існує декілька методів розв'язання лінійного диференціального рівняння.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння (тобто (3.10), в якому $q(x) = 0$): $y' + p(x)y = 0$. Останнє диференціальне рівняння можна вважати рівнянням з відокремлюваними змінними, а саме $\frac{dy}{y} = -p(x) dx$. Загальний розв'язок цього рівняння можна записати у виді $\ln |y| = \ln |C| - \int p(x) dx$ або $y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$ (тут $C \neq 0$ стала).

Тепер розв'язок неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у виді $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$, де $C(x)$ – деяка функція, яку знаходимо підстановкою в (3.10).

Приклади. 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння $y' - 2xy = 0$. Маємо $\frac{dy}{y} = 2x dx$, $\frac{dy}{y} = 2x dx$, $\ln |y| = x^2 + \ln |C|$ ($C \neq 0$), $y = Ce^{x^2}$.

Тому розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукатимемо у виді

$y = C(x)e^{x^2}$. Підставляючи в дане рівняння маємо $C'e^{x^2} + 2Cx e^{x^2} - 2x C e^{x^2} = 3x^2 - 2x^4$ або $C(x) = \int e^{-x^2} (3x^2 - 2x^4) dx = x^3 e^{-x^2} + C_1$. Тому розв'язок неоднорідного диференціального рівняння запишемо як $y = (x^3 e^{-x^2} + C_1)e^{x^2} = x^3 + C_1 e^{x^2}$.

2. Розв'язати задачу Коші

$$xy' + y = \ln x + 1, \quad y(1) = 0$$

Розв'язання. Дане рівняння – лінійне рівняння першого порядку. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$xy' + y = 0.$$

Перепишемо це рівняння з відокремленими змінними у вигляді :

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = -y.$$

Поділивши змінні, дістанемо

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad y \neq 0, \quad x \neq 0,$$

$$\int \frac{du}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|,$$

де $y = \frac{C}{x}$ – загальний розв'язок вихідного однорідного рівняння.

Знайдемо розв'язок вихідного неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої.

$$y(x) = \frac{C(x)}{x}, \quad \text{де } C(x) \text{ – невідома функція.}$$

Підставимо у вихідне рівняння $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ і $y'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$.

Маємо $x \cdot \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = \ln x + 1, \quad C'(x) = \ln x + 1$.

Звідси $C(x) = x \cdot \ln x - x + x + C$.

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння є

$$y(x) = \frac{x \cdot \ln x + C}{x}, \quad y(x) = \ln x + \frac{C}{x}$$

Враховуючи початкові умови, здобудемо $0 = \ln 1 + \frac{C}{1}$, звідси $C = 0$.

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд: $y(x) = \ln x$.

Метод Бернуллі. Будемо шукати розв'язок лінійного рівняння у вигляді $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставивши ці вирази в рівняння (3.10) одержимо: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ або

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (3.11)$$

Підберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю. Тобто знайдемо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$ (можемо вважати тут $C = 0$). Після цього знайдену функцію $v(x)$ підставимо в рівняння (3.11), яке тоді матиме вигляд $u'v = q(x)$. Знайдемо загальний розв'язок $u(x, C)$ останнього рівняння. Запишемо відповідь у вигляді $y = u(x, C) \cdot v(x)$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - y \operatorname{ctgx} = 2x \sin x$.

Розв'язання. Це лінійне рівняння, оскільки воно має вигляд (3.10), де $p(x) = -\operatorname{ctgx}$, $q(x) = 2x \sin x$. Виконаємо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ отримаємо: $u'v + uv' - uv \operatorname{ctgx} = 2x \sin x$ або $u'v + u(v' - v \operatorname{ctgx}) = 2x \sin x$. Функцію $v(x)$ знайдемо як розв'язок рівняння $v' - v \operatorname{ctgx} = 0$. Маємо: $v' = v \operatorname{ctgx}$;

$$\frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \ln |v| = \ln |\sin x|; \quad v = \sin x.$$

Тоді $u' \sin x = 2x \sin x$; $u' = 2x$; $u = x^2 + C$. Таким чином, одержимо загальний розв'язок $y = (x^2 + C) \sin x$.

Метод інтегруючого множника.

Обидві частини рівняння (3.10) множимо на $e^{\int p(x) dx}$ і запишемо його у вигляді

$$\left(ye^{\int p(x) dx} \right)' = q(x) e^{\int p(x) dx}. \text{ Інтегруючи останню рівність отримаємо}$$

$$ye^{\int p(x) dx} = C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \text{ або } y = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

Розв'язання. Очевидно, що дане рівняння є лінійним. Тут $p(x) = \operatorname{tg} x$, тому інтегруючий множник $e^{\int p(x) dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$.

Множення на інтегруючий множник обох частин рівняння приводить до рівняння $\left(y \frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$$\frac{y}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C, \quad y = \sin x + C \cos x.$$

4. Рівняння Бернуллі можна подати у вигляді

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha, \quad (3.12)$$

де $\alpha - \text{const}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, $p(x)$ і $q(x)$ – задані функції. Розв'язок (3.12) знаходимо підстановкою Бернуллі $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ аналогічно тому, як розв'язуються лінійні рівняння. Проілюструємо на наступному прикладі.

Приклади. 1. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' - 2y = 6x^4 \sqrt{y}$.

Розв'язання. Розділивши на x , отримаємо рівняння Бернуллі $y' - \frac{2y}{x} = 6x^3 \sqrt{y}$, де $\alpha = \frac{1}{2}$, $p(x) = \frac{-2}{x}$, $q(x) = 6x^3$. Зробимо заміну $y = uv$,

$y' = u'v + uv'$ маємо: $u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 6x^3 \sqrt{uv}$ або $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 6x^3 \sqrt{uv}$. Нехай

$v(x)$ – розв'язок рівняння $v' - \frac{2v}{x} = 0$. Маємо: $v' = \frac{2v}{x}$; $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$; $\ln|v| = 2|x|$;

$v = x^2$. Тоді

$u'x^2 = 6x^3 \sqrt{ux^2}$; $\frac{du}{\sqrt{u}} = 6x|x|$; $2\sqrt{u} = 2x^3 \operatorname{sign}(x) + 2C$; $u = (x^3 \operatorname{sign}(x) + C)^2$. Та-

ким чином, одержимо загальний розв'язок

$y = (x^3 \operatorname{sign}(x) + C)^2 x^2 = (x^4 \operatorname{sign}(x) + Cx)^2$. Також можна переконатись, що

$y = 0$ також є розв'язком (особливим) даного рівняння.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1} y = x\sqrt{y}.$$

Маємо рівняння Бернуллі. Нехай $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тоді

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Задане рівняння набуде вигляду

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 - 1} \cdot uv = x\sqrt{uv}, \quad \text{або} \quad v \left(u' - \frac{x}{x^2 - 1} \cdot u \right) + uv' = x\sqrt{uv}.$$

Функцію $u(x)$ виберемо так, щоб $u' - \frac{x}{x^2 - 1} \cdot u = 0$

$$\text{Маємо} \quad \frac{du}{dx} = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot u; \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{x dx}{x^2 - 1}; \quad \ln|u| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1|, \quad \ln|u| = \ln\sqrt{x^2 - 1};$$

$$u = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\text{тоді} \quad \sqrt{x^2 - 1} \cdot v' = x \cdot \sqrt{\sqrt{x^2 - 1} \cdot v}, \quad \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{dv}{dx} = x \cdot \sqrt[4]{x^2 - 1} \cdot \sqrt{v},$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^2 - 1} \cdot dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}, \quad 2\sqrt{v} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{(x^2 - 1)^3} + C,$$

$$\sqrt{v} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{(x^2 - 1)^3} + C, \quad v = \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{(x^2 - 1)^3} + C \right)^2.$$

$$\text{Тепер маємо} \quad y(x) = u(x) \cdot v(x) = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{(x^2 - 1)^3} + C \right)^2.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $(xy' - y)(x - 6y) = x^2 + y^2$;

б) $(2 + \cos x)yy' = \sin x$;

в) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$;

4) $xy' - yy' = \frac{y^2}{x}$.

2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y' = \frac{x + y}{x - y}$, $y(1) = -1$;

б) $xy' - y = -2 \ln x$, $y(1) = 3$;

$$в) y(e^x - 4)y' - e^x = 0, y(\ln 5) = -2;$$

$$г) xy' + 3y = \frac{\sqrt{y^3}}{x^2}, y(-1) = 21\frac{7}{9}.$$

3.3. Диференціальні рівняння другого порядку. Рівняння, що допускають зниження порядку

Означення. Диференціальне рівняння другого порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (3.13)$$

Якщо до диференціального рівняння (3.13) приєднані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \quad (3.14)$$

то кажуть, що задано задачу Коші (3.13), (3.14).

Теорема 3.2. *Якщо функція $f(x, y, y')$ і її частинні похідні по y та по y' неперервні у деякій області $D (D \subset R^3)$, тоді для будь-якої внутрішньої точки (x_0, y_0, y_1) області D задача Коші (3.13), (3.14) має єдиний розв'язок, визначений в деякому околі точки x_0 .*

Геометрично це означає, що через дану точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива із заданим кутовим коефіцієнтом y_1 дотичної в даній точці.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку називаємо двопараметричну сім'ю функцій $y = y(x, C_1, C_2)$, що має такі властивості:

- 1) будь-яка функція цього сімейства є розв'язком рівняння (3.13);
- 2) для будь-яких початкових умов (3.14) (точка (x_0, y_0, y_1) належить області, в якій виконано умови теореми 3.2), можна так підібрати C_1 і C_2 , що функція $y = y(x, C_1, C_2)$ буде їх задовольняти.

Якщо надати сталим C_1 і C_2 конкретних значень, то отримаємо частинний розв'язок. Розглянемо декілька видів рівнянь (3.13), які зводяться до рівнянь першого порядку, тобто *допускають зниження порядку*.

1. Нехай рівняння має вигляд $y'' = f(x)$. Його можна розв'язати проінтегрувавши двічі обидві його частини.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos 3x$.

Розв'язання.

$$\int y'' dx = \int e^{2x} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \cos 3x dx; \quad y' = \frac{1}{2}e^{2x} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sin 3x + C_1.$$

Тоді

$$y = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + 2 \int \sqrt{x} dx - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx + C_1 \int dx; \quad y = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{4}{3} x \sqrt{x} + \frac{1}{9} \cos 3x + C_1 x + C_2 .$$

2. Розглянемо рівняння $F(x, y', y'') = 0$, яке не містить невідомої функції $y(x)$ в явному вигляді, тоді роль невідомої функції може виконати її похідна y' . За допомогою заміни $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ таке рівняння зводиться до рівняння першого порядку $F(x, p, p') = 0$. Розв'язавши його знайдемо $p = p(x, C_1)$, а потім з рівняння $y' = p(x, C_1)$ знайдемо $y = \int p(x; C_1) dx + C_2$.

Приклади. 1. Розв'язати задачу Коші: $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = e^2$.

Розв'язання. Застосуємо заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку $p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$, яке є однорідним. Виконаємо у ньому заміну

$$z = \frac{p}{x}. \quad \text{Відповідно одержимо } z'x + z = z \ln z; \quad z' = \frac{1}{x} \cdot z(\ln z - 1); \quad \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x};$$

$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|$ ($C_1 \neq 0$); $\ln z - 1 = C_1 x$; $z = e^{C_1 x + 1}$; $p = x e^{C_1 x + 1}$. Замінивши p на y' , отримаємо $y' = x e^{C_1 x + 1}$; $y = \int x e^{C_1 x + 1} dx$. Застосувавши метод інтегрування

частинами, одержимо загальний розв'язок $y = \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) e^{C_1 x + 1} + C_2$. Визначимо

значення C_1, C_2 так, щоб задовольнити початкові умови. Підставимо у $y' = x e^{C_1 x + 1}$

і $y = \left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \right) e^{C_1 x + 1} + C_2$ значення $x = 1$, $y = 3$, $y' = e^2$ та знайдемо $C_1 = 1$, $C_2 = 3$

. Тому отримаємо розв'язок задачі Коші $y = (x - 1)e^{x+1} + 3$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $(1 + x^2) \cdot y'' = 2xy'$

Розв'язання. Це диференціальне рівняння не містить у явному вигляді невідомої функції $y = y(x)$.

Нехай $y'(x) = p(x)$, $y''(x) = p'(x)$. Тоді вихідне рівняння набуває вигляду

$$(1 + x^2) \cdot p' = 2xp, \quad \text{або} \quad (1 + x^2) \cdot \frac{dp}{dx} = 2xp, \quad (1 + x^2) \neq 0, \quad p \neq 0,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2}, \quad \ln|p| = \ln(1 + x^2) + C_1, \quad p = C_1 \cdot (1 + x^2) .$$

Звідси $y'(x) = C_1 \cdot (1 + x^2)$, $y(x) = \int C_1 \cdot (1 + x^2) dx = C_1 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Загальний розв'язок $y(x) = C_1 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Відповідь: $y(x) = C_1 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

3. Розглянемо рівняння $F(y, y', y'') = 0$, яке не містить незалежної змінної. Знизити порядок такого рівняння можна за допомогою заміни $y' = p(y)$ (y вважаємо незалежною змінною). Тоді $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p$ і рівняння набуває вигляду

$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0$. Нехай $p = p(y, C_1)$ – загальний розв'язок цього рівняння,

тоді $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$. Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними.

Розв'язавши його, отримаємо шукану функцію $y = y(x, C_1, C_2)$.

Приклади. 1. Розв'язати задачу Коші $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.

Розв'язання. Рівняння не містить x , тому виконаємо заміну $y' = p(y)$,

$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$. Отримаємо рівняння першого порядку з відокремленими змін-

ними $p \frac{dp}{dy} = 50y^3$. Тоді $p dp = 50y^3 dy$; $\int p dp = \int 50y^3 dy$; $\frac{1}{2} p^2 = \frac{25}{2} y^4 + \frac{C_1}{2}$;

$p = \pm \sqrt{25y^4 + C_1}$; $y' = \pm \sqrt{25y^4 + C_1}$. В останню рівність підставимо обидві початкові умови (обравши перед квадратним коренем знак «+», щоб вони виконувались), одержимо: $5 = \sqrt{25 + C_1}$, звідки $C_1 = 0$. Тоді $y' = \sqrt{25y^4}$ або $y' = 5y^2$.

Розв'яжемо останнє рівняння: $\frac{dy}{dx} = 5y^2$; $\frac{dy}{y^2} = 5dx$; $\int \frac{dy}{y^2} = \int 5dx$; $-\frac{1}{y} = 5x + C_2$;

$y = -\frac{1}{5x + C_2}$. З початкової умови $y(3) = 1$, маємо: $1 = -\frac{1}{15 + C_2}$; $C_2 = -16$. Отри-

мали розв'язок задачі Коші: $y = \frac{1}{16 - 5x}$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

Розв'язання. Це рівняння не містить у явному вигляді незалежну змінну x .

Нехай $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$. Тоді вихідне рівняння набуває вигляду

$$p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}, \text{ або } \frac{dp}{dy} + p = 2e^{-y} p^{-1}, p \neq 0.$$

Це диференціальне рівняння є рівнянням Бернуллі. Припустимо, що

$$p(y) = u(y) \cdot v(y), \quad \frac{dp}{dy} = u'v + uv'.$$

Отримаємо рівняння $u'v + uv' + uv = \frac{2e^{-y}}{uv}$, або $v(u' + u) + uv' = \frac{2e^{-y}}{uv}$.

Функцію $u(p)$ виберемо так, щоб $u' + u = 0$,

$$\text{звідси } \frac{du}{dy} = -u, \quad \frac{du}{u} = -dy, \quad \ln|u| = -y, \quad u = e^{-y}.$$

$$\text{Тоді } e^{-y} v' = \frac{2e^{-y}}{e^{-y} v} \Rightarrow e^{-y} v' = \frac{2}{v} \Rightarrow \int v dv = 2 \int e^y dy \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} = 2e^y + C_1 \Rightarrow v = \sqrt{4e^y + C_1},$$

$$\text{отже } p(y) = u \cdot v = e^{-y} \cdot \sqrt{4e^y + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y} \cdot \sqrt{4e^y + C_1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \int dx, \quad \int \frac{\frac{1}{4} d(4e^y + C_1)}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \int dx, \quad \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1} = x + C_2,$$

$$\text{або } 4e^y + C_1 = (2x + C_2)^2, \quad 4(e^y + C_1) = 4(x + C_2)^2.$$

$$\text{Загальний розв'язок вихідного рівняння } e^y + C_1 = (x + C_2)^2.$$

$$\text{Відповідь: } e^y + C_1 = (x + C_2)^2.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' = \ln x - 3$;

$$\text{б) } y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$$

$$\text{в) } y'' - yy' = x e^x.$$

2. Розв'язати задачу Коші:

$$\text{а) } yy'' - (y')^2 = 3y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4;$$

$$\text{б) } xy'' - y' = \frac{x^4}{3(y')^2}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0;$$

$$\text{в) } y'' - x^2 - \cos 2x = 0, \quad y(0) = 1\frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

3.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (3.15)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні на деякому інтервалі (a, b) функції. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (3.15) називаємо лінійним однорідним, у протилежному випадку – лінійним неоднорідним.

Розв'язуючи рівняння (3.15) відносно y'' отримаємо $y'' = -p(x)y' - q(x)y - f(x)$, тобто маємо справу з частинним випадком рівняння (3.13) і згідно з означенням лінійного диференціального рівняння і властивостей неперервних функцій воно задовольняє умови теореми Коші існування й єдиності розв'язку. Таким чином, для будь-яких початкових умов (3.14), де $x_0 \in (a, b)$, рівняння (3.15) має єдиний розв'язок.

Лінійні однорідні рівняння.

Розглянемо основні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.16)$$

1. Диференціальне рівняння (3.16) має тривіальний розв'язок $y \equiv 0$.

2. **Теорема 3.3.** Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння (3.16), то функція $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ при будь-яких значеннях сталих C_1 , C_2 також є розв'язком цього рівняння.

Дійсно,

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + (C_1y_1 + C_2y_2)' \cdot p(x) + (C_1y_1 + C_2y_2) \cdot q(x) = \\ &= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1y_1'p(x) + C_2y_2'p(x) + C_1y_1q(x) + C_2y_2q(x) = \\ &= C_1(y_1'' + y_1'p(x) + y_1q(x)) + C_2(y_2'' + y_2'p(x) + y_2q(x)) = 0. \end{aligned}$$

Отже, лінійна комбінація $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ також задовольняє рівняння (3.16).

Тепер постає питання: за яких умов ця лінійна комбінація є загальним розв'язком (3.16)?

Означення. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними, на відрізку $[a;b]$, якщо функція $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ не є сталою на цьому відрізку, лінійно залежними – в протилежному випадку.

Прикладами лінійно незалежних функцій є пара x, x^3 оскільки $\frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \neq const$, а лінійно залежних – $5x, x$, тому що $\frac{5x}{x} = 5 = const$.

Припустимо, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (3.16). Питання про їх лінійну залежність (незалежність) вирішують з використанням визначника Вронського (вронскіана)

$$W(y_1(x), y_2(x)) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Лема 3.1. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні на $[a;b]$, то визначник Вронського, складений з них, дорівнює нулю на цьому відрізку.

Доведення. Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні на $[a;b]$, то існує число k таке, що $y_1(x) = k \cdot y_2(x)$. Тоді $y_1'(x) = k \cdot y_2'(x)$ і вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot y_2(x) & y_2(x) \\ k \cdot y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$$

(оскільки стовпці пропорційні).

Лемму доведено.

Лема 3.2. Якщо розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (3.16) лінійно незалежні на $[a;b]$, то визначник Вронського, складений з них, не дорівнює нулю на цьому відрізку.

Доведення. Припустимо супротивне: існує така точка $x_0 \in [a,b]$, що $W(x_0) = 0$.

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Це однорідна лінійна система відносно α_1, α_2 і її основний визначник $\Delta = W(x_0) = 0$, звідки випливає, що ця система має крім тривіального розв'язку ще хоча б одне (насправді таких розв'язків безліч). Позначимо ненульовий розв'язок системи $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$. Розглянемо функцію $y(x) = \tilde{\alpha}_1 y_1(x) + \tilde{\alpha}_2 y_2(x)$, яка згідно з теоремою 3.3 також є розв'язком однорідного рівняння (3.16). Крім того, це рівняння задовольняє умови $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$, які також задовольняє

тривіальний розв'язок рівняння (3.16). Відповідно до теореми Коші такий розв'язок єдиний, отже $y(x) = 0$, або $\tilde{\alpha}_1 y_1(x) + \tilde{\alpha}_2 y_2(x) = 0$. З останньої рівності маємо лінійну залежність $y_1(x)$ і $y_2(x)$ на $[a; b]$, що суперечить умовам теореми. Таким чином, $W(x) = 0$ для будь-якого $x \in [a; b]$.

Лему доведено.

3. Теорема 3.4 (про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння). Якщо функції y_1 і y_2 – лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (3.16), то його загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3.17)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Доведення. Згідно з теоремою 3.3 функція (3.17) є розв'язком рівняння (3.16) при будь-яких значеннях C_1 і C_2 . Щоб довести, що (3.17) є загальним розв'язком (3.16), достатньо встановити, що з (3.17) можна виділити частинний розв'язок, який задовольняє будь-які початкові дані. Нехай $x_0 \in [a; b]$ і

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (3.18)$$

довільні початкові умови. Покажемо, що сталі C_1 і C_2 можна обрати так, щоб розв'язок (3.17) при цих значеннях сталих був частинним розв'язком, який задовольняє початкові умови (3.18). Складемо систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

де C_1 і C_2 – невідомі числа. Основний визначник системи $\Delta = W(x_0)$ і відповідно до леми 3.2 не дорівнює нулю, тому система (3.19) має єдиний розв'язок, який позначимо $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$. Підставимо C_1^0 , C_2^0 в (3.17) і отримаємо частинний розв'язок $y^0 = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2$, що задовольняє умови (3.18).

Теорему доведено.

Таким чином, з теореми 3.4 витікає, що для формування загального розв'язку (3.16) необхідно знайти два лінійно незалежних розв'язки рівняння (3.16).

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - y = 0$.

Розв'язання. Неважко переконатись, що частинними розв'язками даного рівняння є $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$. Оскільки вронскіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

то y_1 і y_2 – лінійно незалежні на всій числовій прямій. Тому загальний розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (3.15).

Теорема 3.5 (про загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння). *Загальний розв'язок рівняння (3.15) має вигляд $y = Y + Z$, де Y – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння (3.16), Z – будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.15).*

Доведення. Покажемо, що y – розв'язок (3.15). Дійсно, підставимо y в (3.15):

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (Y + Z)'' + p(x)(Y + Z)' + q(x)(Y + Z) = \\ &= [Y'' + p(x)Y' + q(x)Y] + [Z'' + p(x)Z' + q(x)Z] = 0 + f(x) = f(x), \end{aligned}$$

тобто y – розв'язок (3.15). Тепер треба переконатись, що це загальний розв'язок (3.15). Розглянемо різницю $\tilde{y} - Z$, де \tilde{y} – деякий розв'язок (3.15). Перевіримо, що ця різниця є розв'язком однорідного рівняння (3.16). Насправді,

$$\begin{aligned} (\tilde{y} - Z)'' + p(x)(\tilde{y} - Z)' + q(x)(\tilde{y} - Z) &= [\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + q(x)\tilde{y}] - \\ - [Z'' + p(x)Z' + q(x)Z] &= f(x) - f(x) = 0, \end{aligned} \quad \text{тому можна записати}$$

$\tilde{y} - Z = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння (3.16), а C_1^0, C_2^0 – певні значення сталих. Таким чином, будь-який розв'язок рівняння отримуємо з формули при відповідному підборі довільних сталих C_1, C_2 , тобто функція $y = Y + Z$ є загальним розв'язком рівняння (3.15).

Теорему доведено.

З теореми випливає: для того щоб знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, треба знайти загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Теорема 3.6 (принцип суперпозиції розв'язків). *Якщо $Z_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$, $Z_2(x)$ – частинний розв'язок рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$, то функція $Z_1(x) + Z_2(x)$ є частинним розв'язком рівняння*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x). \quad (3.20)$$

Доведення. Покажемо, що $Z_1(x) + Z_2(x)$ – частинний розв'язок рівняння (3.20).

Підставимо $Z_1 + Z_2$ в рівняння (3.20), будемо мати

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_2)'' + p(x)(Z_1 + Z_2)' + q(x)(Z_1 + Z_2) &= (Z_1'' + p(x)Z_1' + q(x)Z_1) + \\ &+ (Z_2'' + p(x)Z_2' + q(x)Z_2) = f_1(x) + f_2(x), \end{aligned}$$

звідки і випливає твердження теореми.

Покажемо, як можна знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільних сталих, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Нехай $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння (3.16), де C_1, C_2 – деякі сталі. Шукатимемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.15) в тому самому вигляді, розуміючи під C_1, C_2 функції:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (3.21)$$

Підберемо функції $C_1(x), C_2(x)$ так, щоб в виразі $y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$ було виконано $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$, тобто $y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$. Знаходячи звідси $y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$ і підставляючи y, y', y'' в рівняння (3.15), отримаємо

$$C_1(x) \left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) \right] + C_2(x) \left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \right] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x),$$

звідки маємо, що

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x),$$

оскільки вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю. Таким чином, маємо систему лінійних рівнянь для визначення $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.22)$$

Оскільки визначником системи (3.22) є вронскіан $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, складений з лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (3.16), то він згідно з лемою 3.2, не дорівнює нулю, що означає наявність єдиного розв'язку $C_1'(x), C_2'(x)$ системи (3.22). Інтегруючи $C_1'(x), C_2'(x)$, знайдемо шукані функції $C_1(x), C_2(x)$, підставляючи їх в (3.21), запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.15).

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - y = x$.

Розв'язання. В попередньому прикладі показано, що загальним розв'язком однорідного рівняння $y'' - y = 0$ є $Y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільних сталих, а саме у вигляді $y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. Складемо систему (3.22):

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0, \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = x. \end{cases}$$

Якщо додати до першого рівняння системи друге, поділити на $2e^x$, то отримаємо $C_1'(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$. Звідки, інтегруючи, маємо $C_1(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + \tilde{C}_1$ ($\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}$).

$C_2'(x)$ можна знайти або підстановкою $C_1'(x)$ в перше рівняння системи або віднімаючи з першого рівняння системи друге. Знайдемо $C_2'(x) = -\frac{1}{2} x e^x$, а тим са-

мим і функцію $C_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1)e^x + \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$). Таким чином, знайдено загаль-

ний розв'язок даного неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + \tilde{C}_1 \right) e^x + \left(-\frac{1}{2}(x-1)e^x + \tilde{C}_2 \right) e^{-x}, \text{ де } \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R} \text{ або спрости-}$$

вши $y(x) = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{-x} - x$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння виду

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0, \quad (3.23)$$

де p, q – дійсні числа. Його називають рівнянням зі сталими коефіцієнтами p і q . Будемо шукати розв'язок рівняння (3.23) у вигляді $y = e^{kx}$, $k - const$. Тоді $y' = k e^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставивши ці вирази у (3.23) маємо: $k^2 e^{kx} + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то k є розв'язком рівняння:

$$k^2 + p k + q = 0, \quad (3.24)$$

яке називають характеристичним рівнянням. Розв'язуючи квадратне рівняння (3.24), можемо отримати три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 дійсні і $k_1 \neq k_2$, то частинні розв'язки рівняння (3.23) $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ є лінійно незалежними. Дійсно,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const. \text{ Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд}$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \text{ } C_1 \text{ і } C_2 \text{ – довільні сталі.}$$

2. Нехай корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 дійсні і співпадають $k_1 = k_2$. Тоді маємо частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$. Доведемо, що функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ також є частинним розв'язком рівняння (3.23). Знайдемо похідні $y_2' = e^{k_1 x} (1 + k_1 x)$, $y_2'' = e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 x)$ і підставимо їх в рівняння (3.23). Маємо:

$y_2'' + py_2' + qy_2 = e^{k_1x}x(k_1^2 + pk_1 + q) + e^{k_1x}(2k_1 + p)$. В останньому виразі перший доданок дорівнює нулю через те, що k_1 – корінь характеристичного рівняння. Другий доданок також дорівнює нулю, оскільки в цьому випадку дискримінант рівняння (3.24) $D = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$. Отже, маємо два розв'язки рівняння (3.23) y_1 і y_2 . При цьому $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq const$, тобто вони лінійно незалежні. Тоді загальний

розв'язок рівняння має вигляд $y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}$, C_1 і C_2 – довільні сталі.

3. Якщо дискримінант характеристичного рівняння від'ємний, тобто його корені комплексні $k_1 = \alpha - \beta i$, $k_2 = \alpha + \beta i$, то лінійно незалежними розв'язками рівняння (3.23) є $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Знайдемо похідні

$$\begin{aligned} y_1' &= e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x), \quad y_2' = e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x), \\ y_1'' &= e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x), \\ y_2'' &= e^{\alpha x} (\alpha^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x). \end{aligned}$$

Враховуючи, що за теоремою Вієта $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, підставляючи в (3.23) для y_1 маємо

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = e^{\alpha x} (\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x - 2\alpha(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) + (\alpha^2 + \beta^2) \cos \beta x) = 0.$$

Звідки зрозуміло, що y_1 – розв'язок рівняння (3.23). Аналогічно можна переконатись, що y_2 також розв'язок рівняння (3.23), причому y_1 , y_2 лінійно незалежні. Отже, загальний розв'язок рівняння (3.23) запишемо у вигляді $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклади. Знайти загальний розв'язок рівняння

1) $y'' - y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$. Його корені дійсні і різні $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

2) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$ має нульовий дискримінант. Його корені співпадають $k_1 = k_2 = -2$. Загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

3) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 10 = 0$ має від'ємний дискримінант $D = -4$, $\sqrt{D} = 2i$. Знайдемо комплексні корені $k_1 = \frac{6-2i}{2} = 3-i$, $k_2 = \frac{6+2i}{2} = 3+i$. Тобто $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд: $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;

б) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(-1) = e$, $y'(-1) = 2e$;

в) $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

3. Використовуючи метод варіації довільних сталих знайти

а) загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$;

б) частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - y' = \frac{1}{2e^x + 1}$, який

би задовольняв би початкову умови: $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння виду

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx), \quad (3.25)$$

де p, q, a, b – дійсні числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n , m відповідно.

Теорема 3.7. Частинний розв'язок рівняння (3.25) можна шукати у вигляді

$$Z(x) = e^{ax} (R_s(x) \cos bx + T_s(x) \sin bx) x^r,$$

де $R_s(x)$, $T_s(x)$ – многочлени степеня $s = \max(n, m)$ із невизначеними коефіцієнтами, r – кратність кореня $a + bi$ характеристичного рівняння (3.24) (тобто кількість співпадінь між $a + bi$ і коренями характеристичного рівняння (3.24)). Тут r може приймати значення 0, 1 або 2 (2 – тільки у випадку $b = 0$).

В залежності від a, b, n, m виникають різні частинні випадки. Наприклад, при $b = 0$ маємо $Z = e^{ax} x^r Q_n(x)$, $r \in \{0, 1, 2\}$; при $a = 0, n = 0, m = 0$, $r \in \{0, 1\}$ шукаємо $Z = x^r (A \cos bx + B \sin bx)$. Для визначення коефіцієнтів многочленів

прирівнюємо коефіцієнти при однакових функціях (відповідних степенях x або при синусах і косинусах).

Приклади. 1) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = 26e^{3x}$.

Розв'язання. Шукаємо загальний розв'язок у вигляді $y = Y + Z$, де Y – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + 4y = 0$, Z – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння. Для знаходження Y розв'яжемо характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$. Маємо: $k^2 = -4$; $k_{1,2} = \pm 2i$. Тоді $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Зауважимо, що права частина лінійного неоднорідного рівняння має вигляд $e^{ax} P_n(x)$, де $a = 3$, $a \neq k_1$, $a \neq k_2$, $P_n(x) = 26$ – многочлен нульового степеня ($n = 0$). Тому його частинний розв'язок слід шукати у вигляді $Z = Ae^{3x}$, де A – поки що невизначений коефіцієнт. Знайдемо A , підставивши Z , Z' , Z'' в лінійне неоднорідне рівняння. Оскільки $Z' = 3Ae^{3x}$, $Z'' = 9Ae^{3x}$, то $9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = 26e^{3x}$, то маємо: $13A = 26$; $A = 2$. Тоді $Z = 2e^{3x}$, загальний розв'язок неоднорідного рівняння знайдено: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2e^{3x}$.

2) Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' = 4x - 1$.

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо лінійне однорідне рівняння $y'' + 2y' = 0$ за допомогою характеристичного рівняння $k^2 + 2k = 0$. Його корені $k_1 = 0$, $k_2 = -2$. Тому $Y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, $Y = C_1 + C_2 e^{-2x}$. Праву частину лінійного неоднорідного рівняння можна розглядати як добуток многочлена першого степеня $(4x - 1)$ і e^{0x} (тобто $a = 0$, $b = 0$, $a = k_1$, $a \neq k_2$). Тому частинний розв'язок Z слід шукати у вигляді $Z = (Ax + B)e^{0x} x$ або $Z = Ax^2 + Bx$. Тоді $Z' = 2Ax + B$; $Z'' = 2A$. Підставивши ці вирази в рівняння маємо:

$$2A + 2 \cdot (2Ax + B) = 4x - 1 \quad \text{або} \quad 4Ax + 2A + 2B = 4x - 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах останньої рівності.

$$\begin{array}{l|l} x & 4A = 4 \\ x^0 & 2A + 2B = -1 \end{array}.$$

Розв'язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо $A = 1$, $B = -1,5$. Тоді $Z = x^2 - 1,5x$, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x} + x^2 - 1,5x.$$

3) Знайти розв'язок задачі Коші $y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}$, $y(1) = e^3$, $y'(1) = 7$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок даного рівняння, для цього треба відшукати Y – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$y'' - 6y' + 9y = 0$. Запишемо його характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$. Його корені співпадають $k_1 = k_2 = 3$. Тому $Y = (C_1 + C_2x) e^{3x}$. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $Z = (Ax + B) \cdot x^2 \cdot e^{3x} = (Ax^3 + Bx^2) e^{3x}$ (оскільки обидва корені характеристичного рівняння співпадають з a , тобто $r = 2$). Знайдемо $Z' = (3Ax^3 + 3Ax^2 + 3Bx^2 + 2Bx) e^{3x}$,
 $Z'' = (9Ax^3 + 18Ax^2 + 9Bx^2 + 6Ax + 12Bx + 2B) e^{3x}$.

Підставивши ці вирази в лінійне неоднорідне рівняння маємо:

$$(9Ax^3 + 18Ax^2 + 9Bx^2 + 6Ax + 12Bx + 2B) e^{3x} - 6(3Ax^3 + 3Ax^2 + 3Bx^2 + 2Bx) e^{3x} + 9(Ax^3 + Bx^2) e^{3x} = 6xe^{3x}$$

або, звівши подібні, $(6Ax + 2B) e^{3x} = 6xe^{3x}$. Поділивши на $2e^{3x}$, отримаємо $3Ax + B = 3x$. Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{matrix} x & \left| & 3A = 3, \\ x^0 & \left| & B = 0. \end{matrix} \quad \text{Звідки } A = 1, B = 0. \text{ Таким чином, } Z = x^3 e^{3x}. \text{ Загальний розв'язок рівняння:}$$

няння:

$$y = (C_1 + C_2x + x^3) e^{3x}.$$

Далі, використовуючи початкові умови, отримаємо $C_1 + C_2 = 0$, $3C_1 + 4C_2 = 1$.

Знайдені значення $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ підставимо у загальний розв'язок і, таким чином, запишемо розв'язок задачі Коші: $y = (x^3 + x - 1) e^{3x}$.

4) Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 6 \sin 2x - 18 \cos 2x$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$; $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Тоді $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо в вигляді $Z = (A \cos 2x + B \sin 2x) x^r$, де A, B – невідомі коефіцієнти, r – кількість коренів характеристичного рівняння, які співпадають з комплексним числом $2i$. Оскільки $r = 0$, то $Z = A \cos 2x + B \sin 2x$. Тоді $Z' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$, $Z'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$. Підставимо ці вирази в рівняння і прирівняємо коефіцієнти в лівій і правій частині при $\cos 2x$ і $\sin 2x$. Маємо:

$$\begin{aligned} -4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 2A \sin 2x - 2B \cos 2x - 2B \cos 2x - 2B \sin 2x &= \\ &= 6 \sin 2x - 18 \cos 2x; \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \cos 2x & \left| & -6A - 2B = -18; \\ \sin 2x & \left| & 2A - 6B = 6 \end{matrix} \quad \text{Розв'язавши систему, одержимо } A = 3, B = 0. \text{ Отже}$$

$Z = 3 \cos 2x$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3 \cos 2x.$$

5) Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, звідки випливає загальний розв'язок однорідного рівняння $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. Права частина неоднорідного рівняння

$f(x) = 3e^{2x} \cos x = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$, $a = 2$, $n = m = 0$, $b = 1$. Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у формі $Z = e^{ax} (R_s(x) \cos bx + T_r(x) \sin bx) x^r$, де $s = 0$, $r = 0$ (серед коренів характеристичного рівняння немає $2 + i$) або $Z = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$. Диференціюючи Z , Z' , підставляємо в дане рівняння, маємо прирівняти коефіцієнти при косинусах та

$$\text{синусах} \quad \begin{cases} \cos x & 2A + 4B = 3; \\ \sin x & 2B - 4A = 0. \end{cases}$$

Звідки $A = 0,3$, $B = 0,6$ і частинний розв'язок набуває вигляду $Z(x) = e^{2x} (0,3 \cos x + 0,6 \sin x)$. Загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^{2x} (0,3 \cos x + 0,6 \sin x).$$

б) Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 6y' + 25y = 64x^2 e^{-x} + 16 \cos 3x + 18 \sin 3x, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = -\frac{1}{8}.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок Y лінійного однорідного рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 25 = 0$ має від'ємний дискримінант, тому корені рівняння комплексно спряжені $k_{1,2} = 3 \pm 4i$. Тому $Y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$. Частинний розв'язок Z лінійного неоднорідного рівняння шукаємо, використовуючи теорему 3.6, як суму частинних розв'язків (Z_1 і Z_2) рівнянь

$$y'' - 6y' + 25y = 64x^2 e^{-x} \quad \text{і} \quad y'' - 6y' + 25y = 16 \cos 3x + 18 \sin 3x.$$

Якщо Z_1 - частинний розв'язок $y'' - 6y' + 25y = 64x^2 e^{-x}$, то

$$Z_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}. \quad A, B, C \text{ знаходимо з системи } \begin{cases} x^2 & 32A = 64, \\ & -16A + 32B = 0, \text{ тобто} \\ x^0 & 2A - 8B + 32C = 0, \end{cases}$$

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{4}. \quad \text{Тому } Z_1 = \left(2x^2 + x + \frac{1}{4} \right) e^{-x}$$

Знаходячи частинний розв'язок $Z_2 = A \cos 3x + B \sin 3x$ рівняння $y'' - 6y' + 25y = 16 \cos 3x + 18 \sin 3x$, прийдемо до визначення коефіцієнтів

$$\begin{array}{l} \cos 3x \\ \sin 3x \end{array} \left| \begin{array}{l} 16A - 18B = 16; \\ 18A + 16B = 18, \end{array} \right. \text{ звідки } A = 1, B = 0 \text{ і } Z_2 = \cos 3x.$$

Таким чином, $Z = \left(2x^2 + x + \frac{1}{4}\right)e^{-x} + \cos 3x$ і знайдено загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \left(2x^2 + x + \frac{1}{4}\right)e^{-x} + \cos 3x$$

Долучаємо початкові умови $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = -\frac{1}{8}$ для знаходження C_1 , C_2 :

$$C_1 + 1 = 0, 3C_1 + 4C_2 = -1 \text{ або } C_1 = -1, C_2 = \frac{1}{2}. \text{ Остаточню, розв'язок задачі Коші:}$$

$$y = e^{3x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x\right) + \left(2x^2 + x + \frac{1}{4}\right)e^{-x} + \cos 3x$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} (4x + 2)$;

б) $y'' - 16y' + 64y = \sin 4x$;

в) $y'' + 4y = 20 \cos 2x - 8 \sin 2x$.

2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' - 4y' + 20y = 20 \cos 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1,6$;

в) $y'' - y' = x^2 + 4e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

3.5. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases} \quad (3.26)$$

Розв'язок системи (3.26) – пара функцій $y(x)$ і $z(x)$, що задовольняє обидва рівняння.

Задачею Коші назвемо сукупність системи (3.26) і початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (3.27)$$

Теорема 3.8 Нехай функції $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ та їх частинні похідні по y і z , неперервні в області $D(D \subset R^3)$, що містить точку (x_0, y_0, z_0) . Тоді задача Коші (3.26), (3.27) має єдиний розв'язок, визначений в деякому околі точки x_0 .

Загальним розв'язком системи називається двопараметрична сім'я пар функцій $y = y(x, C_1, C_2)$, $z = z(x, C_1, C_2)$, що задовольняє такі умови:

- 1) будь-яка пара функцій цієї сім'ї є розв'язком системи;
- 2) якими б не були початкові умови (3.27) (точка (x_0, y_0, z_0)) належить області, де виконано умови теореми 3.8), в цій сім'ї знайдеться пара функцій, що їх задовольняє.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ z' = a_{21}y + a_{22}z + f_2(x) \end{cases} \quad (3.28)$$

де $a_{ij} \in R$ ($i, j = 1, 2$) $f_i(x)$ ($i = 1, 2$) – деякі функції. Розв'язати таку систему можна звівши її до одного лінійного рівняння другого порядку. Покажемо на прикладі, як це можна зробити.

Приклад. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} y' = 3y + z + x^2, \\ z' = 4y + 3z, \end{cases} \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 4.$

Розв'язання. З першого рівняння знайдемо z : $z = y' - 3y - x^2$. Продиференціюємо по x обидві частини цього рівняння. Маємо $z' = y'' - 3y' - 2x$. Підставимо обидві ці рівності в друге рівняння системи. Одержимо:

$$y'' - 3y' - 2x = 4y + 3 \cdot (y' - 3y - x^2) \quad \text{або} \quad y'' - 6y' + 5y = -3x^2 + 2x.$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якого має вигляд: $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - 0,6x^2 - 1,04x - 1,008$ (пропонуємо перевірити самостійно). Одна з шуканих функцій $y(x)$ знайдена. Другу $z(x)$ знайдемо з рівняння $z = y' - 3y - x^2$. Оскільки $y' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} - 1,2x - 1,04$, то $z = -2C_1 e^x + 2C_2 e^{5x} + 0,8x^2 + 1,92x + 1,984$.

Таким чином, загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} - 0,6x^2 - 1,04x - 1,008, \\ z = -2C_1 e^x + 2C_2 e^{5x} + 0,8x^2 + 1,92x + 1,984. \end{cases}$$

Підставивши початкові умови, отримаємо: $\begin{cases} C_1 + C_2 - 1,008 = 3 \\ -2C_1 + 2C_2 + 1,984 = 4 \end{cases}$. Розв'язавши

цю систему, знайдемо: $C_1 = 1,5$, $C_2 = 2,508$. Розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y = 1,5e^x + 2,508e^{5x} - 0,6x^2 - 1,04x - 1,008, \\ z = -3e^x + 5,016e^{5x} + 0,8x^2 + 1,92x + 1,984. \end{cases}$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y + 2z - 6e^x. \end{cases}$$

2. Розв'язати задачу Коші: $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 7y - 2z, \end{cases} y(0) = 1, z(0) = 2.$

Розділ 4

Числові та функціональні ряди

4.1. Поняття про збіжність і суму числового ряду

Нехай задана числова послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Означення. Вираз виду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (4.1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – *членами* числового ряду. Число a_n називається *загальним членом* числового ряду. Числовий ряд (4.1) зручно записувати коротко за допомогою символу підсумовування $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Якщо дано числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то завжди можна розглянути *послідовність його часткових сум* $\{S_n\}$, де

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$$

Приклади. 1. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$, називається *геометричною прогресією*, а число q – *знаменником* геометричної прогресії. Якщо $q \neq 1$, то

$$S_1 = a, S_2 = a + aq = a \left(\frac{1-q^2}{1-q} \right), S_3 = a + aq + aq^2 = a \left(\frac{1-q^3}{1-q} \right), \dots,$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right), \dots$$

2. Дано числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Знайдемо послідовність його часткових сум:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 - \frac{1}{4};$$

...

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)};$$

...

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ збігається.

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *розбіжним*, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ розбіжна.

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Величина границі називається *сумою* числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і позначається S . Таким чином, згідно з означенням $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Приклади. 1. Геометрична прогресія $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$, збігається при $|q| < 1$ і має суму $S = \frac{a}{1-q}$.

Доведення. Оскільки $S_n = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q},$$

оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

2. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збігається і має суму $S = 1$. Дійсно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} \right\} = 1.$$

3. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називається *гармонічним* рядом. Покажемо, що гармонічний ряд розбігається. Розглянемо часткові суми $S_2, S_4, S_8, \dots, S_{2^k}, \dots$ гармонічного ряду:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{2},$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{2},$$

$$\dots$$

$$S_{2^k} = S_{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^k} >$$

$$> \frac{k-1+2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}(2-1) = 2^{k-1}} = \frac{k+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{2}.$$

Звідси випливає, що послідовність $\{S_{2^k}\}$ необмежена. Тоді послідовність часткових сум $\{S_n\}$ самого гармонічного ряду розбігається, оскільки в ньому є розбіжна підпослідовність. Отже гармонічний ряд розбігається.

Основне завдання теорії числових рядів полягає в тому, щоб з'ясувати, чи є певний числовий ряд збіжним або розбіжним.

Основні властивості збіжних числових рядів. Необхідна умова збіжності числового ряду

1. Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а λ і μ є деякими числами, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ також збігається.

Доведення. Оскільки числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, то збігаються послідовності часткових сум цих рядів. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n^{(1)}\} = S^{(1)}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n^{(2)}\} = S^{(2)}$.

Очевидно, що

$$S_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) =$$

$$= \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \mu(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \lambda S_n^{(1)} + \mu S_n^{(2)}.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\lambda S_n^{(1)} + \mu S_n^{(2)}\} = \lambda S^{(1)} + \mu S^{(2)}.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ збігається, оскільки послідовність його часткових сум збігається.

Зауваження. Якщо $S^{(1)}$ і $S^{(2)}$ – суми числових рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, відповідно, то число $(\lambda S^{(1)} + \mu S^{(2)})$ є сумою числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$.

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ називається *залишком числового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Наприклад, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$ є залишком ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Дійсно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то збігається будь-який залишок цього ряду.

Доведення. Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = S$. Розглянемо залишок цього ряду $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Тоді послідовність часткових сум залишку має вигляд:

$$S_1^{(1)} = a_{k+1}, S_2^{(1)} = a_{k+1} + a_{k+2}, \dots, S_n^{(1)} = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n}.$$

Очевидно. $S_n^{(1)} = S_{n+k} - S_k$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n^{(1)}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{S_{n+k} - S_k\} = S - S_k.$$

Це означає, що залишок $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ збігається.

3. Якщо деякий залишок числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то збігається і сам ряд.

Доведення. Припустимо, що збігається залишок ряду $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Це означає, що послідовність часткових сум залишку

$$\bar{S}_1 = a_{k+1}, \dots, \bar{S}_2 = a_{k+2} + a_{k+1}, \dots, \bar{S}_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n}, \dots$$

збігається до числа \bar{S} . Оскільки $S_{n+k} = S_k + \bar{S}_n$, і послідовність $\{\bar{S}_n\}$ збігається, то збігається і послідовність $\{S_{n+k}\}$. Отже, послідовність часткових сум $\{S_n\}$ самого

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, оскільки в збіжну підпоследовність не входить тільки скінчене число його членів $\{S_{n+k}\}$.

Теорема 4.1 (необхідна умова збіжності). Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то границя його загального члена дорівнює нулю, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доведення. Припустимо, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Це означає, що последовність його часткових сум $\{S_n\}$ збігається. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \{S_n\} = S$. Тоді последовність $\{S_{n-1}\}$ також збігається до S . Очевидно, що

$$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Зауваження. Наведена вище умова збіжності необхідна, але не достатня. Наприклад, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Однак $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

За допомогою необхідної умови зручно встановити розбіжність числових рядів, так як має місце наступний наслідок теореми 4.1.

Наслідок. Якщо спільний член $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряду не прямує до нуля, тобто границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ або не існує, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Приклади. 1. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ розбігається, тому що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0.$$

2. Геометрична прогресія $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$, розбігається при $|q| \geq 1$. Дійсно,

якщо $q = 1$, то геометрична прогресія має вигляд: $a + a + \dots + a + \dots$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$. Якщо $q = -1$, то геометрична прогресія має вигляд:

$a - a + a - a + \dots$. Тоді границя загального члена ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^{n-1} a)$ не існує.

Якщо $|q| > 1$, то последовність $\{aq^{n-1}\}$ є необмеженою. Таким чином, у всіх розглянутих випадках геометрична прогресія розбігається за необхідною ознакою збіжності.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти часткові суми S_2, S_4, S_5, S_7 для числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+1}$.

2. Побудуйте послідовність часткових сум $\{S_n\}$ числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і

знайти суму ряду, якщо:

а) $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N};$

б) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad n \in \mathbb{N};$

в) $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad n \in \mathbb{N};$

г) $a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, \quad n \in \mathbb{N};$

д) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N};$

е) $a_n = 2\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. За допомогою необхідної умови збіжності числового ряду довести розбіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3 \cdot 2^n+2};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2-1}.$

4. Знайти суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо:

а) $a_n = \frac{3^{n-1}+2^n}{6^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N};$

б) $a_n = \frac{2^{n-1}+3}{4^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N};$

в) $a_n = \frac{3^{n-1}+(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{6^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

4.2 Ознаки збіжності рядів з додатними членами

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *знакододатним*, якщо всі його члени невід'ємні, тобто $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.2 (загальна ознака збіжності знакододатного ряду). *Знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність часткових сум цього ряду обмежена зверху.*

Доведення необхідності. Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то збігається послідовність його часткових сум $\{S_n\}$. Будь-яка збіжна послідовність є обмеженою. Отже послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху

Доведення достатності. Задається знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а послідовність його часткових сум $\{S_n\}$ обмежується зверху. Оскільки

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n,$$

де $a_n \geq 0$, то $S_n \geq S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Це означає, що послідовність часткових сум $\{S_n\}$ не спадає. Якщо неспадна послідовність обмежена зверху, то вона збігається. Значить, послідовність часткових сум $\{S_n\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжною. Отже збіга-

ється і сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад. Дано числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Оскільки

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{1 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то послідовність часткових сум ряду $\{S_n\}$ обмежена зверху. Згідно з теоремою 4.2, ряд збігається.

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ називається мажорантою знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо $b_n \geq a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Перша ознака порівняння. Якщо мажоранта знакододатного ряду збігається, то збігається і сам ряд. Якщо знакододатний ряд розбігається, то розбігається і будь-яка з його мажорант.

Доведення. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається і є мажорантою знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Так як знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то послідовність його часткових сум $\{S_n^{(1)}\}$ обмежена зверху, тобто $S_n^{(1)} \leq A$, $n \in \mathbb{N}$.

За умовою $b_n \geq a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^{(1)} \leq A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що послідовність часткових сум $\{S_n\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обмежена зверху.

В силу загальної ознаки збіжності знакододатного ряду цей ряд збігається.

Друга частина твердження доводиться аналогічними міркуваннями.

Приклад. Розглянемо збіжність числового ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Спочатку покажемо, що $\ln n < n$ для $n \geq 2$. Для цього розглянемо функцію $f(x) = x - \ln x$, де $x > 0$.

Ця функція є неперервною на множині $x \geq 1$. Її похідна дорівнює $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, отже $f'(x) > 0$ для всіх $x > 1$. Значить, функція $f(x) = x - \ln x$ зростає на множині $x \geq 1$. Тоді $n - \ln n > 1 - \ln 1 = 1 > 0$ для $n > 1$. Отже, $n > \ln n$ для $n \geq 2$ і, отже, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ для $n \geq 2$. Знакододатний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається як залишок гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Тоді розбігається і його мажоранта $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Друга ознака порівняння. Нехай дано два знакододатних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

- 1) якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає з збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- 2) якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
- 3) якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. Припустимо, існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Послідовність, що збігається, завжди обмежена. Отже, існує число $\lambda > 0$ таке, що $\frac{a_n}{b_n} \leq \lambda$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $a_n \leq \lambda b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо ряд збігається $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також буде збігатися, оскільки він має збіжну мажоранту $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda b_n)$. Перше твердження доведено.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$. Міркуючи таким же чином і використовуючи друге твердження першої ознаки, отримуємо, що з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ впливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Нарешті, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \neq 0$. Тоді збіжність ряду впливає з збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Аналогічний висновок виходить і для розбіжних рядів. Таким чином, ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Раніше було встановлено, що

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збігається. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ теж збігається.

Теорема 4.3 (ознака збіжності Даламбера). Нехай дано числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Припустимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Якщо $d < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Якщо $d > 1$, то цей ряд розбігається.

Доведення. Нехай $d < 1$. Тоді є число $\varepsilon > 0$, що $q = d + \varepsilon < 1$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ для $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - d \right| < \varepsilon.$$

Отже, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d + \varepsilon = q$ для всіх $n \geq N$. Тоді $a_{n+1} < qa_n$, де $n \geq N$.

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< qa_N, \\ a_{N+2} &< qa_{N+1} < q^2 a_N, \\ &\dots \\ a_{N+k} &< qa_{N+k-1} < \dots < q^k a_N, \\ &\dots \end{aligned}$$

Числовий ряд

$$a_N + qa_N + q^2 a_N + \dots + q^k a_N + \dots$$

збігається, тому що є геометричною прогресією зі знаменником q , де $0 < q < 1$.

Ряд

$$a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+k} + \dots$$

збігається, оскільки має збіжну мажоранту. Тоді збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тому що

його залишок збігається.

Нехай $d > 1$. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$, що $d - \varepsilon = q > 1$.

За умовою $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тоді для $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для всіх $n \geq N$

виконується нерівність $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - d \right| < \varepsilon$. Отже, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > d - \varepsilon = q$ для всіх $n \geq N$. Тоді

$a_{n+1} > qa_n$, де $n \geq N$. Отже,

$$a_{N+1} > qa_N,$$

$$a_{N+2} > q^2 a_N,$$

.....

$$a_{N+k} > q^k a_N,$$

.....

Оскільки $q > 1$, то послідовність $\{a_n\}$ є необмеженою. Це означає, що початковий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається за необхідною умовою збіжності.

Зауваження. Якщо за умов теореми 5.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то вихідний ряд може

як збігатися, так і розбігатися. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

збігається. Однак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1} \right)}{\left(\frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{(n+1)^2} \right)}{\left(\frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2} = 1.$$

Приклад. Розглянемо числовий ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 \cdot ((2n)!)^2}{((2n+2)!) \cdot (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

то цей ряд збігається за ознакою Даламбера.

Теорема 4.4 (радикальна ознака Коші). Нехай дано числовий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ Припустимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Якщо $k < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ряд збігається.

Якщо $k > 1$, то ряд розбігається.

Доведення. Нехай $k < 1$. Тоді є число $\varepsilon > 0$ таке, що $k + \varepsilon = q < 1$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ для $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що $|\sqrt[n]{a_n} - k| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$ $\sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon = q$ для всіх $n \geq N$.

$$\begin{aligned} a_N &< q^N, \\ a_{N+1} &< q^{N+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Звідси випливає, що ряд $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ збігається, тому що він має збіжну мажоранту

$$\sum_{n=N}^{\infty} q^n \text{ де } 0 < q < 1.$$

Нехай $k > 1$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке що $k - \varepsilon = q > 1$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то для $\varepsilon > 0$ знайдеться число N , таке що $|\sqrt[n]{a_n} - k| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N$. Тоді $\sqrt[n]{a_n} > k - \varepsilon = q$ для всіх $n \geq N$. Звідси

$$\begin{aligned} a_N &> q^N, \\ a_{N+1} &> q^{N+1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Оскільки $q > 1$, то послідовність $\{a_n\}$ є необмеженою. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається за необхідною ознакою збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, то ряд збігається.

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може або збігатися, або розбігатися. Насправді, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$$

оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} = 1$.

Теорема 4.5 (інтегральна ознака збіжності Коші). Нехай функція $f(x)$ є невід'ємною і не зростаючою в інтервалі $[1, +\infty)$. А також

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$$

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається невластивий

інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Доведення. Якщо $x \in [k, k+1]$, то $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Отже, $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, де $k = 1, 2, \dots$. Тоді

$$\int_k^{k+1} a_{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} a_k dx, k = 1, 2, \dots$$

Отже

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq a_k, k = 1, 2, \dots$$

Припустимо, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Це означає, що послідовність часткових сум $\{S_n\}$ цього ряду обмежена зверху, тобто існує число A таке, що $S_n \leq A, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо функцію $F(b) = \int_1^b f(x) dx$, де $b \geq 1$. Оскільки за умовою функція $f(x) \geq 0$ на множині $[1, +\infty)$, то $F(b)$ є неспадною функцією. Звідси, якщо $b < N$, де N — деяке фіксоване натуральне число, то

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_1^b f(x) dx \leq \int_1^N f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{N-1}^N f(x) dx \leq \\ &\leq a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} \leq A. \end{aligned}$$

Таким чином, $F(b) \leq A$, де $b \geq 1$. Оскільки функція $F(b)$, яка не спадає на множині $b \geq 1$, обмежена зверху на цій множині, то існує $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$. Значить

інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ збігається.

Тепер припустимо, що невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ збігається. Це означає, що функція $F(b) = \int_1^b f(x) dx$ обмежена зверху, тобто існує число B таке, що

$\int_1^b f(x) dx \leq B$ для будь-якого $b \in [1, +\infty)$. Тоді

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx =$$

$$= a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + B, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що послідовність часткових сум $\{S_n\}$ знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обмежена зверху. Згідно з теоремою 4.2, ряд збігається.

Приклад. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ називається *узагальненим гармонічним* рядом. При $k = 1$ маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. При $k \leq 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ розбігається в силу необхідної умови збіжності. Якщо $k > 0$, то функція $f(x) = \frac{1}{x^k}$ є невід'ємною і не зростаючою на множині $x \geq 1$, а також $f(1) = \frac{1}{1^k}, f(2) = \frac{1}{2^k}, \dots, f(n) = \frac{1}{n^k}, \dots$.

Невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ збігається при $k > 1$ і розбігається при $k \leq 1$. Отже згідно з теоремою 4.5, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ збігається при $k > 1$ розбігається, якщо $k \leq 1$.

Приклади. 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2$.

Розв'язання. Дослідимо цей ряд за допомогою другої ознаки порівняння. За ряд, з яким будемо порівнювати даний ряд, візьмемо узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Маємо $a_n = \left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2, b_n = \frac{1}{n^k}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2n+1}{4n^2+1} \right)^2 : \frac{1}{n^k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 n^k}{(4n^2+1)^2}.$$

Для того, щоб можна було скористатися граничною ознакою порівняння треба щоб границя була скінченною і ненульовою. Це виконується, коли степені чисельника та знаменника рівні. Отже, обираємо $k = 2$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 n^2}{(4n^2+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 4n^3 + n^2}{16n^4 + 8n^2 + 1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки отримали скінчену ненульову границю, то обидва ряди мають однакову збіжність. Узагальнений гармонічний ряд при $p = 2$ збігається. Отже, заданий ряд також є збіжним.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$.

Розв'язання. Будемо користуватися першою ознакою порівняння. За ряд, з яким будемо порівнювати даний ряд, візьмемо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Для даних рядів виконується нерівність: $\frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$; $n = 1, 2, \dots$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ збігається ($k = 3/2 > 1$) та є мажорантою

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$, отже заданий ряд також збігається за першою ознакою порівняння.

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+2)!}{n^n}$.

Розв'язання. За ознакою Даламбера маємо:

$$a_n = \frac{3^n(n+2)!}{n^n}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n(n+2)!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(n+3)!n^n}{3^n(n+2)!(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (n+3)! \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)(n+2)!} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то цей ряд за ознакою Даламбера розбігається.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші маємо:

$$a_n = \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n};$$

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\frac{n+1}{n}} = 10 > 1.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то цей ряд за радикальною ознакою Коші розбігається.

5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln^3(n+1)}}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)}}$. Ця функція є

додатною, неперервною та монотонно спадаючою при $x \geq 1$. Тому можливо досліджувати цей ряд на збіжність, користуючись інтегральною ознакою збіжності. Для цього необхідно дослідити на збіжність невластивий інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln^3(x+1)}} &= \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\sqrt{\ln^3(x+1)}} = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\ln(x+1)}} \Big|_1^b = \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\ln(b+1)}} - \frac{2}{\sqrt{\ln 2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}}. \end{aligned}$$

Оскільки невластивий інтеграл збігається, то даний ряд також збігається.

Задачі для самостійної роботи

1. Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознак порівняння:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$;

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$$

$$з) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}};$$

$$к) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

2. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt{3})^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)5^n}{n^2+1};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+5)2^{2n}}.$$

3. Дослідити на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші:

$$а) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{3}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n;$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}; \quad д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

4. Дослідити на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+1}; \quad б) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}; \quad г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

4.3 Знакозмінні числові ряди.

Абсолютна і умовна збіжність числового ряду

Означення. Числовий ряд називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Якщо задано знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, то завжди можна розглядати знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, що складається з модулів доданків вихідного ряду.

Теорема 4.6. Якщо збігається ряд модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, то збігається і сам ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Доведення. Припустимо, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ збігається. Позначимо

$$p_n = \begin{cases} c_n, & \text{якщо } c_n \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } c_n < 0. \end{cases}$$

Тоді для будь-якого номера n виконується нерівність $0 \leq p_n \leq |c_n|$. Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ збігається, тому що він має збіжну мажоранту $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Позначимо

$$q_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c_n \geq 0, \\ -c_n, & \text{якщо } c_n < 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $0 \leq q_n \leq |c_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ збігається, тому що він має збіжну мажоранту $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Оскільки числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ збігаються, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$. З іншого боку

$$p_n - q_n = \begin{cases} c_n - 0, & \text{якщо } c_n \geq 0 \\ 0 - (-c_n), & \text{якщо } c_n < 0. \end{cases}$$

Отже, $p_n - q_n = c_n$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді вихідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається.

Означення. Кажуть, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно збіжний, якщо збігається ряд, що складається з модулів членів цього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$.

Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, а ряд модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається збіжним умовно.

Щоб навести приклад ряду, який збігається умовно, розглянемо знакопереміжні ряди.

Означення. Числовий ряд називається знакопереміжним, якщо кожен наступний член цього ряду відрізняється за знаком від попереднього.

Можна вважати, що знакопереміжний числовий ряд має наступний вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \text{ де } a_n > 0.$$

Зазначимо, що в цьому запису перший член ряду є додатнім.

Теорема 4.7 (теорема Лейбніца). Знакопереміжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, збігається, якщо послідовність $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля, тобто виконуються наступні умови: 1) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ і 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 0$.

Доведення. Розглянемо часткові суми цього ряду з парними числами. Тоді

$$\begin{aligned} S_{2k} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2k-2} + a_{2k-1} - a_{2k} = \\ &= S_{2k-2} + a_{2k-1} - a_{2k} \geq S_{2k-2}, \text{ де } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Це означає, що послідовність $\{S_{2k}\}$ не спадає. Крім того,

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1, k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки неспадна послідовність $\{S_{2k}\}$ обмежена зверху, вона збігається. Нехай $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S$. З іншого боку,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} + a_{2k+1}) = S.$$

Таким чином, послідовність часткових сум даного ряду є об'єднанням двох підпослідовностей, що збігаються до одного і того ж числа. Це означає, що і сама послідовність всіх часткових сум ряду збігається.

Наслідок 1. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ збігається умовно.

Дійсно, цей ряд є знакопереміжним, причому $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$,

а $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0$. Згідно з теоремою Лейбніца, цей ряд збігається. Однак ряд, що

складається з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, є гармонічним рядом, який розбігається.

Значить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ збігається лише умовно.

Наслідок 2. Якщо знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, задовольняє умові теореми Лейбніца, то виконується нерівність

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Послідовність $\{S_{2k}\}$ не спадна, а $\lim_{k \rightarrow \infty} \{S_{2k}\} = S$. Звідси випливає, що $S_{2k} \leq S$, $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, послідовність $\{S_{2k-1}\}$ не є незростаючою. Дійсно,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) \leq S_{2k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \{S_{2k-1}\} = S$, $S_{2k-1} \geq S$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо n – парне число, то $S_n \leq S$, $S_{n+1} \geq S$. Це означає, що $S_n \leq S \leq S_n + a_{n+1}$. Звідси

$$0 \leq S - S_n \leq a_{n+1}.$$

Якщо n – непарне число, то $S_n \geq S$, $S_{n+1} = -a_{n+1} + S_n \leq S$. Тоді $-a_{n+1} + S_n \leq S \leq S_n$. Звідси

$$0 \leq S_n - S \leq a_{n+1}.$$

Таким чином, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Приклад. Знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4}$ задовольняє умові теореми Лейбніца. Щоб знайти суму цього ряду з точністю до 0,01, з'ясуємо, для якого найменшого n виконується нерівність $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^4} < 0,01$. Оскільки $(n+1)^4 > 100$, то $n = 3$. $|S - S_3| < 0,01$,

$$S \approx 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} = 0,95$$

з точністю до 0,01.

Приклад. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Розв'язання: Оскільки заданий ряд є знакопереміжним, то можемо скористатися ознакою Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n} = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} - \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \dots$$

Абсолютні значення членів даного знакопереміжного ряду зменшуються: $\frac{1}{6} > \frac{1}{27} > \frac{1}{108} > \frac{1}{405} > \dots$ і, крім того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n} = 0.$$

Тому, за ознакою Лейбніца, цей ряд збігається. Визначимо характер збіжності даного ряду: абсолютно він збігається чи умовно. Для цього складемо ряд з

абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 3^n}$ та дослідимо його на збі-

жність за допомогою ознаки Даламбера. Маємо

$$a_n = \frac{1}{(n+1)3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)3^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то даний ряд збігається. Таким чином, даний знако-переміжний ряд збігається абсолютно.

Задачі для самостійної роботи

1. Дослідити на збіжність знакопереміжні ряди:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n!}; & \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}; & \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \\ \text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{6n-5}; & \text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^{n-1}}; & \text{і)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \end{array}$$

4.4 Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду

Функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

називається *степеневим рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – коефіцієнтами *степеневого ряду*, а число c – *центром* степеневого ряду.

Степеневий ряд з центром в точці c можна записати коротко:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Якщо $c = 0$, то степеневий ряд з *центром* у нулі має вигляд:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \text{ або } \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Очевидно, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ завжди збігається при $x = c$.

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ збігається тільки при $x = c$, то він називається *скрізь розбіжним*. Якщо степеневий ряд збігається на всій числовій прямій, то він називається *скрізь збіжним*.

Теорема 4.8 (теорема Абеля). *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_1 \neq 0$, то він збігається абсолютно при будь-яких $|x| < |x_1|$. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при $x = x_2$, то він розбігається при всіх $|x| > |x_2|$.*

Доведення. Припустимо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці $x = x_1 \neq 0$. Це означає, що збігається числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. В силу необхідного умови збіжності числового ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n x_1^n\} = 0$. Отже, існує число $M > 0$ таке, що $|a_n x_1^n| \leq M, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Якщо } |x| < |x_1|, \text{ то } |a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \left(\frac{x}{x_1} \right)^n \right| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ збігається, тому що є геометричною прогресією зі знаменником $q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$. Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ збігається при всіх $|x| < |x_1|$, тому що він має збіжну мажоранту $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$. А значить степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається абсолютно при всіх $|x| < |x_1|$.

Припустимо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при $x = x_2$, але збігається при $x = x_3$, де $|x_3| > |x_2|$ (див. рис. 4.1). З уже доведеного випливає, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ повинен збігатися на інтервалі $(-|x_3|, |x_3|)$, що суперечить умові, так як $x_2 \in (-|x_3|, |x_3|)$.



Рис. 4.1.

Наслідок 1. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не скрізь збігається або розбігається скрізь, то існує число $R > 0$ таке, що степеневий ряд збігається абсолютно для всіх $|x| < R$ і розбігається для всіх $|x| > R$.

Доведення. За умовою існують точки: $x_1 \neq 0$, в якій ряд збігається, і x_2 , в якій ряд розбігається. Якщо Ω – область збіжності степенєвого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то за теоремою Абеля маємо $(-|x_1|, |x_1|) \subset \Omega$ і $\Omega \subset (-|x_2|, |x_2|)$ (див. рис. 4.2).



Рис.4.2.

Число R назвемо *точною верхньою межею* (супремумом) множини Ω ($R = \text{Sup } \Omega$), якщо: 1) будь-який елемент $x \in \Omega$ задовольняє умові $x \leq R$, 2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $x \in \Omega$, що $x > R - \varepsilon$.
Очевидно, що $R > 0$.

Покажемо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається у всіх $|x| > R$ і збігається абсолютно у всіх $|x| < R$.

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці $x = y$, де $|y| > R$, то за теоремою Абеля $(-|y|, |y|) \subset \Omega$. Тоді $\text{Sup } \Omega = R \geq |y| > R$ отже приходимо до протиріччя. Значить, степеневий ряд розбігається для всіх $|x| > R$.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається в точці $x = z$, де $|z| < R$, то $\Omega \subset (-|z|, |z|)$. Тоді $\text{Sup } \Omega = R \leq |z| < R$. З отриманого протиріччя ($R < R$) випливає, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при всіх $|x| < R$, причому абсолютно.

Наслідок 2. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ не скрізь збігається або роз-

бігається скрізь, то існує число $R > 0$ таке, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ збігається абсолютно при всіх $|x-c| < R$ і розбігається при всіх $|x-c| > R$.

Доведення. Припустимо, $z = x - c$. Тоді степеневий ряд прийме вигляд:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Згідно з першим наслідком знайдеться число $R > 0$, що степеневий ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається абсолютно при всіх $|z| < R$ і розбігається при всіх $|z| > R$.

Отже, степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ абсолютно збігається при $|x-c| < R$ і розбігається при $|x-c| > R$.

Означення. Число $R > 0$ таке, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ абсолютно збігається при $|x-c| < R$ і розбігається при $|x-c| > R$ називається *радіусом збіжності цього ряду*.

Інтервал $(c-R, c+R)$ називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Для знаходження радіуса збіжності можна користатись формулами

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ або } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Зауваження. Будемо вважати, що радіус збіжності скрізь збіжного ряду дорівнює $+\infty$, а радіус збіжності скрізь розбіжного ряду дорівнює 0 .

Для того щоб знайти область збіжності Ω степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, не-

обхідно спочатку визначити радіус збіжності цього ряду R . Якщо $R = 0$, то область збіжності ряду $\Omega = \{c\}$.

Якщо $R = +\infty$, тоді $\Omega = (-\infty, +\infty)$. Якщо $0 < R < +\infty$, то інтервал збіжності ряду $(c-R, c+R) \subset \Omega$ і степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ розбігається при всіх $|x-c| > R$. Щоб знайти область збіжності Ω степеневого ряду, потрібно з'ясувати, збігається або розбігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ при $x = c - R$ і $x = c + R$.

Приклади. 1. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Розв'язання. Щоб знайти радіус збіжності цього ряду, скористаємося формулою:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0.$$

Оскільки $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$, то степеневий ряд збігається абсолютно на всій числовій прямій.

Відповідь: $R = +\infty$, $\Omega = (-\infty, +\infty)$.

2. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 0 \in \Omega$.

При $x \neq 0$ отримуємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Тоді степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ розбігається при всіх $x \neq 0$.

Ряд розбіжний скрізь, його радіус збіжності дорівнює $R = 0$.

Відповідь: область збіжності $\Omega = \{0\}$.

3. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$.

Розв'язання. Розглянемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Тоді степеневий ряд збігається абсолютно, якщо $|x-1| < 1$ і розбігається якщо $|x-1| > 1$. Отже, радіус збіжності ряду $R = 1$, а інтервал збіжності $(0, 2)$.

Якщо $x = 2$, то отримуємо розбіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x = 0$ ряд має

вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Цей числовий ряд умовно збігається в силу теореми Лейбніца.

Відповідь: область збіжності степеневому ряду – напівінтервал $\Omega = [0, 2)$.

4. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності. Для даного ряду

$$a_n = \frac{2^n}{n^2 + 1}; \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} = \frac{2^{n+1}}{n^2 + 2n + 2}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^n}{n^2 + 1} : \frac{2^{n+1}}{n^2 + 2n + 2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)2^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, даний ряд збігається при $|x| < \frac{1}{2}$. Тоді інтервал збіжності $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Тепер дослідимо поведінку ряду у точках $x_1 = -\frac{1}{2}$ й $x_2 = \frac{1}{2}$. Підставимо в даний ряд замість x значення $-\frac{1}{2}$. Одержимо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Дослідимо цей знакопереміжний ряд на збіжність за ознакою Лейбніца. Для нього виконуються наступні умови:

$$1) \frac{1}{1^2 + 1} > \frac{1}{2^2 + 1} > \frac{1}{3^2 + 1} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right| = 0.$$

Умови ознаки Лейбніца виконано. Отже при $x = -\frac{1}{2}$ даний степеневий ряд збігається.

При $x = x_2 = \frac{1}{2}$ дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$. Порівняємо його з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається. Оскільки $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$, то за першою

ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ збігається.

Відповідь: область збіжності $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

5. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{n!}$.

Розв'язання:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отже: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(n+1)!}{n! \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot n!(n+1)}{n! \sqrt{n+1}} = \infty$. Даний ряд збігається на усій числовій осі, тобто, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: область збіжності $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1}$.

Розв'язання: Коефіцієнти цього ряду при парних степенях $(x-4)$ дорівнюють нулю. Тому ми не можемо скористатися безпосередньо формулами для обчислення радіуса збіжності.

Винесемо спільний множник $(x-4)$ за знак суми.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1} = (x-4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n}}{2n+1}$$

Скористаємося ознакою Даламбера.

$$a_n = \frac{(x-4)^{2n}}{2n+1}; \quad a_{n+1} = \frac{(x-4)^{2n+2}}{2n+3}; \quad d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{2n+2} \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot (x-4)^{2n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((x-4)^2 \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \right) = (x-4)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = (x-4)^2.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається при $d < 1$ й розбігається при $d > 1$. Для знаходження точок збіжності розв'яжемо нерівність $(x-4)^2 < 1$; $x^2 - 8x + 16 < 1$; $x^2 - 8x + 15 < 0$; $(x-5)(x-3) < 0$; $x \in (3; 5)$.

При виконанні умови $(x-4)^2 > 1$ даний ряд розбігається. Ця нерівність виконується при $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$. Отже інтервалом збіжності є $(3; 5)$.

Дослідимо на збіжність цей ряд в кінцях інтервалу збіжності. Нехай $x = 5$.

Маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. За допомогою ознаки порівняння у граничній формі даний

ряд порівняємо з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, обидва ряди мають однакову збіжність і при $x=5$ степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n+1}}{2n+1} \text{ розбігається.}$$

Нехай тепер $x=3$. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ Оскільки ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{ розбігається, то і ряд } - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \text{ також розбіжний.}$$

Відповідь: $x \in (3;5)$

Основні властивості сум степеневих рядів

Наведемо без доведення деякі теореми щодо властивостей сум степеневих рядів.

Теорема 4.9 (про неперервність суми степеневих рядів). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ не розбігається скрізь, то його сума неперервна в області збіжності цього ряду.

Приклад. Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Область збіжності цього ряду $\Omega = [-1,1]$. Так

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = S(x), \text{ де } x \in [-1,1].$$

Згідно з теоремою 4.9, функція $S(x)$ є неперервною на відрізку $[-1,1]$.

Теорема 4.10 (про інтегровність суми степеневих рядів). Нехай степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ не скрізь розбігається.

$$\text{Якщо } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = S(x), x \in \Omega, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} = \int_c^x S(t) dt, x \in \Omega.$$

Приклад. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ є сумою геометричної прогресії зі знаменником $q = -x^2$. Отже, $\Omega = (-1,1)$. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, де $x \in (-1,1)$. За

теоремою про інтегровність суми степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \text{arctg } x, \text{ де } x \in (-1,1). \quad (4.2)$$

Однак степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ збігається на відріжку $[-1,1]$, а його сума $S(x)$ є неперервною на цьому відріжку. Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x, \text{ де } x \in [-1,1].$$

Зокрема, коли $x = 1$ Отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Якщо задано степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, то можна розглянути новий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$, отриманий шляхом почленного диференціювання вихідного ряду.

Можна довести, що у разі почленного диференціювання степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ радіус його збіжності не змінюється. Також справедлива наступна теорема.

Теорема 4.11. *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ не є скрізь розбіжним, то*

його можна диференціювати скільки завгодно разів в межах інтервалу збіжності. Тобто якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = S(x), \text{ } x \in (c-R, c+R),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = S'(x), \text{ } x \in (c-R, c+R),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} = S''(x), \text{ } x \in (c-R, c+R),$$

.....

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k} = S^{(k)}(x), \text{ } x \in (c-R, c+R),$$

.....

Приклад. Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Цей ряд збігається на всій чи-

словій прямій. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x)$, де $x \in (-\infty, +\infty)$.

Згідно з теоремою 4.11, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = S'(x)$, де $x \in (-\infty, +\infty)$.

Оскільки ряди $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ співпадають, то, $S(x) = S'(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Нехай $f(x) = S(x)e^{-x}$. Тоді $f'(x) = S'(x)e^{-x} - S(x)e^{-x} = e^{-x} (S'(x) - S(x)) = 0$, де $x \in (-\infty, +\infty)$. Тому $f(x) = c$, $x \in (-\infty, +\infty)$ і $S(x) = ce^x$.

Очевидно, що $S(0) = 1$. Тоді $c = 1$. Таким чином, $S(x) = e^x$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (4.3)$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \cdot \ln n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$;

ж) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} \cdot x^{n^2}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$;

і) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^{2n}}{n \cdot 3^n}$;

н) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-2)^n$;

о) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

4.5 Ряди Тейлора

Припустимо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ збігається до функції $f(x)$ на

інтервалі $(c-R, c+R)$, $R > 0$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = f(x)$, $x \in (c-R, c+R)$.

Степеневий ряд може бути диференційований в границях інтервалу збіжності скільки завгодно разів. Отже, ми можемо отримати такі рівності:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} &= f'(x), \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2} &= f''(x), \\ \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-c)^{n-3} &= f'''(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k} &= f^{(k)}(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Тоді при $x = c$ отримуємо рівності:

$$a_0 = f(c), 1 \cdot a_1 = f'(c), 2 \cdot 1 \cdot a_2 = f''(c), 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = f'''(c), \dots, \\ k(k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_k = f^{(k)}(c), \dots$$

Отже

$$a_0 = f(c), a_1 = \frac{f'(c)}{1!}, a_2 = \frac{f''(c)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(c)}{3!}, \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \dots$$

Значить, наш ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Означення. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ називають *рядом Тейлора* функції

$f(x)$ у точці x_0 . Якщо $x_0=0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ називають також *рядом Маклорена* функції $f(x)$.

Зауваження. Ряд Тейлора для функції $f(x)$ не обов'язково повинен збігатися до самої функції $f(x)$. Однак можна довести, що справедливе, наприклад, наступне твердження.

Теорема 4.12. *Нехай $f(x)$ диференційовна скільки завгодно разів на інтервалі $(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$, $\Delta > 0$. Якщо існує число $M > 0$ таке, що $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ для будь-яких $x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд Тейлора функції $f(x)$ збігається до самої функції $f(x)$ на інтервалі $(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$.*

Приклад. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Тоді

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тому, якщо n – парне число, то $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$.

Якщо $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, то $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1}$.

Тоді ряд Маклорена для функції $f(x) = \sin x$ має вигляд:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots$$

Похідну функції $f(x) = \sin x$ можна записати як:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Тоді $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Значить ряд Маклорена для функції $f(x) = \sin x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

збігається на всій числовій прямій до самої функції $f(x) = \sin x$. Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x, \text{ де } x \in (-\infty, +\infty). \quad (4.4)$$

Таким же чином можна показати, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \text{ де } x \in (-\infty, +\infty). \quad (4.5)$$

Розвинення функцій в степеневі ряди

Означення. Кажуть, що функція $f(x)$ розвивається (розкладається) в ряд за степенями $(x - x_0)$, якщо існує степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

який збігається до функції $f(x)$ в деякому околі точки x_0 , тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in S_\delta(x_0).$$

Зауваження. Якщо $f(x)$ розкладається в ряд за степенями $(x - x_0)$, то цей ряд є рядом Тейлора для функції $f(x)$.

Теорема 4.13. *Мають місце наступні розвинення функцій у степеневі ряди:*

$$1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$2) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$3) \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$4) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$5) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1];$$

$$6) \operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, x \in [-1, 1];$$

$$7) (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Доведення. Зауважимо, що розвинення 1 – це формула суми геометричної прогресії, а 2, 3, 4 та 6 – це формули (4.2)–(4.5), що отримані нами раніше.

Доведемо рівність 5). Відомо, що

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1}; \quad t \in (-1, 1).$$

Цю рівність можна проінтегрувати почленно на відрізку $[0, x]$, де $x \in (-1, 1)$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt.$$

Тоді

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

Областю збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ є напівінтервал $(-1, 1]$. Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = S(x), x \in (-1, 1],$$

а функція $S(x)$ є неперервною в напівінтервалі $(-1, 1]$. Оскільки $S(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$, то

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1].$$

Доведемо рівність 7). Степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

збігається на інтервалі $(-1, 1)$, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n) \cdot n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) \cdot (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1.$$

Тоді

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = S(x), \quad x \in]-1, 1). \quad (4.6)$$

Диференціюючи рівняння (4.6) почленно, отримаємо

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} x^n + \dots = S'(x), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} x^3 \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} x^{n+1} + \dots = x S'(x), \end{aligned} \quad (4.8)$$

де $x \in (-1, 1)$. Якщо скласти рівності (4.7) і (4.8), то отримаємо

$$\begin{aligned} \alpha + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} + \alpha \right) x + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} \right) x^2 + \dots + \\ + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \right) x^n + \dots = \\ = S'(x)(1+x). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\alpha^2}{1!} x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ \dots = S'(x)(1+x). \end{aligned}$$

Тому $\alpha S(x) = S'(x)(1+x)$, $x \in (-1, 1)$. Якщо $f(x) = S(x)(1+x)^{-\alpha}$, то

$$f'(x) = S'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha S(x)(1+x)^{-\alpha-1} =$$

$$= S'(x)(1+x)^{-\alpha} - S'(x)(1+x)(1+x)^{-\alpha-1} = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Тоді $f(x) = c$, $x \in (-1, 1)$. $S(x) = c(1+x)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$. З рівності (4.6) випливає, що $S(0) = 1$. Тоді $c = 1$ та $S(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, 1)$.

Зауваження. Співвідношення 1) – 7), наведені в теоремі 4.13, широко використовуються для розвинення різних функцій в степеневі ряди.

Приклади. 1. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^{-x^2}$. Вказати область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання. Скористаємось розвиненням

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Позначимо $t = -x^2$. Тоді

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання. Зазначимо, що

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1];$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad x \in [-1, 1).$$

Тоді при $x \in (-1, 1)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

3. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Вказати область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання. Розглянемо розвинення

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Нехай $\alpha = \frac{1}{2}$, тоді

$$\begin{aligned} (1+t)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1/2(-1/2)}{2!}t^2 + \frac{1/2(-1/2)(-3/2)}{3!}t^3 + \dots + \\ &+ \frac{1/2(-1/2)(-3/2)\dots\left(-\left(\frac{2n-3}{2}\right)\right)}{n!}t^n + \dots \end{aligned}$$

Таким чином

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} t^n, \quad t \in (-1, 1).$$

Тому

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

4. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \cos 5x$. Вказати область збіжності отриманого ряду.

Розв'язання. Замінюючи в розвиненні

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty) \quad x \text{ на } 5x \text{ маємо}$$

$$\cos 5x = 1 - \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad 5x \in (-\infty; \infty)$$

$$\text{або } \cos 5x = 1 - \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{5^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

б) Розкласти функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ у ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -2$. Знайти область збіжності здобутого ряду.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі скористаємося формулою суми нескінченної геометричної прогресії при $|q| < 1$: $\frac{b_0}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} b_0 q^n$.

Отже

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2-(2-x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{2-x}{2}} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2-x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n \cdot (-1)^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{при } \left| \frac{2-x}{2} \right| < 1.$$

Остання нерівність виконується при $|2-x| < 2$. Тобто $0 < x < 4$.

Використання степеневих рядів для наближених обчислень

Степеневі ряди можна використовувати для наближеного розв'язання деяких важливих математичних задач.

1. *Наближене обчислення значень функцій.*

Щоб обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x^*$, можна діяти наступним чином:

- 1) вибрати точку x_0 поруч з точкою x^* ;
- 2) далі розкласти функцію $f(x)$ в ряд за степенями $(x - x_0)$ і знайти область збіжності отриманого ряду;
- 3) Якщо точка x^* потрапляє в область збіжності ряду, то можна вважати, що

$$f(x^*) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x^* - x_0) + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x^* - x_0)^N \quad (4.5)$$

Зауваження. Кількість доданків у рівності (4.5) повинно бути підібрано таким чином, щоб забезпечити необхідну точність δ , тобто повинна бути виконана наступна умова

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x - x_0)^n}{n!} < \delta.$$

Приклад. 1. Обчислити $\ln 3$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Зазначимо, що $\ln 3 = \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$ і розвинемо функцію

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ в ряд за степенями } x. \text{ Отримаємо } \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1},$$

$$x \in (-1, 1) \text{ (Див. формулу (4.9) на стор.170). Тоді } \ln 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-2}}.$$

Тому $\ln 3 \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-2}}$ з точністю до 0,001, якщо

$$R_{N+1} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-2}} < 0,001.$$

Залишок числового ряду R_{N+1} можна оцінити зверху наступним чином:

$$\begin{aligned} R_{N+1} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-2}} \leq \frac{1}{2N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}} = \\ &= \frac{1}{2N+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2N+1)2^{2N-2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, при } N = 4 \text{ отримуємо: } R_5 \leq \frac{1}{3 \cdot 9 \cdot 2^6} = \frac{1}{27 \cdot 64} < 0,001.$$

$$\text{Тоді, з точністю до } 0,001 \ln 3 \approx 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{7 \cdot 64} = 1,098$$

2. За допомогою розвинення у степеневий ряд обчислити $\sqrt[5]{250}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Для обчислення скористаємося розвиненням $(1+x)^m = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$, де $-1 < x < 1$. Заданий вираз перепишемо у вигляді:

$$\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = \sqrt[5]{243\left(1+\frac{7}{243}\right)} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{1+\frac{7}{243}} = 3 \cdot \left(1+\frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Вважаючи $\alpha = \frac{1}{5}$; $x = \frac{7}{243}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{250} &= 3 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!} \left(\frac{7}{243}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!} \left(\frac{7}{243}\right)^3 + \dots \right] = \\ &= 3 \left[1 + \frac{7}{5 \cdot 243} - \frac{4}{25 \cdot 2} \left(\frac{7}{243}\right)^2 + \dots \right] = 3[1 + 0,0057 - 0,00006 + \dots] \approx 3,017. \end{aligned}$$

Знаки членів одержаного числового ряду чергуються, починаючи з другого члену. Обмежившись першими n доданками припустимо похибку, модуль якої за наслідком ознаки Лейбніца не перевищує модуля першого відкинутого члена. Оскільки модуль третього члена ряду менш за 0,001, то ми можемо залишити тільки перші два доданки.

2. Наближені обчислення інтегралів.

Для обчислення інтеграла $\int_{x_0}^z f(x)dx$ розвинемо підінтегральну функцію $f(x)$ в ряд за степенями $(x - x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

і знайдемо область збіжності цього ряду. Якщо z належить області збіжності, то ряд можна інтегрувати почленно на відрізку $[x_0, z]$:

$$\int_{x_0}^z f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} (z - x_0)^{n+1}.$$

Тоді можна вважати, що

$$\int_{x_0}^z f(x)dx \approx \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} (z - x_0)^{n+1}$$

з необхідною точністю δ , якщо

$$R_{N+1} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} (z-x_0)^{n+1} < \delta.$$

Приклад. 1. Обчисліть з точністю до 0,001 інтеграл $\int_1^2 e^{-(x-1)^2} dx$.

Розв'язання. Оскільки $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$e^{-(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Тому $\int_1^2 e^{-(x-1)^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot n!}$.

Числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot n!}$ задовольняє умові теореми Лейбніца, тому

$$|R_{N+1}| = |S - S_N| < a_{N+1} = \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}.$$

При $N = 4$ отримуємо

$$|R_5| < \frac{1}{11 \cdot 120} < 0,001.$$

Тому, з точністю до 0,001

$$\int_1^2 e^{-(x-1)^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0,747.$$

2. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначний інтеграл $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Використаємо розвинення в ряд функції $y = \ln(1+x)$:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$. Ряд у правій частині цієї рівності збігається на кожному відрізку $[a; b] \subset [0; 1)$, зокрема на відрізку $[0; 0,25]$. Проінтегруємо обидві частини рівності.

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx &= \int_0^{0,25} \left[\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3} - \frac{(\sqrt{x})^4}{4} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5} - \dots \right] dx = \\
&= \int_0^{0,25} \sqrt{x} dx - \int_0^{0,25} \frac{(\sqrt{x})^2}{2} dx + \int_0^{0,25} \frac{(\sqrt{x})^3}{3} dx - \int_0^{0,25} \frac{(\sqrt{x})^4}{4} dx + \int_0^{0,25} \frac{(\sqrt{x})^5}{5} dx - \dots = \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{0,25} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^{0,25} + \frac{2x^2}{15} \Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{12} \Big|_0^{0,25} + \frac{2x^2}{35} \Big|_0^{0,25} - \dots = \\
&= \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^{0,25} - \frac{x^2}{4} \Big|_0^{0,25} + \frac{2}{15} x^2\sqrt{x} \Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{12} \Big|_0^{0,25} + \frac{2}{35} x^3\sqrt{x} \Big|_0^{0,25} - \dots = 0,08333 - \\
&\quad 0,015625 + 0,004166 - 0,001302 + 0,000446 - \dots
\end{aligned}$$

Одержали знакопереміжний числовий ряд, модулі членів якого спадають. Знаки членів одержаного ряду чергуються, починаючи з першого члену. Оскільки модуль п'ятого члену ряду менший за 0,001, то залишимо тільки перші чотири

доданки. Тому маємо, що $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx \approx 0,071$.

3. Розв'язування диференціальних рівнянь.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad (4.10)$$

де $y = y(x)$ – невідома функція, а y' є її похідною.

Функція $\varphi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (4.10) на інтервалі (a, b) якщо виконано такі умови: функція $\varphi(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b) та для будь-яких $x \in (a, b)$ виконується тотожність: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Розглянемо задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (4.11)$$

за початкової умови:

$$y(x_0) = y_0. \quad (4.12)$$

Припустимо, що функція $f(x, y)$ диференційовна скільки завгодно разів у точці (x_0, y_0) , а функція $\varphi(x)$ є розв'язком задачі Коші (4.11) – (4.12). Тоді

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

$$\varphi''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x);$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \varphi(x)) \cdot (\varphi'(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi''(x) . \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна знайти $\varphi^{(4)}(x), \varphi^{(5)}(x), \dots$.

За умовою, $\varphi(x_0) = y_0$. Тоді

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0);$$

$$\varphi''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0);$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(x_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (\varphi'(x_0))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \varphi''(x_0) , \end{aligned}$$

.....

Якщо степеневий ряд

$$y_0 + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

збігається в деякому околі $S_\delta(x_0)$, тоді функція

$$y = y_0 + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(N)}(x_0)}{N!}(x - x_0)^N$$

є приблизним розв'язком задачі Коші (4.11) – (4.12).

Приклад. 1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = y + x^2$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язання. За умовою $y' = y + x^2$. Тоді

$$y'' = y' + 2x; \quad y''' = y'' + 2; \quad y^{(4)} = y''', \dots, \quad y^{(n)} = y^{(n-1)}, \quad n \geq 4.$$

Отже, $y''(0) = y'(0) = 1$, $y^{(n)}(0) = 3$, $n \geq 3$.

Степеневий ряд

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \dots + \frac{3}{n!}x^n + \dots$$

збігається на всій числовій прямій. Це означає, що шуканий розв'язок має ви-

гляд: $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, де $x \in (-\infty, +\infty)$.

Зауваження. Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, то $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

Тоді розв'язок задачі можна записати у вигляді

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 3(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}) = 3e^x - 2 - 2x - x^2.$$

Тоді $y(0) = 1$; $y' = 3e^x - 2 - 2x$; $y + x^2 = 3e^x - 2 - 2x$. Таким чином, функція $y = 3e^x - 2 - 2x - x^2$ дійсно є розв'язком цієї задачі.

2. Знайти перші 5 ненульових членів розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші: $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$.

Розв'язання: Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(V)}(0)}{5!}x^5 + \dots$$

Маємо за умовою $y'(0) = \cos 0 = 1$.

Знайдемо другу, третю, четверту і п'яту похідні функції і обчислимо їх для $x=0$:

$$y'' = 2 - \sin y \cdot y'; \quad y''(0) = 2$$

$$y''' = -\cos y \cdot (y')^2 - \sin y \cdot y''; \quad y'''(0) = -\cos 0 \cdot 1^2 - \sin 0 \cdot 2 = -1;$$

$$y^{(IV)} = \sin y \cdot (y')^3 - \cos y \cdot 2y' \cdot y'' - \cos y \cdot y' \cdot y'' - \sin y \cdot y''' = \\ = \sin y \cdot (y')^3 - 3 \cos y \cdot y' \cdot y'' - \sin y \cdot y''; \quad y^{(IV)}(0) = -3 \cos 0 \cdot 1 \cdot 2 = -6.$$

$$y^{(V)} = \cos y \cdot (y')^4 + \sin y \cdot 3(y')^2 \cdot y'' + 3 \sin y \cdot (y')^2 \cdot y'' - 3 \cos y \cdot (y'')^2 - \\ - 3 \cos y \cdot y' \cdot y''' - \cos y \cdot y' \cdot y''' - \sin y \cdot y^{(IV)};$$

$$y^{(V)}(0) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 - 12 + 4 = 7.$$

Тоді розв'язок буде мати вигляд: $y(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{7}{120}x^5 + \dots$

Задачі для самостійної роботи

1. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд за степенями x , якщо:

а) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = \ln(1 - \frac{x}{2})$;

в) $f(x) = \cos 3x$;

г) $f(x) = (1+x)^{10}$;

д) $f(x) = \ln(1+2x^2)$;

е) $f(x) = \sin^2 3x$;

ж) $f(x) = \arctg \frac{x^2}{2}$;

з) $f(x) = \ln(1-x^2)$.

2. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд за степенями $(x - x_0)$, якщо:

- а) $f(x) = \ln x, x_0 = 1;$ б) $f(x) = e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}, x_0 = 1;$
 в) $f(x) = \arctg \frac{x+1}{2}, x_0 = -1;$ г) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4;$
 д) $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{8}), x_0 = -\frac{\pi}{8};$ е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 1.$

3. Обчислити з точністю 0,001 значення функцій.

- а) $\sqrt[5]{33};$ б) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}};$
 в) $\ln(1,06);$ г) $\arctg(0,5).$
 д) $\cos 5^0$

4. Обчислити з точністю 0,001 інтеграли.

- а) $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) dx;$ б) $\int_0^{0,5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$
 в) $\int_0^{0,2} \frac{\arctg \frac{x}{2}}{x} dx;$ г) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$

4. Знайти три перші ненульові члени розвинення в ряд Маклорена розв'язку задачі Коші.

- а) $y' = 2 \sin x + y^2, y(0) = 1;$ б) $y' = e^x + y^2, y(0) = -1;$
 в) $y' = 2e^{-y} - xy, y(0) = 0;$ г) $y' = 2x - \cos y, y(0) = 0.$

Предметний покажчик

- Абеля теорема, 164
- Визначник Вронського, 130
- Визначник Якобі, 72
- Властивості
 - визначеного інтеграла, 26
 - інтегралу по мірі, 57
 - невизначеного інтеграла, 7
 - сум степеневих рядів, 170
 - числових рядів, 145
- Вронскіан. Див. Визначник Вронського
- Геометрична прогресія, 144
- Геометричний зміст визначеного інтеграла, 26
- Диференціальне рівняння
 - Бернуллі, 123
 - другого порядку, 125
 - з відокремлюваними змінними, 115
 - звичайне, 111
 - лінійне другого порядку, 129
 - лінійне неоднорodne, 132
 - лінійне неоднорodne зі сталими коефіцієнтами, 137
 - лінійне однорodne, 130
 - лінійне однорodne зі сталими коефіцієнтами, 134
 - лінійне першого порядку, 120
 - однорodne, 117
 - першого порядку, 113
 - що допускає зниження порядку, 126
- Довжина дуги, 46
- Загальний член ряду, 143
- Задача Коші, 113
- Застосування
 - визначеного інтеграла, 40
 - поверхневого інтеграла першого роду, 98
 - подвійного інтеграла, 74
 - потрійного інтеграла, 91
 - степеневих рядів для наближених обчислень, 178
- Збіжний абсолютно ряд, 160
- Збіжний умовно ряд, 160
- Інтеграл
 - визначений, 24
 - зі змінною верхньою межею, 28
 - криволінійний по довжині дуги, 58
 - криволінійний по координатах, 61
 - невизначений, 6
 - невластивий від необмеженої функції, 37
 - невластивий по нескінченному проміжку, 32
 - по мірі, 57
 - поверхневий першого роду, 95
 - повторний, 66
 - подвійний, 64
 - потрійний, 83
- Інтегральна крива, 111
- Інтегрування
 - виразів, що містять квадратичну функцію у знаменнику, 10
 - іраціональних виразів, 19
 - раціональних функцій, 14
 - тригонометричних виразів, 20
- Інтервал збіжності, 166
- Координати центра ваги
 - пластини, 76
 - плоскої кривої, 52
- Мажоранта знакододатного ряду, 150
- Маса
 - кривої, 58
 - пластини, 75
- Метод
 - Бернуллі, 122
 - варіації довільної сталої, 120
 - заміни змінної, 8, 30
 - заміни змінної у подвійному інтегралі, 71
 - інтегрування частинами, 12, 31
 - інтегруючого множника, 123
 - парабол (Сімпсона), 56
 - трапецій, 55
- Необхідна умова збіжності, 147
- Об'єм
 - тіла, 48
 - тіла обертання, 49
 - циліндроїда, 64, 74
- Область збіжності, 165
- Ознака збіжності
 - Даламбера, 152
 - друга порівняння, 150

загальна знакододатного ряду, 149
 Коші інтегральна, 155
 Коші радикальна, 153
 Лейбніца, 161
 невластивого інтеграла від необмеженої
 функції, 38
 невластивого інтеграла по
 нескінченному проміжку, 34
 перша порівняння, 150
 Оператор Лапласа, 108
 Первісна, 6
 Площа
 плоскої фігури, 41
 поверхні тіла обертання, 49
 фігури на площині, 74
 фігури у полярних координатах, 43
 Поле
 векторне, 99
 потенціальне, 106
 соленоїдальне, 101
 Потенціал векторного поля, 106
 Потік векторного поля, 99
 Принцип суперпозиції розв'язків, 133
 Радіус збіжності, 166
 Раціональна функція (раціональний дріб),
 14
 Рівняння Лапласа, 108
 Робота силового поля, 61
 Розв'язок диференціального рівняння, 111
 загальний, 111, 114, 125
 частинний, 112, 114, 126
 Розвинення функцій у степеневі ряди, 174
 Ротор векторного поля, 103
 Ряд
 гармонічний, 144
 знакододатний, 149
 знакозмінний, 159
 знакопереміжний, 160
 Маклорена, 173
 степеневий, 163
 Тейлора, 172
 числовий, 143
 Системи диференціальних рівнянь, 141
 Сферичні координати, 89
 Точна верхня межа, 165
 Фізичний зміст визначеного інтеграла, 26
 Формула
 Гріна, 79
 Ньютона-Лейбніца, 29
 Остроградського–Гауса, 101
 Стокса, 103
 Циліндричні координати, 86
 Циркуляція, 103
 Часткова сума ряду, 143
 Якобіан. Див. Визначник Якобі