МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ПО ТЕМІ

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

ПО ДИСЦИПЛІНІ «СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИКИ В КІБЕРБЕЗПЕЦІ»

для здобувачів
першого (бакалаврського рівня вищої освіти)
спеціальності F5 Кібербезпека та захист інформації
галузі знань F Інформаційні технології

Одеса-2025

Розробник: Кобозєва Алла Анатоліївна, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Кібербезпека та захист інформації»

Методичні вказівки схвалено на засіданні кафедри «Кібербезпека та захист інформації»
(Протокол від «06» жовтня 2025 р. № 2)

Методичні вказівки схвалено на засіданні НМК ННІ ІТІП
(Протокол від «14» жовтня 2025 р. № 2)

ЗМІСТ

Вступ

Математична логіка є одним з розділів дисципліни «Спеціальні розділи математики в кібербезпеці», що відповідно до плану навчального процесу входить у цикл професійних дисциплін для студентів спеціальностей 125 – Кібербезпека та захист інформації.

Математична логіка надзвичайно важлива для студентів зазначеної спеціальності у силу того, що в останні роки велика увага приділяється теорії складності алгоритмів і обчислень. Після уточнення поняття складності обчислення стали досліджуватися питання такого роду, як внутрішня складність обчислювальної функції, її криптографічна стійкість, що здобувають особливу актуальність із розвитком мереж зв'язку, обчислювальної техніки й різних систем керування.

Дані методичні вказівки призначені для практичних занять по темах «Рівносильні формули алгебри логіки» і «Досконалі нормальні форми логічних формул». Розглянуто питання побудови досконалих диз'юнктивної й кон'юнктивной нормальних форм шляхом рівносильних перетворень логічних формул.

1. Рівносильні логічні формули

Дві логічні формули U_1 и U_2 називаються *рівносильними*, якщо при будь-яких значеннях X_1, X_2, ..., X_n, де X_1, X_2, ..., X_n - це сукупність всіх змінних висловлень, що входять в U_1 і U_2, ці формули приймають однакові значення. Наприклад, $\overline{\overline{A}}$ рівносильна A, $A \& \overline{A} \vee B$ рівносильна B.

Рівносильність логічних формул може бути встановлена шляхом побудови таблиць істинності для кожної з них: якщо таблиці містять однакові значення в стовпцях для результуючих формул при однакових значеннях всіх вхідних у формули змінних, то формули рівносильні.

Приклади рівносильних формул:

$\overline{\overline{X}}$	рівносильна	X	(1)
$X \& Y$	рівносильна	$Y \& X$	(2)
$(X \& Y) \& Z$	рівносильна	$X \& (Y \& Z)$	(3)
$X \vee Y$	рівносильна	$Y \vee X$	(4)
$(X \vee Y) \vee Z$	рівносильна	$X \vee (Y \vee Z)$	(5)
$X \& (Y \vee Z)$	рівносильна	$X \& Y \vee X \& Z$	(6)
$X \vee (Y \& Z)$	рівносильна	$(X \vee Y) \& (X \vee Z)$	(7)
$X \vee (X \& Y)$	рівносильна	X	(8)
$X \& (X \vee Y)$	рівносильна	X	(9)
$\overline{X \vee Y}$	рівносильна	$\overline{X} \& \overline{Y}$	(10)

$\overline{X \& Y}$	рівносильна	$\overline{X} \vee \overline{Y}$	(11)
$X \vee X$	рівносильна	X	(12)
$X \vee \overline{X}$	рівносильна	1	(13)
$X \& X$	рівносильна	X	(14)
$X \& \overline{X}$	рівносильна	0	(15)
$X \& 1$	рівносильна	X	(16)
$X \vee 0$	рівносильна	X	(17)

Формули (8) і (9) аналогічні законам поглинання в теорії множин і є широко використовуваними й дуже корисними при проведенні рівносильних перетворень логічних формул. Закони (8) і (9) можуть бути узагальнені в такий спосіб:

$$X \vee (X \& F) = X,$$

$$X \& (X \vee F) = X,$$

де F - довільна логічна формула.

Формули (10) і (11) є своєрідними аналогами для законів де-Моргана в теорії множин: $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \& \overline{Y}$, $\overline{X \& Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Кожна з наведених формул у лівій частині розглядає заперечення над операцією (кон'юнкцією або диз'юнкцією), виконуваної над двома операндами. Використовуючи принцип математичної індукції (див. Методичні вказівки для самостійної роботи з теми «Теорія графів» по дисципліні «Дискретна математика» для студентів спеціальностей 122 - Інформаційні технології й комп'ютерні науки, 125 - Кібербезпека), можна довести більше загальний вид рівносильностей (10), (11), а саме:

$$\overline{X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n} = \overline{X}_1 \& \overline{X}_2 \& \ldots \& \overline{X}_n,$$

$$\overline{X_1 \& X_2 \& \ldots \& X_n} = \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n,$$

які корисні при виконанні рівносильних перетворень логічних формул.

Формули (6) і (7) називаються відповідно першим й другим дистрибутивними законами й відіграють ключову роль при побудові нормальних форм логічних формул.

Розглянемо перший дистрибутивний закон

$$X \& (Y \vee Z) = X \& Y \vee X \& Z$$

більш докладно:

$$X \,\&\, (Y \vee Z) = [\textit{враховуючи}\,(2)] = (Y \vee Z) \,\&\, X \tag{18}$$

$$X \,\&\, Y \vee X \,\&\, Z = [\textit{враховуючи}\,(2)] = Y \,\&\, X \vee Z \,\&\, X \tag{19}$$

Дорівнюючи праві частини (18) і (19), отримуємо рівносильний вид першого дистрибутивного закону:

$$(Y \vee Z) \,\&\, X = Y \,\&\, X \vee Z \,\&\, X$$

Абсолютно аналогічно, з використанням рівносильності (4), отримуємо рівносильний вид другого дистрибутивного закону:

$$Y \,\&\, Z \vee X = (Y \vee X) \,\&\, (Z \vee X) \tag{20}$$

Дистрибутивні закони (6) і (7) можна узагальнити в такий спосіб:

$$F \,\&\, (Y \vee Z) = F \,\&\, Y \vee F \,\&\, Z \tag{21}$$

$$(Y \vee Z) \,\&\, F = Y \,\&\, F \vee Z \,\&\, F \tag{22}$$

$$F \vee Y \,\&\, Z = (F \vee Y) \,\&\, (F \vee Z) \tag{23}$$

$$Y \,\&\, Z \vee F = (Y \vee F) \,\&\, (Z \vee F) \tag{24}$$

де F - довільна логічна формула.

Розглянемо логічну формулу: $X \,\&\, (Y \vee Z \vee T)$, яка містить у другому множнику не два (як у першому дистрибутивному законі (6)), а три доданки. Для неї мають місце рівносильні перетворення:

$$X \,\&\, (Y \vee Z \vee T) = X \,\&\, (Y \vee (Z \vee T)) = \begin{bmatrix} \textit{Розглядаємо другий множник} \\ (Y \vee (Z \vee T))\ \textit{як суму двох доданків} \\ Y\ i\ (Z \vee T), \textit{використовуємо формулу}\,(6) \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, (Z \vee T) = \begin{bmatrix} \textit{Для другого доданку}\ X \,\&\, (Z \vee T) \\ \textit{використовуємо формулу}\,(6) \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, Z \vee X \,\&\, T.$$

Отриманий результат можна узагальнити:

$$X \,\&\, (Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_n) = X \,\&\, Y_1 \vee X \,\&\, Y_2 \vee \ldots \vee X \,\&\, Y_n. \tag{25}$$

Аналогічне узагальнення має місце для другого дистрибутивного закону:

$$X \vee Y_1 \,\&\, Y_2 \,\&\ldots\&\, Y_n = (X \vee Y_1)\,\&\,(X \vee Y_2)\,\&\ldots\&\,(X \vee Y_n). \tag{26}$$

Розглянемо приклади на застосування узагальнених дистрибутивних законів.

Приклад 1. Побудувати рівносильну формулу для логічної формули $(X \to Y)\,\&\,(X \vee Y)$, використовуючи (узагальнені) дистрибутивні закони.

$$(X \to Y)\,\&\,(X \vee Y) = \left[\begin{array}{l} \textit{скористаємося законом } (21), \textit{ який є} \\ \textit{узагальненням } 1-\textit{го дистрибутивного закону} \end{array}\right] =$$

$$= (X \to Y)\,\&\, X \vee (X \to Y)\,\&\, Y.$$

Приклад 2. Побудувати рівносильну формулу для логічної формули $(Z \vee T)\,\&\,(X \vee Y)$, використовуючи (узагальнені) дистрибутивні закони.

$$(Z \vee T)\,\&\,(X \vee Y) \overset{\textit{формула } (22)}{=} (Z \vee T)\,\&\, X \vee (Z \vee T)\,\&\, Y = \left[\begin{array}{l} \textit{Для кожного з} \\ \textit{доданків } (Z \vee T)\,\&\, X \\ \textit{і } (Z \vee T)\,\&\, Y \\ \textit{скористаємося першим} \\ \textit{дистрибутивним} \\ \textit{законом} \end{array}\right] =$$

$$= Z \,\&\, X \vee T \,\&\, X \vee Z \,\&\, Y \vee T \,\&\, Y.$$

Логичні операції $\&, \vee, \to, \leftrightarrow, \bar{\ }$ не є незалежними:

$$X \to Y = \overline{X} \vee Y \tag{27}$$

$$X \leftrightarrow Y = (X \to Y)\,\&\,(Y \to X) = (\overline{X} \vee Y)\,\&\,(\overline{Y} \vee X) \tag{28}$$

Таким чином, для запису будь-якої логічної формули можна завжди скористатися тільки трьома логічними операціями: $\&, \vee, \bar{\ }$.

Кількість операцій, через які виражаються всі інші, можна зменшити до двох. Це пари: $\&, \bar{\ }$ чи $\vee, \bar{\ }$. Дійсно, з огляду на рівносильні формули (1) - (17), отримуємо:

$$X \vee Y \overset{\text{формула (1)}}{=} \overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}} \overset{\text{формула (11)}}{=} \overline{\overline{X} \,\&\, \overline{Y}},$$

тобто диз'юнкція виражається через заперечення й кон'юнкцію, а тому всі основні логічні операції можна виразити тільки через $\&, \;\overline{}$.

Аналогічно, оскільки має місце

$$X \,\&\, Y \overset{\text{формула (1)}}{=} \overline{\overline{X}} \,\&\, \overline{\overline{Y}} \overset{\text{формула (10)}}{=} \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}},$$

тобто кон'юнкція виражається через заперечення й диз'юнкцію, то всі основні логічні операції можна виразити тільки через $\vee, \;\overline{}$.

2.Нормальні форми

Елементарним добутком називається кон'юнкція (добуток) змінних і/або їхніх заперечень. При цьому вхідні в елементарний добуток змінні або їхні заперечення будуть називатися множниками.

Приклад 3. $\overline{X} \,\&\, X$, $\overline{X} \,\&\, Y \,\&\, Z \,\&\, \overline{T}$. Для останньої формули $\overline{X}, Y, Z, \overline{T}$ - множники.

Елементарною сумою називається диз'юнкція (сума) змінних і/або їхніх заперечень. При цьому вхідні в елементарну суму змінні або їхні заперечення будуть називатися доданками.

Приклад 4. $\overline{X} \vee X$, $\overline{X} \vee Y \vee Z$. Для останньої формули $\overline{X}, Y, Z$ - доданки.

Логічна формула, рівносильна даній формулі й представлена сумою елементарних добутків, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (ДНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує ДНФ, що будується із використанням І дистрибутивного закону.

Логічна формула, рівносильна даній формулі й представлена добутком елементарних сум, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (КНФ) даної формули.

Для кожної логічної формули існує КНФ, що будується із використанням ІІ дистрибутивного закону.

Приклад 5. Побудувати ДНФ і КНФ для логічної формули: $X \to Y \to Z$. Логічна формула, що розглядається, містить дві імплікації. Оскільки їхні пріоритети рівні, то операції виконуються в порядку їхнього проходження зліва направо, тобто $\left(X \to Y\right) \to Z$ (дужки у формулі поставлені для того, щоб показати, що імплікація $X \to Y$ виконується першою).

При побудові нормальних форм, у першу чергу, необхідно, виконуючи рівносильні перетворення, виразити всі присутні у формулі логічні операції через основні: $\&, \vee, \;\overline{}$, які і фігурують в ДНФ і КНФ.

$$\left(X \to Y\right) \to Z = \left[\begin{array}{l} \textit{Для імплікації, заключенням якої є } Z, \\ \textit{посилкою є } X \to Y. \textit{ Для будь – якої імплікації} \\ \textit{ПОСИЛКА} \to \textit{ЗАКЛЮЧЕННЯ вона замінюється} \\ \textit{по формулі } (27): \overline{\textit{ПОСИЛКА}} \vee \textit{ЗАКЛЮЧЕННЯ} \end{array}\right] =$$

$$= \overline{X \to Y} \vee Z = \left[\textit{Імплікація } X \to Y \textit{ розкривається по формулі } (27)\right] =$$

$$= \overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$$

Заперечення в ДНФ і КНФ може стосуватися тільки окремого змінного висловлення, тому частину $\overline{\overline{X} \vee Y}$ останньої формули $\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$ перетворимо, з використанням (10):

$$\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z = \left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z\,.$$

Дужки в останній формулі в частині $\left(X \,\&\, \overline{Y}\right)$ були поставлені для того, щоб уникнути помилки при можливому неврахуванні пріоритету логічних операцій: оскільки у формулі $\overline{\overline{X} \vee Y} \vee Z$ операція $\overline{\overline{X} \vee Y}$ повинна була бути виконана до операції диз'юнкції зі змінним висловленням Z, то і її рівносильна частина повинна бути виконана до диз'юнкції зі змінним висловленням Z. Однак, з урахуванням пріоритету логічних операцій, дужки у формулі $\left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z$ можуть бути усунені, оскільки:

$$\left(X \,\&\, \overline{Y}\right) \vee Z = X \,\&\, \overline{Y} \vee Z\,. \qquad (29)$$

Остання формула (29) є ДНФ вхідної логічної формули $X \to Y \to Z$, оскільки є рівносильною для неї й представляє із себе суму двох елементарних добутків: $X \,\&\, \overline{Y}$ і Z.

Для того, щоб отримати КНФ, застосуємо до (29) другий дистрибутивний закон у вигляді (20):

$$X \,\&\, \overline{Y} \vee Z = \left(X \vee Z\right) \& \left(\overline{Y} \vee Z\right).$$

Приклад 6. Побудувати ДНФ і КНФ для логічної формули: $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$.

Виконуючи рівносильні перетворення, виразимо всі присутні у формулі логічні операції через основні: $\&, \vee, \overline{}$:

$$X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right) \overset{(27)}{=} \overline{X} \vee \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right) \overset{(28)}{=} \overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \& \left(Z \vee Y\right) \overset{(21)}{=}$$

$$= \overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Y} \,\&\, Y \vee \overline{Z} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y.$$

У результаті для заданої логічної формули отримана ДНФ: $\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Y} \,\&\, Y \vee \overline{Z} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y$. З огляду на, що отримана ДНФ містить тотожно хибні доданки $\overline{Y} \,\&\, Y, \overline{Z} \,\&\, Z$ (формула (15)), скориставшись формулою (17), можемо отримати ДНФ в іншому виді:

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Y} \,\&\, Y \vee \overline{Z} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y = \overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee 0 \vee 0 \vee \overline{Z} \,\&\, Y =$$

$$= \overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y$$

Таким чином, формула $\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y$ також є ДНФ для $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$.

Скористаємося останнім видом ДНФ для отримання КНФ, застосовуючи для цього різні варіанти другого дистрибутивного закону.

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y = \begin{bmatrix} \textit{Застосуємо узагальнення другого дистрибу}- \\ \textit{тивного закону до суми } \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y \end{bmatrix} =$$

$$= \overline{X} \vee \left(\overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{Y} \vee Y\right) \& \left(Z \vee \overline{Z}\right) \& \left(Z \vee Y\right) = \left[\textit{Скористаємося формулою } (26)\right] =$$

$$= \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Y\right) \& \left(\overline{X} \vee Z \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{X} \vee Z \vee Y\right)$$

Таким чином, КНФ для вхідної формули має вигляд: $\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Y\right) \& \left(\overline{X} \vee Z \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{X} \vee Z \vee Y\right)$. Застосовуючи до неї рівносильні перетворення, можна отримати КНФ в іншому виді:

$$\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee\underbrace{\overline{Y}\vee Y}_{=1\,(\text{формула}\,(13))}\right)\&\left(\overline{X}\vee\underbrace{Z\vee\overline{Z}}_{=1\,(\text{формула}\,(13))}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)=$$

$$=\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\underbrace{\overline{X}\vee 1}_{=1}\right)\&\left(\underbrace{\overline{X}\vee 1}_{=1}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)=$$

$$=\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&1\&1\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)\overset{\text{формула}(16)}{=}\left(\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z}\right)\&\left(\overline{X}\vee Z\vee Y\right)$$

Таким чином, як КНФ, так і ДНФ для логічної формули визначаються неоднозначно. Більше того, їх можна побудувати нескінченно багато, використовуючи рівносильні перетворення. Дійсно, нехай для логічної формули F побудоава деяка КНФ K, тоді формула $K\&1=K\&\left(X\vee\overline{X}\right)$, будучи рівносильною для K (в силу формул (16) і (13)), а тому і для F також є КНФ для F. За аналогією ми можемо отримати нескінченно багато різних КНФ. Аналогічно з ДНФ.

3. Досконалі нормальні форми

Нехай логічна формула $U\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ не є тотожно хибною.

Визначення. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) формули $U\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$, яка містить *n* різних змінних $X_1,X_2,...,X_n$, називається така ДНФ, що має наступні властивості:

1. У ній немає двох однакових доданків;
2. Жодний доданок не містить двох однакових множників;
3. Ніякий доданок не містить змінної разом з її запереченням;
4. У кожному доданку міститься як множник або змінна X_i, або її заперечення $\overline{X_i}$, де $i=1,2,...,n$.

Нехай дана довільна формула $U\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$. Для отримання її СДНФ необхідно:

- привести її спочатку до якої-небудь ДНФ;
- якщо який-небудь доданок, що позначимо через B, взагалі не містить змінну X_i, то замінити його рівносильною формулою: $X_i\&B\vee\overline{X_i}\&B$, оскільки

$$B=1\&B=\left(X_i\vee\overline{X_i}\right)\&B=X_i\&B\vee\overline{X_i}\&B. \qquad (30)$$

Таким чином, умова 4 буде виконана;

- при наявності однакових доданків, видалити всі з них, крім одного. При наявності в доданках однакових множників, видалити всі з них, крім одного.
- Видалити всі ті доданки, які містять якусь змінну із її запереченням, тому що такі доданки являють собою тотожно хибні вирази. Результат – ДДНФ.

Якщо $U(X_1, X_2, ..., X_n)$ - тотожно хибна формула, то в процесі побудови ДДНФ всі доданкі будуть видалені, ми не отримаємо ДДНФ.

ДДНФ для логічної формули визначається однозначно.

***Приклад** 7*. Для формули $X \vee Y \,\&\, (X \vee \overline{Y})$ побудувати ДДНФ.

Спочатку побудуємо якусь ДНФ для заданої формули:

$$X \vee Y \,\&\, \left(X \vee \overline{Y}\right) \overset{(6)}{=} X \vee Y \,\&\, X \vee Y \,\&\, \overline{Y} = \begin{bmatrix} \textit{Оскільки задана формула} \\ \textit{залежить від двох змінних } X \textit{ і } Y, \\ \textit{а в першому доданку відсутня } Y, \\ \textit{то замінимо перший доданок } X \textit{ на} \\ X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y} \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y} \vee Y \,\&\, X \vee Y \,\&\, \overline{Y} = \begin{bmatrix} \textit{перший } X \,\&\, Y \textit{ і третій } Y \,\&\, X \\ \textit{доданки співпадають, тому} \\ \textit{залишим з них тільки один} \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y} \vee Y \,\&\, \overline{Y} = \begin{bmatrix} \textit{останній доданок містить змінну} \\ \textit{і її заперечення, тому цей доданок} \\ \textit{видаляється} \end{bmatrix} =$$

$$= X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y}$$

ДДНФ для заданої формули має вид: $X \,\&\, Y \vee X \,\&\, \overline{Y}$.

Аналогічним чином визначається досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ) логічної формули.

Нехай логічна формула $U(X_1, X_2, ..., X_n)$ не є тотожно істинною.

Визначення. Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) формули $U(X_1, X_2, ..., X_n)$, яка містить *n* різних змінних $X_1, X_2, ..., X_n$, називається така КНФ, яка має такі властивості:

1. В ній немає двох однакових множників;
2. Жоден множник не містить двох однакових доданків;
3. Ніякий множник не містить змінної разом з її запереченням;
4. У кожному множнику міститься в якості доданка або змінна X_i, або її заперечення $\overline{X}_i$, де $i = 1,2,...,n$.

Нехай дана довільна формула $U(X_1, X_2,...,X_n)$. Для отримання її ДКНФ необхідно:

- привести її спочатку до якої-небудь КНФ;
- якщо який-небудь множник, який позначимо через B, взагалі не містить змінну X_i, то замінити його рівносильною формулою: $(X_i \vee B) \& (\overline{X}_i \vee B)$, оскільки

$$B = 0 \vee B = (X_i \,\&\, \overline{X}_i) \vee B = (X_i \vee B) \& (\overline{X}_i \vee B). \qquad (31)$$

Таким чином, умова 4 буде виконана;

- при наявності однакових множників, видалити всі з них, крім одного. При наявності у множнику однакових доданків, видалити всі з них, крім одного.
- Видалити всі ті множники, які містять якусь змінну із її запереченням, тому що такі множники є тотожно істинними.Результат – ДКНФ.

Приклад 8. Раніше при розгляді прикладу 5 для формули: $X \to Y \to Z$, що залежить від 3-х змінних висловлень X, Y, Z, були отримані ДНФ $X \,\&\, \overline{Y} \vee Z$ і КНФ $(X \vee Z) \& (\overline{Y} \vee Z)$. Побудуємо для $X \to Y \to Z$ ДДНФ і ДКНФ.

Для побудови ДДНФ скористаємося вже наявною ДНФ $X \,\&\, \overline{Y} \vee Z$. Ця ДНФ містить 2 доданки. Кожний з цих доданків в якості множників має обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому доданку $X \,\&\, \overline{Y}$ відсутня змінна Z, а в другому доданку Z відсутні X, Y. Для введення потрібних множників в доданки скористаємося правилом (30):

$$X \,\&\, \overline{Y} \vee Z = X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, 1 \vee Z \,\&\, 1 \,\&\, 1 = X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, (Z \vee \overline{Z}) \vee Z \,\&\, (X \vee \overline{X}) \& (Y \vee \overline{Y}) =$$

$$= [\textit{Скористаємося узагальненнями першого дистрибутивного закону}] =$$

$$= X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, \overline{Z} \vee (Z \,\&\, X \vee Z \,\&\, \overline{X}) \& (Y \vee \overline{Y}) =$$

$$= X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, \overline{Z} \vee Z \,\&\, X \,\&\, Y \vee Z \,\&\, \overline{X} \,\&\, Y \vee Z \,\&\, X \,\&\, \overline{Y} \vee Z \,\&\, \overline{X} \,\&\, \overline{Y}$$

Таким чином, умова 4 визначення ДДНФ виконана.

У кожному доданку останньої формули множники розташуємо в порядку, що відповідає X, Y, Z для того, щоб зручніше було вибирати з них такі, що збігаються:

$$X \& \overline{Y} \& Z \vee X \& \overline{Y} \& \overline{Z} \vee X \& Y \& Z \vee \overline{X} \& Y \& Z \vee X \& \overline{Y} \& Z \vee \overline{X} \& \overline{Y} \& Z .$$

В останній формулі однаковими є перши і п'ятий доданки: $X \& \overline{Y} \& Z$. Відповідно до пункту 1 визначення ДДНФ, залишаємо тільки один доданок $X \& \overline{Y} \& Z$:

$$X \& \overline{Y} \& Z \vee X \& \overline{Y} \& \overline{Z} \vee X \& Y \& Z \vee \overline{X} \& Y \& Z \vee \overline{X} \& \overline{Y} \& Z . \qquad (32)$$

Жодний доданок в (32) не містить однакових множників. Жодний доданок не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДДНФ виконані, формула (32) – ДДНФ для $X \to Y \to Z$.

Для побудови ДКНФ скористаємося вже наявною КНФ $(X \vee Z) \& (\overline{Y} \vee Z)$. Ця КНФ містить 2 множника. Кожен з цих множників в якості доданків повинен обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому множнику $(X \vee Z)$ відсутня змінна Y, а в другому множнику $(\overline{Y} \vee Z)$ вісутня X. Для введення потрібних доданків в множники скористаємося правилом (31):

$$(X \vee Z) \& (\overline{Y} \vee Z) = (X \vee Z \vee 0) \& (\overline{Y} \vee Z \vee 0) = (X \vee Z \vee Y \& \overline{Y}) \& (\overline{Y} \vee Z \vee X \& \overline{X}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{В кожному множнику } (X \vee Z \vee Y \& \overline{Y}) \textit{ і } (\overline{Y} \vee Z \vee X \& \overline{X}) \textit{ скористаємося} \\ \textit{узагальненнями другого дистрибутивного закону} \end{bmatrix} =$$

$$= (X \vee Z \vee Y) \& (X \vee Z \vee \overline{Y}) \& (\overline{Y} \vee Z \vee X) \& (\overline{Y} \vee Z \vee \overline{X}) =$$

$$= (X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z) \& (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).$$

Таким чином, умова 4 визначення ДКНФ виконана.

В останній формулі однаковими є другий і третій множники: $(X \vee \overline{Y} \vee Z)$. Відповідно до пункту 1 визначення ДКНФ, залишаємо тільки один множник $(X \vee \overline{Y} \vee Z)$:

$$(X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z) \& (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).. \qquad (33)$$

Жоден множник в (33) не містить однакових доданків. Жоден множник не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДКНФ виконані, формула (33) – ДКНФ для $X \to Y \to Z$.

Приклад 9. Раніше при розгляді прикладу 6 для формули: $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$, що залежить від 3-х змінних висловлень X, Y, Z, були отримані ДНФ $\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y$ і КНФ $\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \& \left(\overline{X} \vee Z \vee Y\right)$. Щодо КНФ очевидно, що вона є ДКНФ. Побудуємо для $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$ ДДНФ.

Для побудови ДДНФ скористаємося вже наявною ДНФ $\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y$. Ця ДНФ містить 3 доданки. Кожний з цих доданків в якості множників повинен обов'язково містити X чи $\overline{X}$, Y чи $\overline{Y}$, Z чи $\overline{Z}$. Але при цьому в першому доданку $\overline{X}$ відсутні змінні Y, Z , в другому доданку $\overline{Y} \,\&\, Z$ відсутня X , і в третьому доданку $\overline{Z} \,\&\, Y$ відсутня X . Для введення потрібних множників в доданки скористаємося правилом (30):

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{Z} \,\&\, Y = \overline{X} \,\&\left(Y \vee \overline{Y}\right) \& \left(Z \vee \overline{Z}\right) \vee \left(X \vee \overline{X}\right) \& \,\overline{Y} \,\&\, Z \vee \left(X \vee \overline{X}\right) \& \,\overline{Z} \,\&\, Y =$$

$$== \overline{X} \,\&\, Y \,\&\, Z \vee \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{X} \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z} \vee \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, \overline{Z} \vee X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee$$

$$\vee X \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z} \vee \overline{X} \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z}.$$

Таким чином, умова 4 визначення СДНФ виконана.

В останній формулі однаковими є другий та шостий доданки: $\overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z$, а також третій і восьмий: $\overline{X} \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z}$. Відповідно до пункту 1 визначення ДДНФ, залишаємо по одному з однакових доданків:

$$\begin{gathered}\overline{X} \,\&\, Y \,\&\, Z \vee \overline{X} \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z} \vee \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, \overline{Z} \vee X \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee \overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, Z \vee \\ \vee X \,\&\, Y \,\&\, \overline{Z}.\end{gathered} \quad . \qquad (34)$$

Жодний доданок в (34) не містить однакових множників. Жодний доданок не містить змінну із її запереченням. Таким чином, всі пункти визначення ДДНФ виконані, формула (34) – ДДНФ для $X \to \left(Y \leftrightarrow \overline{Z}\right)$.

Приклад 10. Побудуємо ДКНФ для логічної формули $\left(A \to B\right) \& \, A \to B$.

Побудову ДКНФ почнемо з отримання якоїсь КНФ, виражаючи присутні в даній формулі імплікації через основні логічні операції: кон'юнкцію, диз'юнкцію, заперечення:

$$(A\to B)\& A\to B=\left[\begin{array}{l}\textit{Застосуємо формулу (27), враховуючи,}\\ \textit{що для другої по порядку імплікації}\\ (A\to B)\& A\to B \textit{ посилкою є } (A\to B)\& A\end{array}\right]=$$

$$=\overline{(\overline{A}\vee B)\& A}\vee B=\left[\begin{array}{l}\textit{В нормальних формах заперечення може стосуватися}\\ \textit{тільки змінного висловлення, тому}\\ \textit{скористаємося формулами (10), (11)}\end{array}\right]=$$

$$=\overline{(\overline{A}\vee B)}\vee\overline{A}\vee B=\overline{\overline{A}}\&\overline{B}\vee\overline{A}\vee B=A\&\overline{B}\vee\overline{A}\vee B=\left[\begin{array}{l}\textit{Скористаємося}\\ \textit{узагальненням другого}\\ \textit{дистрибутивного}\\ \textit{закону (24)}\end{array}\right]=$$

$$=(A\vee\overline{A}\vee B)\&(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B)$$

Таким чином, КНФ для вхідної формули має вигляд:

$$(A\vee\overline{A}\vee B)\&(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B). \tag{35}$$

Для того, щоб з КНФ отримати ДКНФ, необхідно, дотримуючись визначення ДКНФ (п.3: ніякий множник не містить змінну разом з її запереченням), перетворити отриману КНФ:

$$\left(\underbrace{A\vee\overline{A}}_{=1}\vee B\right)\&\left(\underbrace{\overline{B}\vee B}_{=1}\vee\overline{A}\right)=\underbrace{(1\vee B)}_{=1}\&\underbrace{(1\vee\overline{A})}_{=1}=1,$$

Таким чином, ДКНФ для заданої формули $(A\to B)\& A\to B$ не існує, оскільки ця формула є тотожно істинною, і в процесі побудови ДКНФ все множники були замінені на тотожні одиниці. У тотожній істинності вхідної формули можна переконатися, по-перше, використовуючи таблицю істинності:

A	B	$A\to B$	$(A\to B)\& A$	$(A\to B)\& A\to B$
0	0	1	0	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	**1**

а, по-друге, аналізуючи отриману КНФ (35) для неї: $\left(A\vee\overline{A}\vee B\right)\&\left(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B\right)$. Кожен множник КНФ містить в якості доданків деяку змінну із її запереченням: в першому множнику $\left(A\vee\overline{A}\vee B\right)$ присутні доданки A і $\overline{A}$, в другому множнику $\left(\overline{B}\vee\overline{A}\vee B\right)$ - доданки B і $\overline{B}$, а це, виходячи з твердження 1 лекції 7 конспекту лекцій з дискретної математики, говорить про тотожну істинність вхідної формули.

Приклад 11. Для формули $\overline{B}\vee\overline{A}\leftrightarrow\overline{AC}$ побудувати ДДНФ, ДКНФ. У запропонованій побудові не будуть явно вказуватися ті логічні правила і формули, які використовуються при логічних рівносильних перетвореннях вхідної формули. Для кращого розуміння і запам'ятовування розглянутого матеріалу рекомендується самостійно обґрунтовувати кожне перетворення, посилаючись на відповідну формулу.

Почнемо з побудови ДКНФ, першим кроком чого є отримання КНФ:

$$\overline{B}\vee\overline{A}\leftrightarrow\overline{AC}=\left(\overline{B}\vee\overline{A}\rightarrow\overline{AC}\right)\&\left(\overline{AC}\rightarrow\overline{B}\vee\overline{A}\right)=\left(\overline{\overline{B}\vee\overline{A}}\vee\overline{AC}\right)\&\left(\overline{\overline{AC}}\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=$$

$$=\left(B\,\&\,A\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(AC\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=$$

$$=\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)$$

Перетворимо КНФ на ДКНФ:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(A\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=$$

$$=\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right).$$

Таким чином, ДКНФ для поданої формули має вид:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right).$$

Скористаємося ДКНФ для отримання ДНФ:

$$\left(B\vee\overline{A}\vee\overline{C}\right)\&\left(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}\right)=BC\vee\overline{A}C\vee\overline{C}C\vee B\overline{B}\vee\overline{A}\overline{B}\vee\overline{C}\overline{B}\vee B\overline{A}\vee\overline{A}\overline{A}\vee\overline{C}\overline{A}.$$

З отриманої ДНФ шляхом рівносильних логічних перетворень отримаємо ДДНФ:

$$BC \vee \overline{A}C \vee \overline{C}C \vee B\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee \overline{C}\,\overline{B} \vee B\overline{A} \vee \overline{A}\,\overline{A} \vee \overline{C}\,\overline{A} =$$

$$= BC \vee \overline{A}C \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee \overline{C}\,\overline{B} \vee B\overline{A} \vee \overline{A} \vee \overline{C}\,\overline{A} = BC \vee \overline{C}\,\overline{B} \vee \overline{A} =$$

$$= \left(A \vee \overline{A}\right)BC \vee \left(A \vee \overline{A}\right)\overline{C}\,\overline{B} \vee \overline{A}\left(B \vee \overline{B}\right)\left(C \vee \overline{C}\right) =$$

$$= ABC \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} =$$

$$= ABC \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C}.$$

Таким чином, ДДНФ для поданої формули має вид:

$$ABC \vee \overline{A}BC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C}.$$

Додаткові завдання для самостійної роботи

Шляхом рівносильних логічних перетворень знайти ДДНФ і ДКНФ наступних логічних формул або пояснити відсутність досконалих нормальних форм (правильність отриманих ДДНФ, ДКНФ звірити з наведеними відповідями).

1. $\overline{B} \,\&\, \overline{A} \to AB$
   Відповіді: ДКНФ: $A \vee B$,
   ДДНФ: $AB \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B$.
2. $\overline{B} \,\&\, A \leftrightarrow \overline{A}B$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{A} \vee B\right)\left(A \vee \overline{B}\right)$,
   ДДНФ: $AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$.
3. $AB \to \overline{A} \to B$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(A \vee B\right)\left(\overline{A} \vee B\right)$,
   ДДНФ: $AB \vee \overline{A}B$
4. $ABC \leftrightarrow \overline{A \vee B}$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)\left(A \vee B \vee C\right)\left(A \vee B \vee \overline{C}\right)$,
   ДДНФ: $A\overline{B}C \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C}$
5. $XY \vee Z \to \overline{XY}$
   Відповіді: ДКНФ $\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right) \& \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$
   ДДНФ: $\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}\,\overline{Y}Z \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z$
6. $X \to Y \leftrightarrow \left(X \to \overline{Y}\right)$
   Відповіді: ДКНФ: $\left(\overline{X} \vee Y\right) \& \left(\overline{X} \vee \overline{Y}\right)$

ДДНФ: $\overline{X}\,\overline{Y} \vee \overline{X}Y$

7. $X \to YZ \to \overline{X}Y\overline{Z}$

Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee XY\overline{Z}$,

ДКНФ$\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$

8. $X \vee YZ \leftrightarrow \overline{X}\,\overline{Z}$

Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}\,\overline{Y}Z$

ДКНФ:

$\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&$

$\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$

9. $\overline{XYZ} \vee \left(XY \to X \vee Z\right)$

Відповіді: ДКНФ відсутня;

ДДНФ:

$\left(X \vee Y \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}\right)\&$

$\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z\right)\&\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)\&\left(X \vee Y \vee \overline{Z}\right)$

10. $\left(XY \leftrightarrow X\overline{Y}\right) \leftrightarrow \overline{X}Y$

Відповіді: ДДНФ: $\overline{X}Y \vee X\overline{Y} \vee XY$

ДКНФ: $X \vee Y$

Література

1. Дискретна математика: навч. посіб. / [Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Харсун О.М., Пашкова Т.Л., Баранов М.І., Григор'єва Т.І., Вишневська В.М., Кольцова Л.Л.] − Одеса: ОНАЗ ім. О. С Попова, 2010. − 196 с.
2. Комп'ютерна дискретна математика: підручник / М.Ф.Бондаренко, Н.В.Білоус, А.Г.Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
3. Р.М.Трохимчук, М.С.Нікітченко. Дискретна математика у прикладах і задачах. http://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_mathematics.pdf
4. Дискретна математика : підручник для вузів / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. Львів : Магнолія, 2007. – 608 с.