ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

М.В. РОЗУМ

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою ОНМУ

Одеса
ОНМУ
2024

УДК 519.7
М.В. Розум. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник для спеціальностей 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз, 125 – Кібербезпека та захист інформації (для денної та заочної форм навчання). – Одеса: Видавництво «ОНМУ», 2024.- 290 с.

Рекомендовано Вченою радою ОНМУ, протокол №7 від "28" лютого 2024 р.

Рецензенти:
Ю.О. Гунченко, доктор технічних наук, професор, завідуючий кафедрою системного програмного забезпечення та технологій дистанційного навчання Одеського національного університету імені І.І. Мечникова;
В.С. Михайленко, доктор технічних наук, професор кафедри електрообладнання і автоматики суден Національного університету «Одеська морська академія».

Дисципліна «Теорія прийняття рішень» орієнтована на формування у здобувачів вищої освіти навичок використання сучасних, вживаних в практичній діяльності методів розробки та прийняття різного роду рішень, а також уміння самостійно створювати і адаптувати подібні методи до конкретних умов; набуття теоретичних знань і практичних навичок з методів пошуку найефективнішого або найбільш прийнятного способу дії для досягнення однієї чи кількох цілей, а також оволодіння методами і комп'ютерними засобами підтримки прийняття рішень в професійній діяльності.

Навчальний посібник призначений для самостійних і практичних занять студентам ННІ ІТІП спеціальностям 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз, 125 – Кібербезпека та захист інформації денної та заочної форм навчання. Для навчальної практики представлені практичні завдання для індивідуального виконання, питання для перевірки засвоєння матеріалу та тестові завдання з перевірки всього викладеного матеріалу.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета навчального посібника з дисципліни «Теорія прийняття рішень» - отримання знання про методи й алгоритми прийняття рішень й формування навичок їх практичного використання у галузі ідентифікації проблем прийняття рішень, ознайомлення студентів із сукупністю економіко-математичних методів, розробка моделей та алгоритмів вироблення управлінських рішень, та їх застосування у вирішенні практичних завдань з урахуванням детермінованості, ризику та невизначеності вихідної інформації про стан природи, поведінку партнерів та «противників» і саму особу, яка приймає рішення (ОПР)).

Завдання курсу «Теорія прийняття рішень»: вивчення основних положень теорії прийняття рішень, теоретичних основ вибору альтернатив, моделі, методи й алгоритми прийняття рішень отримання, концепції корисності і раціонального вибору, основ теорії ігор та вирішення багатокритеріальних задач в умовах невизначеності, психолінгвістичних аспектів прийняття рішень.

В навчальному посібнику в доступній формі розглянуто широкий спектр задач теорії прийняття рішень в залежності від середовища в умовах визначеності, невизначеності, ризику та протидії (конфліктних ситуаціях). Кожна тема ілюструється детально розглянутим і вирішеним прикладом. Для самоперевірки знання надаються тести до кожної теми.

Наведено дев’ять практичних завдань по основним темам теоретичного матеріалу для засвоєння матеріалу, в кожній темі розглянуто теоретичний матеріал, приклад виконання завдання, надано варіанти самостійного виконання для перевірки практичних знань та контрольні питання для перевірки теоретичних знань.

Частина 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Тема 1.
Введення в предмет. Основні поняття теорії прийняття рішень

1.1 Задача прийняття рішень

Під ***прийняттям рішень*** розуміється особливий процес людської діяльності, спрямований на вибір найкращого варіанта дій. Задача прийняття рішень - одна з найпоширеніших у будь-якій предметній галузі. Її рішення зводиться до вибору окремого варіанта $d \in D$ з множини D альтернатив.

Для того щоб зробити такий вибір, необхідно чітко визначити мету та критерії (показники якості), за якими проводитиметься оцінка деякого набору альтернативних варіантів. Вибір методу вирішення такої задачі залежить від кількості та якості доступної інформації. Дані, необхідні здійснення обґрунтованого вибору, можна розділити на чотири категорії: інформація про альтернативні варіанти, інформація про критерії вибору, інформація про переваги, інформація про оточення задачі.

Теорія прийняття рішень – це математична дисципліна, яка спрямована на вибір, в деякому розумінні, найкращого (найкращих) з можливих варіантів з урахуванням наявних обмежень.

Термін «прийняття рішень» зустрічається у різних наукових дисциплінах. Наприклад, в економіці, де досліджуються проблеми розумного, раціонального використання обмежених ресурсів споживачем (покупцем товарів) та виробником. Економіка визначає правила раціональної поведінки людей в задачах вибору. Термін «прийняття рішень» активно використовується у когнітивній психології. Психологи давно вивчають особливості людської системи переробки інформації. У політології одним із головних об'єктів вивчення є механізм прийняття лідерами політичних рішень. «Прийняття рішень» — один із основоположних термінів у науковому напрямі «Дослідження операцій». Прийняття рішень - один із напрямів прикладної математики. Ставляться і вирішуються задачі обґрунтування властивостей функції корисності залежно від тих чи інших умов, що накладаються на правила вибору. Слова «прийняття рішень» можна зустріти й у зоології, коли досліджуються проблеми вибору, який відбувається живими організмами: метеликами, птахами, рибами, мавпами тощо. Термін "вирішення проблем", який дуже близький за своїм характером до терміну "прийняття рішень", є центральним для штучного інтелекту. В рамках цього напряму створюються різні комп'ютерні системи, що імітують поведінку людей під час вирішення тих чи інших проблем.

В інформатиці та обчислювальній техніці останнім часом приділяється велика увага побудові систем підтримки прийняття рішень, які допомагають людині у задачах вибору.

Розгляд процесів та проблем прийняття рішень в різних наукових дисциплінах цілком виправданий. Центром цих проблем є сам акт вибору людиною одного з варіантів рішень. На відміну з інших наукових дисциплін у *науці про прийняття рішень* основним предметом є ***дослідження процесу вибору***, тобто вивчення, як людина приймає рішення і як слід їй у цьому допомагати, створюючи спеціальні методи та комп'ютерні системи.

Отже, прийняття рішень – це прикладна наукова дисципліна. Основну роль її розвитку грають практики, які допомагають людям у складних задачах вибору. Створення методів прийняття рішень потребує розгляду математичних, психологічних та комп'ютерних проблем. У зв'язку з цим у розвитку прийняття рішень як наукового напряму беруть участь математики, психологи, політологи, фахівці з штучного інтелекту, теорії організацій, інформатики, обчислювальної техніки.

Теорія прийняття рішень використовує різні математичні методи, які дозволяють науково обґрунтувати вибір найкращої альтернативи не вдаючись до їх повного перебору. Важливість наукового підходу до прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які приймає людина інтуїтивно, часто не є оптимальними, що призводить до негативних наслідків.

Задача прийняття рішень може бути сформульована в термінах мети, способів її досягнення (альтернатив) та отриманих результатів (рис. 1.1)

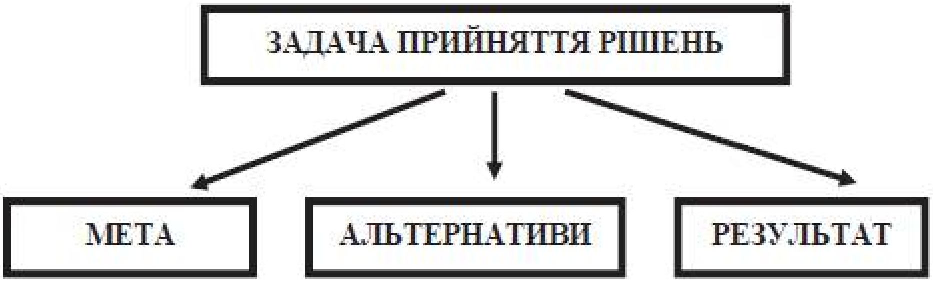


Рис. 1.1 Три складові задачі прийняття рішень

Узагальнену задачу прийняття рішень (ЗПР) формально можна записати у вигляді (1.1):

$$\text{ЗПР} = \langle F, D, X, G, P \rangle, \tag{1.1}$$

де

- F – *формулювання* задачі, яка включає змістовний опис проблеми та за необхідністю її модельне представлення, визначення мети або сукупність цілей, які мають бути досягнуті, а також вимоги до вигляду кінцевого результату;
- D – сукупність можливих варіантів (*альтернатив*), з котрих проводиться вибір. Це можуть бути реально наявні варіанти (об'єкти, кандидати, способи досягнення мети, дії тощо), або гіпотетична множина всіх теоретично можливих варіантів, яка може бути навіть нескінченою;
- X – сукупність *ознак* (атрибутів), які описують варіанти та їх відмінності (особливості). В якості ознак виступають об'єктивні або суб'єктивні (експертні) показники, що характеризують альтернативи;

- P – переваги, які є основою для оцінювання та порівняння можливих варіантів рішення проблеми, відбору допустимих варіантів і пошуку найкращого або прийнятного варіанту;
- G – сукупність умов, що обмежують область допустимих варіантів розв'язку задачі. Обмеження можуть бути описані як змістовним чином, так і задані у вигляді деяких формальних вимог до варіантів або їх ознак. Наприклад, обмеження на значення будь-якої ознаки або неможливість одночасного поєднання певних значень ознак для реальних варіантів.

Задачу прийняття рішень (ЗПР) можна формулювати у спрощеному вигляді (1.2)

$$\text{ЗПР} = < D, O >, \tag{1.2}$$

де D – множина варіантів (альтернатив), O – принцип оптимальності, який дає уявлення про якість варіантів або правило переваги варіантів. Тоді розв'язком задачі є множина (1.3)

$$D^{opt} \subset D, \tag{1.3}$$

отримана за допомогою принципу оптимальності O .

1.2 Узагальнена схема прийняття рішень

Узагальнена **схема прийняття рішень** зводиться до виконання таких кроків:

Крок 1. Аналіз поточної ситуації, тобто проблеми, яка потребує прийняття оптимального рішення.

Крок 2. Прогноз розвитку цієї ситуації.

Крок 3. Постановка задачі прийняття рішень (змістовна або формальна).

Крок 4. Формування множини $D = \{d\}$ можливих варіантів d (альтернатив).

Крок 5. Формування принципу O оптимальності рішень, зокрема, критеріїв для оцінки рішень.

Крок 6. Розробка індикаторів для моніторингу реалізації окремих рішень d.

Крок 7. Моделювання та порівняльна оцінка рішень d.

Крок 8. Вибір найкращого (оптимального) рішення d^*.

Крок 9. Реалізація прийнятого рішення та його моніторинг.

Крок 10. Загальне оцінювання результату вирішення проблеми.

1.3 Люди та їх ролі у процесі прийняття рішень.

У процесі прийняття рішень беруть участь особа (особи), яка приймає рішення, експерти та консультанти.

Особа, що приймає рішення (ОПР) – людина (або група людей), для якої вибір найкращої альтернативи слугує мотивом постановки задачі. ОПР має необхідні повноваження і *несе відповідальність* за прийняте рішення.

Експерт – фахівець-професіонал в тій чи іншій області, до якого звертаються за оцінками і рекомендаціями, який має інформацію про задачу, але безпосередньо *не несе відповідальність* за результат її вирішення. Експерт дає оцінки, необхідні для формування вихідної множини альтернатив і рішення задачі вибору. Наприклад, при перебулові організації ОПР звертається за порадою до досвідченого адміністратора. Експерти можуть допомогти бізнесмену в оцінці економічної ефективності випуску нової продукції та ін.

Консультант – фахівець з теорії вибору та прийняття рішень. Його роль зводиться до розумної організації процесу прийняття рішень: допомоги ОПР у правильній постановці задачі, розробки моделі задачі, організації роботи експертів під час пошуку рішення. Консультант (або аналітик, дослідник) зазвичай не вносить свої переваги, оцінки в прийняття рішень, він лише допомагає іншим зважити всі «за» і «проти» і виробити розумний компроміс.

1.4 Основні терміни теорії прийняття рішень

Альтернативи. Варіанти дій називають ***альтернативами.*** Альтернативи — невід'ємна частина проблеми прийняття рішень: якщо нема з чого вибирати, то немає й вибору. Отже, для постановки задачі прийняття рішень необхідно мати хоча б дві альтернативи.

Множина $D = \{d\}$ можливих альтернатив d може включати як незалежні, так і залежні альтернативи. Незалежними є ті альтернативи, будь-які дії з якими, наприклад, видалення з множини D, не впливають на якість інших альтернатив. У випадку залежних альтернатив оцінки одних з них впливають на якість інших.

Критерії. Варіанти рішень характеризуються різними показниками їхньої привабливості для ОПР. Ці показники називають критеріями. ***Критерії*** оцінки альтернатив - показники їхньої привабливості (або непривабливості) для учасників процесу вибору. Критерії можуть бути залежними і незалежними. На прийняття рішень впливає також кількість критеріїв. За невеликої кількості критеріїв (два — три) задача порівняння двох альтернатив проста. За великої кількості критеріїв задача стає складною.

Приклад постановки задачі прийняття рішення – купівля мобільного телефону.

ОПР – покупець.

Мета – вибрати найкращу модель з точки зору ОПР.

Альтернативи:

Купити мобільний телефон моделі X_1

Купити мобільний телефон моделі X_2

…

Купити мобільний телефон моделі X_N

Критерії:

Ціна

Розмір екрану

Процесор

Основна камера

Фронтальна камера

Обсяг оперативної пам'яті

Обсяг вбудованої пам'яті

Підтримка sim-карт

Операційна система

Зручність

Колір

…

Результат: Куплений мобільний телефон моделі X_i, $1 \le i \le N$, кращий за обраними критеріями.

Невизначеності. Теорія прийняття рішень вивчає закономірності способів досягнення бажаного результату (мети) в умовах невизначеності різного типу, коли необхідно діяти в ситуації, яка відома не повністю.

Можна виділити три групи невизначеностей:

- невизначеність *середовища*, в якому приймають рішення;
- невизначеність *особи, що приймає рішення* (ОПР), яка в загальному випадку може поводити себе непослідовно, бути суперечливою, допускати помилки, залежати від інших осіб (партнерів, суперників тощо), дії яких неможливо передбачити та повністю враховувати;
- невизначеність *цілей*, які можуть не співпадати одна з одною.

Основна трудність полягає в тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям того чи іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях – *втратах*, які може зазнати особа, що приймає рішення. Основною вихідною інформацією, необхідною для розв'язування задачі прийняття рішень, є ***функція втрат*** $\varphi(d, S)$, що являє собою залежність втрат від двох аргументів: рішення d та ситуації S, в якій це рішення приймають. Основний крок під час розв'язування задачі полягає в перетворюванні функції втрат у функцію ризику, яка залежить тільки від одного аргументу – рішення, яке приймають. Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від обраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, яке мінімізує ризик.

Застосовність різних критеріїв ризику залежить від характеру невизначеності ситуації. Докладно вивчено два типи невизначеності:

- невизначеність цілеспрямованої протидії.
- невизначеність стану природи.

Задачі, пов'язані з невизначеністю зазначених типів, вивчає відповідно теорія ігор та теорія статистичних рішень.

Підсумок. Проблема вибору альтернатив $d \in D$ допускає різні математичні постановки задач залежно від таких умов:

- множина альтернатив $D = \{d\}$ є скінченою, зліченою або континуум;
- оцінка альтернативи здійснюється за одним критерієм (однокритеріальні задачі) або кількома критеріями (багатокритеріальні задачі);
- альтернативи, що входять в множину можливих, є незалежні або залежні;
- критерії є кількісними або якісними;
- вибір альтернативи може бути однократним або повторюваним, який допускає навчання за вибіркою спостережень;
- наслідки вибору точно відомі (вибір в умовах визначеності), мають стохастичний характер при відомих ймовірностях можливих наслідків зробленого вибору (вибір в умовах ризику), або мають непередбачуваний результат (вибір в умовах невизначеності);
- вибір є індивідуальним (ОПР – одна) або приймається групове рішення (ОПР – декілька);
- груповий вибір ґрунтується на узгодженості інтересів сторін (кооперативний вибір) або на протиріччях (вибір в конфліктних ситуаціях або в умовах протидії).

1.5 Тести для самоконтролю знань

1. Хто дає оцінки, необхідні для формування вихідної множини альтернатив і рішення задачі вибору?

1) ОПР
2) Експерт*
3) Консультант

2. Хто розробляє модель задачі, процедуру прийняття рішень?

1) ОПР
2) Експерт
3) Консультант*

3. Консультантів також називають

1) дослідниками*
2) аналітиками*
3) членами робочої групи*

4. Три складові частини прийняття рішень:

1) мета*
2) альтернативи*
3) результат*
4) проблема
5) ОПР

5. Три необхідних елементи процесу вибору:

1) мета
2) альтернативи*
3) результат
4) проблема*
5) ОПР*

6. ОПР:

1) володіє правом вибору з множини альтернатив*
2) несе відповідальність за прийняті рішення*

3) зацікавлена в здійсненні вибору*
4) прагне вирішити наявну проблему*
5) розробляє процедуру прийняття рішень

7. До обмежуючих факторів відносять

1) економічні*
2) технічні*
3) соціальні*
4) інформаційні

8. До економічних факторів відносять:

1) грошові кошти*
2) трудові ресурси*
3) виробничі ресурси*
4) час*
5) габарити
6) вага
7) енергоспоживання
8) надійність
9) точність
10) мораль
11) етика

9. Вибір в умовах ризику

1) наслідки вибору точно відомі
2) наслідки вибору мають стохастичний характер*
3) наслідки вибору мають непередбачуваний результат

10. Виберіть правильні відповіді

1) множина альтернатив $D = \{d\}$ є скінченою, зліченою або континуум*
2) оцінка альтернативи здійснюється за одним або кількома критеріями*
3) оцінка альтернативи здійснюється тільки за кількома критеріями
4) альтернативи, що входять в множину можливих, є незалежні або залежні*
5) альтернативи, що входять в множину можливих, є незалежні
6) критерії є кількісними або якісними*
7) вибір альтернативи може бути однократним або повторюваним*
8) вибір альтернативи може бути тільки однократним

<u>Тема 2.</u>
Бінарні відношення

2.1 Мова бінарних відношень

У реальних ситуаціях часто важко або неможливо дати характеристику окремої альтернативи $d \in D$ у вигляді числового критерію $q(d)$ або сукупності критеріїв $q_1(d)$,…,$q_p(d)$. Але, якщо розглядати альтернативу не окремо, а в парі з іншою, то знаходяться підстави сказати, яка з них краща (переважає за іншу). Не даремно народна мудрість говорить: «Все пізнається у порівнянні».

Можливість порівнювати альтернативи надає змогу їх впорядковувати на основі мови *бінарних відношень*.

У загальному випадку відношення – це взаємозв'язок елементів деяких множин. Бінарні відношення встановлюють такий зв'язок між парами (x, y) елементів $x \in X$ та $y \in Y$, який заданий на прямому добутку $X \times Y$ множин X та Y.

Нас буде цікавити частковий випадок бінарних відношень, який встановлює взаємозв'язок пар елементів, що належать одній і тій же множині, а саме взаємозв'язок пар альтернатив d_i, d_j з множини D.

2.2 Основні припущення мови бінарних відношень

Основні припущення мови бінарних відношень такі:

1. Окремі альтернативи $d \in D$ не оцінюють.
2. Для кожної пари альтернатив d_i, d_j множини D можна визначити яка з них має перевагу, наприклад, вказати, що $d_i \succ d_j$, або, визначити, що альтернативи рівноцінні $d_i = d_j$ (не можуть бути порівняними).
3. Відношення переваги пари альтернатив d_i, d_j множини D не залежить від порівняної оцінки з будь-якою іншою альтернативою $d_z \in D$.

2.3 Способи визначення бінарних відношень

Математично бінарне відношення задає на множині альтернатив D деяку підмножину впорядкованих пар $(d_i, d_j) \in D\times D$, для яких виконується певне відношення (*relation*) R.

Якщо d_i, d_j перебувають у відношенні R, то це записують так: d_iRd_j , а якщо d_i, d_j не знаходяться у відношенні R, то записують – $d_i \overline{R}\, d_j$.

Визначити бінарне відношення R означає, що тим чи іншим способом вказати всі пари альтернатив, для котрих виконується R. Існує три способи визначення бінарних відношень (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Способи визначення бінарних відношень

Перший спосіб передбачає перелік всіх пар d_i, d_j, для яких виконується певне відношення. Наприклад, для трьох альтернатив d_1, d_2 та d_3 , які знаходяться у відношенні «$\succ$» $d_1 \succ d_2$, $d_3 \succ d_2$, $d_1 \succ d_3$ можна вказати перелік

$$R = \{(d_1, d_2), (d_3, d_2), (d_1, d_3)\}. \tag{2.1}$$

Другий спосіб передбачає опис бінарних відношень за допомогою таблиці (матриці), елементи якої $r_{ij}(R)$ визначають так:

$$r_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & якщо \quad d_i R d_j, \\ 0, & якщо \quad d_i \overline{R} d_j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Таблиця 2.1 побудована для бінарних відношень (2.1) за (2.2). Вигляд цієї таблиці обумовлено тим, що для нашого випадку $d_i R d_j \Rightarrow d_j \overline{R} d_i$.

Третій спосіб передбачає опис бінарних відношень за допомогою графа, в вершинах якого фігурують позначення альтернатив з множини D. Якщо для вершин d_i, d_j виконується відношення d_iRd_j , то їх з'єднують дугою, спрямованою від d_i до d_j. В іншому випадку дуга відсутня або дужки йдуть у двох напрямках.

Таблиця 2.1. ***Табличний запис бінарних відношень***

Альтернативи	d_1	d_2	d_3
d_1	-	1	1
d_2	0	-	0
d_3	0	1	-

Для бінарних відношень (2.1) відповідний граф зображено на рис. 2.2.

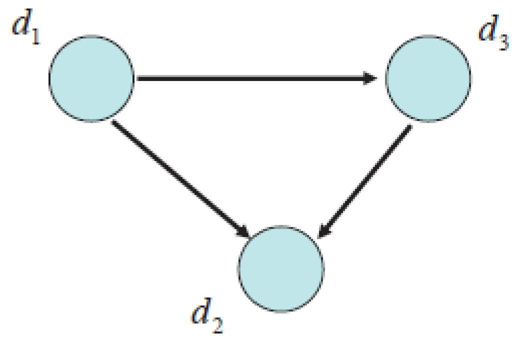


Рис. 2.2. Граф, що відображає бінарні відношення (2.1)

Для багатьох альтернатив граф може мати складний вигляд (рис. 2.3). У такому випадку кращими будуть ті альтернативи, з яких дуги тільки виходять. Тобто, на графі, зображеному на рис. 2.3, кращими є альтернативи 5 і 7.

Зображення переваг у вигляді графів дає змогу наочно оцінювати переваги альтернатив за сукупністю критеріїв. Продемонструємо це на таких прикладах.

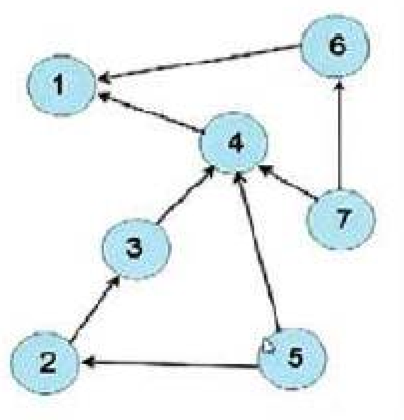


Рис. 2.3. Граф переваг, заданих для семи альтернатив

Приклад 2.1. Нехай три абітурієнти *A*, *B*, *C* склали вступні іспити за трьома дисциплінами (табл. 2.2). Треба порівняти абітурієнтів та знайти кращих у припущенні, що всі дисципліни мають однакову вагу.

Таблиця 2.2. ***Оцінки вступних іспитів за п'ятибальною системою***

Абітурієнти	Дисципліна		
	Математика	Фізика	Література
A	5	3	4
B	5	4	3
C	4	5	3

Представимо результати іспитів у вигляді трьох орієнтованих графів (рис. 2.4), вершини яких позначають абітурієнта, а дуги – переваги за іспитами.

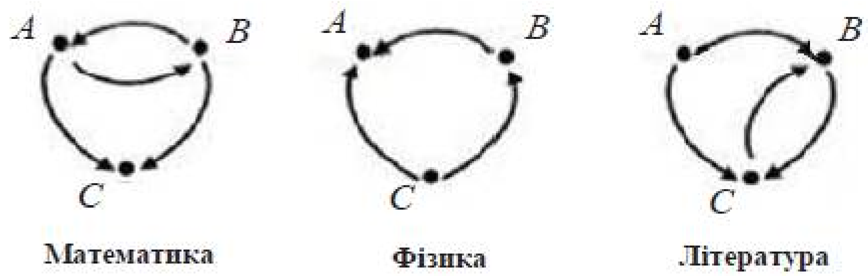


Рис. 2.4. Результати іспитів за трьома дисциплінами

Три графи, які зображені на рис. 2.4, поєднаємо в один узагальнений граф (рис. 2.5), у якому відповідні дуги спрямовані від вершини, яка має перевагу над іншою. Якщо ж такої переваги немає, то відповідна дуга відсутня.

Бачимо, що в даному випадку за результатами іспитів жоден з абітурієнтів немає переваг.

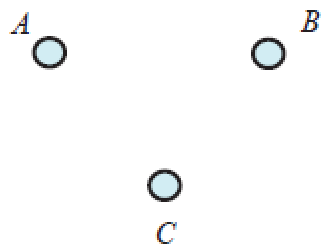


Рис. 2.5. Узагальнений граф за результатами іспитів

Нехай тепер абітурієнти отримали інші оцінки на іспиті з фізики (табл. 2.3).

Таблиця 2.3. ***Змінені оцінки вступних іспитів за п’ятибальною системою***

Абітурієнти	Дисципліна		
	Математика	Фізика	Література
A	5	5	4
B	5	3	3
C	4	4	3

Таким результатам іспитів відповідають три орієнтованих графи, які зображено на рис. 2.6.

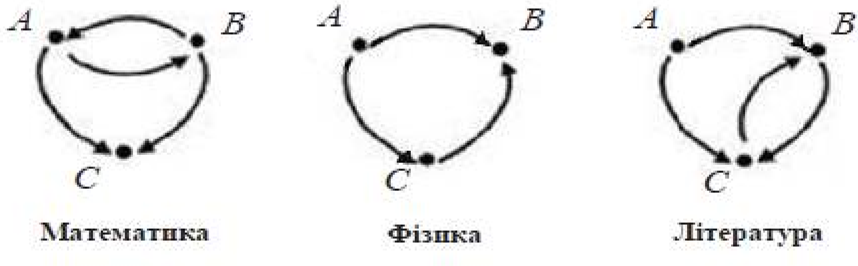


Рис. 2.6. Графи переваг за трьома дисциплінами

Поєднаємо графи, що зображені на рис. 2.6, в один узагальнений граф (рис. 2.7). Тепер абітурієнт *A* має безперечні переваги перед абітурієнтами *B* і *C* . Водночас «інтегральні» знання абітурієнтів *B* і *C* за результатами іспитів можна визнати рівними.

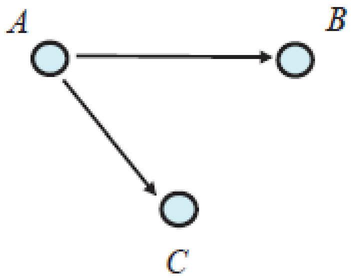


Рис. 2.7. Узагальнений граф переваг за результатами іспитів

Приклад 2.2. Припустимо D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Задати переліком і таблицею відношення *R* – “<”.

Відношення R містить всі пари елементів d_i, d_j із множини M, для яких виконується $d_i < d_j$.

Отримали перелік:

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}

Таблиця (матриця) відношення:

R	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

2.4 Основні властивості бінарних відношень

Розглянемо основні властивості бінарного відношення R для елементів d_i, $d_j \in D$ на множині D.

Означення 2.1. Бінарне відношення R ***рефлексивне***, якщо

$$d_i R\, d_i\,,\ \forall d_i \in D\,,$$

тобто елемент сам з собою знаходиться у відношенні R.

Властивість рефлексивності:

- матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи головної діагоналі рівні 1;
- граф такого відношення характеризується тим, що кожна вершина має петлю — дугу (d_i, d_i).

Приклад:

1) відношення «жити в одному місті»;
2) = «дорівнює»;
3) ≤ «менше або дорівнює»;
4) $\subseteq$ «є підмножиною або множиною».

Означення 2.2. Бінарне відношення R ***антирефлексивне***, якщо

$$d_i \overline{R}\, d_i\,,$$

тобто відношення R є вірним *тільки* для елементів, що не співпадають.

Властивість антирефлексивності:

- в матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють нулю;
- граф такого відношення характеризується тим, що не має жодної петлі — немає дуг вигляду (d_i, d_i).

Приклад:

1) відношення «бути сином»;
2) ≠ «не дорівнює»;
3) < «менше»;
4) $\subset$ «є підмножиною».

Означення 2.3. Бінарне відношення R ***симетричне***, якщо

$$d_i R d_j \Rightarrow d_j R d_i, \quad \forall d_i, d_j \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_i.

Приклад:

1) відношення «працювати в одній фірмі»;
2) = «дорівнює».

Означення 2.4. Бінарне відношення R ***асиметричне***, якщо

$$d_i R d_j \Rightarrow d_j \overline{R} d_i, \quad \forall d_i, d_j \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j не знаходиться у відношенні R з елементом d_i .

Приклад:

1) < «менше», якщо $d_i < d_j$, тоді $d_j < d_i$ є неможливим.

Означення 2.5. Бінарне відношення R ***антисиметричне***, якщо

$$(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_i) \Rightarrow d_i = d_j, \quad \forall d_i, d_j \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що одночасне виконання відношень d_iRd_j і d_jRd_i неможливо для $d_i \neq d_j$.

Приклад:

1) відношення «бути сином», «бути начальником»;
2) антисиметричним є відношення нестрогої нерівності на множині чисел, адже $d_i \le d_j$ та $d_j \le d_i$ одночасно можливо тоді й тільки тоді, коли $d_i = d_j$;
3) антисиметричним відношенням на підмножині цілих чисел буде відношення ділення. Якщо, a ділить b та b ділить a, то $a = b$.

Означення 2.6. Бінарне відношення R ***транзитивне***, якщо

$$(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_z) \Rightarrow d_i R d_z, \quad \forall d_i, d_j, d_z \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_z випливає, що елемент d_i знаходиться у тому ж відношенні R з елементом d_z.

Приклад:

1) відношення «бути молодше», «бути братом»;
2) строга нерівність : $(a < b), (b < c) \Rightarrow (a < c)$;
3) паралельність: $(a \parallel b), (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$.

Об’єднання згаданих вище властивостей дає змогу визначити різні типи відношень альтернатив з множини D. Наприклад, R встановлює відношення еквівалентності $d_i \sim d_j$ альтернатив d_i та d_j, якщо R одночасно має три властивості: рефлексивність, симетричність та транзитивність.

Приклад відношення еквівалентності – «жити в одному місті».

2.5 Методи структурування альтернатив

Ґрунтуючись на бінарних властивостях, які визначені для пар альтернатив d_i, $d_j \in D$, можна провести ранжування всіх альтернатив на основі різних методів.

Один з підходів до структурування альтернатив базується на методі рядкових сум. Продемонструємо деталі такого методу на прикладі структурування чотирьох альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4, для яких задані бінарні відношення

$$d_1 \succ d_2; \quad d_1 \succ d_4; \quad d_2 = d_3; \quad d_2 \succ d_4; \quad d_3 \succ d_1; \quad d_4 \succ d_3. \tag{2.3}$$

Запишемо таблицю бінарних відношень для альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4 згідно з (2.3) наступним чином:

- якщо альтернатива з ім’ям рядка краще альтернативи з ім’ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 1;

- якщо альтернатива з ім'ям рядка гірша альтернативи з ім'ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 0;
- якщо альтернатива з ім'ям рядка рівноцінна альтернативі з ім'ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 0,5 (табл. 2.4).

Таблиця 2.4. ***Табличний запис бінарних відношень***

	d_1	d_2	d_3	d_4	Σ
d_1	-	1	0	1	2
d_2	0	-	0,5	1	1,5
d_3	1	0,5	-	0	1,5
d_4	0	0	1	-	1

Запишемо в останньому стовпчику суми значень у відповідних рядках, за якими визначимо ранги кожної з альтернатив (табл. 2.5).

Таблиця 2.5. ***Альтернативи*** d_1, d_2, d_3, d_4 ***впорядковані за рангами***

Альтернативи	d_1	d_2, d_3	d_4
№ рангу	1	2	3

Найкраща альтернатива d_1 має ранг 1.

Ще одним зручним інструментом структурування альтернатив є побудова так званої *єдиної порядкової шкали*. Продемонструємо його на такому прикладі.

Нехай ставиться задача впорядкувати студентів за результатами іспитів з двох навчальних дисциплін – математики та охорони праці. Також будемо вважати, що з точки зору їх наступної професії математика більш важлива.

Побудуємо таблицю рангів за отриманими оцінками (табл. 2.6).

Перші два рядки таблиці заповнюють автоматично. А ось, які оцінки поставити у третьому рядку залежить від особистих уподобань ОПР.

Якщо ОПР вважає, що для наступної професії, математика *набагато* важливіша, ніж охорона праці, то в третьому рядку мають стояти оцінка 5 з математики та оцінка 3 з охорони праці.

За умови іншого ставлення ОПР до цих дисциплін у третьому рядку можуть стояти оцінки 4 та 5 відповідно з математики та охорони праці.

Продовжуючи такі міркування, можна заповнити всі рядки таблиці.

Таблиця 2.6. ***Ранжування студентів за оцінками з двох предметів***

Ранг	Математика	Охорона праці
1	5	5
2	5	4
3	5 або 4	3 або 5
4	4	4
…	…	…
N	1	1

Зрозуміло, що після заповнення таблиці подальше використання єдиної порядкової шкали дуже зручне: достатньо порівнювати лише ранги альтернатив. Водночас практика показує, що побудова таких таблиць можлива лише в тих випадках, коли число критеріїв не перевищує сімох.

2.6 Тести для самоконтролю знань

1. $\boldsymbol{d_i \succ d_j}$

1) означає, що d_i має перевагу над d_j *
2) означає, що d_j має перевагу над d_i
3) означає, що альтернативи рівноцінні

2. Припустимо $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вибрати матрицю відношення R – «бути дільником»
Рекомендація – попередньо скласти перелік для відношення

1)

R	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1

3	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

2)*

R	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

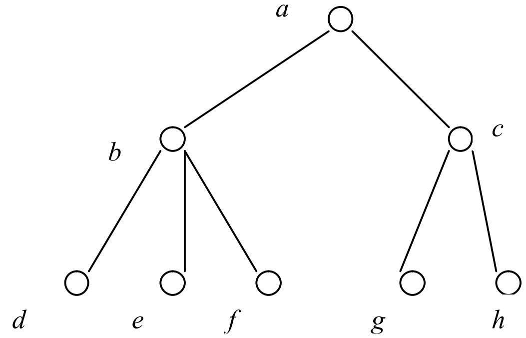
3)

R	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	1	1	1	0	1

4)

R	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1	0
6	0	0	1	0	0	1

3. Для відношень, визначених на множині $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ елементів структури створити матрицю відношення R – «бути частиною цілого»



1)*

R	a	b	c	d	e	f	g	h
a	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0
c	1	0	1	0	0	0	0	0
d	1	1	0	1	0	0	0	0
e	1	1	0	0	1	0	0	0
f	1	1	0	0	0	1	0	0
g	1	0	1	0	0	0	1	0
h	1	0	1	0	0	0	0	1

2)

R	a	b	c	d	e	f	g	h
a	1	1	1	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	1	1	0	0
c	1	0	1	0	0	0	1	1
d	0	1	0	1	0	0	0	0
e	0	1	0	0	1	0	0	0
f	0	1	0	0	0	1	0	0
g	0	0	1	0	0	0	1	0
h	0	0	1	0	0	0	0	1

3) не має вірної відповіді

4. Відношення «бути сином» на множині людей

1) антирефлексивне, антисиметричне, не транзитивне*
2) антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне
3) рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне
4) антирефлексивне, симетричне, не транзитивне
5) рефлексивне, симетричне, транзитивне

5. Відношення «жити в одному місті» на множині людей

1) рефлексивне, симетричне, не антисиметричне, транзитивне*
2) рефлексивне, симетричне, транзитивне
3) рефлексивне, симетричне, не транзитивне
4) антирефлексивне, не антисиметричне, транзитивне
5) рефлексивне, антисиметричне, не симетричне, транзитивне

6. З метою поліпшення екологічного стану в місті, пов'язаного з проблемою транспорту, необхідно прийняти рішення про вибір варіанта розширення транспортної мережі. ОПР проводить оцінку 4-х альтернатив, які пов'язані з рішенням транспортної проблеми: *a* – додати лінії метрополітену; *b* – придбати додаткову кількість автобусів; *c* – розширити транспортну мережу; *d* – ввести швидкісний трамвай. Матриця бінарних переваг, складена експертом, має вигляд:

Альтернативи	*a*	*b*	*c*	*d*
a	-	1	1	1
b	0	-	0	0
c	0	1	-	1
d	0	1	0	-

Вкажіть порядок переваги альтернатив:

1) a, c, d, b*
2) b, d, c, a
3) a, d, c, b
4) a, b, d, c

7. Метод "рядкових сум" - рядки матриці парних порівнянь ранжуються

1) по значенню суми елементів рядка*
2) по значенню суми елементів стовпця

8. Ранжирування об'єктів – представлення елементів множини у вигляді послідовності в порядку убування (або незростання) їх переваги.

1) Вірно*
2) Не вірно

9. При ранжируванні об’єктів оговорюють «на скільки» один елемент переважає інший

Вірно
Невірно*

10. $\boldsymbol{d_i \prec d_j}$

1) означає, що d_i має перевагу над d_j
2) означає, що d_j має перевагу над d_i *
3) означає, що альтернативи рівноцінні

<u>Тема 3.</u>
Метризовані відношення й експертні оцінювання

3.1 Кваліметрія в системі переваг якості альтернатив

ОПР виконує порівняння альтернатив на основі певної системи переваг, яка залежить від шкали переваг. Залежно від того, по якій шкалі задані ці переваги, оцінки якості альтернатив містять більший або менший об'єм інформації і володіють різною здібністю до математичної формалізації.

Шкала – це інструмент (прийнята система правил) оцінки (вимірювання) якості яких-небудь об'єктів або явищ.

Якість є якнайповнішою характеристикою будь-якого об'єкта. Якість – філософська категорія, що виражає істотну визначеність об'єкта у вигляді сукупності різних властивостей, що виявляються у взаємодії об'єкта із зовнішнім середовищем.

Показник властивості якості – кількісна характеристика (міра) властивості.

Кваліметрія – наука про оцінку якості об'єктів. Вимірювання – акт привласнення чисел об'єктам згідно з деякою системою правил. Для виконання вимірювань важливі три властивості чисел: тотожність, ранговий порядок, адитивність.

Ці властивості виражаються такими дев'ятьма аксіомами.

Тотожність.

1. Або $A = B$, або $A \neq B$ (два числа або тотожні, або відмінні).

2. Якщо $A = B$, то $B = A$ (відношення рівності симетрично).

3. Якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$ (відношення рівності транзитивно).

Ранговий порядок.

4. Якщо $A > B$, то $B < A$.

5. Якщо $A > B$ і $B > C$, то $A > C$.

Адитивність.

6. Якщо $A = P$ і $B > 0$, то $A + B > P$.

7. $A + B= B + A$.

8. Якщо $A = P$ і $B = Q$, то $A + B = P + Q$.

9. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3.2 Типи шкал

Приведені аксіоми дозволяють визначити чотири рівні вимірювання (типи шкал):

- найменувань;
- порядку (рангова);
- інтервалів;
- відношень.

Шкала найменувань У шкалі найменувань числа використовуються як найменування об'єктів. Наприклад, шкалою найменувань є номери документів у проектній документації, номери телефонів, номери будинків на вулиці, номери гравців у команді і т. д. Шкала не допускає ніяких операцій з числами, по суті це якісна шкала, яка допускає деякі статистичні операції з даними: оцінку кількості індивідів у кожному класі, оцінку коефіцієнта кореляції і т. д.

Шкала порядку (рангова шкала). Шкала порядку утворюється в результаті розташування об'єктів у порядку зростання або убування міри певної властивості. Ця шкала є "посиленою" порівняно зі шкалою найменувань через порівняння об'єктів за однією ознакою за принципом "Що більше (менше)" або "Що гірше (краще)".

Розрізняють шкали: простого, слабого, сильного порядку.

У шкалі простого порядку не виникають проблеми з порівнянням об'єктів.

У шкалі слабого порядку можуть мати місце випадки, коли "об'єкт А, щонайменше, так само добрий, як і В". Кожному елементу ряду в цих шкалах приписують числове значення (в порядку зростання або убування) і допускаються статистичні операції отримання частот або мод. Обчислюються медіани, процентилі, коефіцієнти рангової кореляції.

У шкалі сильного порядку експерт не тільки упорядковує об'єкти за якою-небудь ознакою або властивістю, а й указує силу цієї переваги, наприклад в межах [0,1]. Прикладом може бути визначення журі переможців і призерів якого-небудь конкурсу. Тут експерти повинні вирішити, що учасник, який зайняв перше місце, виявився переважним (з погляду мети конкурсу) відносно учасника, що зайняв друге місце і т. д.

Шкала інтервалів. Шкала інтервалів побудована з рівномірних інтервалів і є більш сильною (порівняно зі шкалою порядку). Наприклад, шкала часу розбивається на річні інтервали, шкала температур по Цельсію розбита на інтервал температур в 1 градус.

На будь-якій ділянці шкали однаковий інтервал означає однакову міру ознаки. Прикладом оцінки по інтервальній шкалі є оцінювання знань студентів під час проведення екзамену. Тут експерт-викладач, оцінюючи рівень знань студентів, повинен не тільки вирішити, що один студент знає матеріал краще за інших, але сказати, на скільки краще. Вимірювання фактично проводиться по шкалі зі 100 балів. При цьому рівень знань, який відповідає нульовому балу (нульова точка) не відомий.

Вимірювання по інтервальній шкалі використовується при виставлянні експертами-суддями оцінок у таких видах спорту, як фігурне катання, стрибки у воду, художня і спортивна гімнастика.

Шкала відношень. Це шкала інтервалів, у якої початок відліку (нульова точка) співпадає з нульовою мірою даної ознаки.

Це найсильніша зі всіх приведених шкал. Наприклад, по шкалі Кельвіна початок відліку температури відповідає точці, в якій припинений тепловий рух (абсолютний нуль), друга реперна точка – це точка танення льоду, яка на шкалі Цельсія (шкалі інтервалів) прийнята за нульовий відлік.

Маса, довжина, електричний опір і тому подібне вимірюються по шкалі відношень. Ці шкали застосовуються звичайно в технічних і фізичних науках.
Прикладами оцінок у шкалі відношень можуть бути: вага товару у кілограмах, фунтах, пудах; довжина в метрах, футах тощо.

Абсолютна шкала. Абсолютною є шкала, у якої є абсолютний нуль і абсолютна одиниця. Такою шкалою є послідовність натуральних чисел. Особливістю цієї шкали є її безрозмірність, що дозволяє виконувати над значеннями цієї шкали такі операції, які недопустимі для значень інших шкал. Прикладами оцінок альтернатив в абсолютній шкалі є: кількість об'єктів, час виконання роботи, імовірність реалізації альтернативи тощо.

Психометрична шкала Сааті (шкала експертного оцінювання пріоритетів або переваг)

Відомий американський фахівець з системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості або переваги одного об'єкта перед іншим. Причому оцінка виконується експертом або ОПР. Тому шкалу називають психометричною. Шкала дозволяє порівнювати чинники з різною кваліметричною основою. Одні чинники вимірюються в таких шкалах як шкала найменувань або рангова шкала, інші – в таких шкалах як шкала інтервалів або відносин. Крім того різні чинники, що виміряються в сильних шкалах, можуть мати різну розмірність (метри, кілограми, секунди, гривні). Шкала Сааті дозволяє отримати раціональні співвідношення між чинниками різної природи. В табл. 3.1 приведена шкала Сааті.

Вибір дискретної шкали "1–9" для оцінки порівняльної міри важливості (значущості або рівня переваг), одержуваної в результаті висловів думок експертом, ґрунтується на таких передумовах.

1. Якісні відмінності значущі на практиці і володіють елементом точності, коли величина параметрів порівнюваних об'єктів одного порядку або об'єкти близькі за властивістю, за якою вони порівнюються.

2. Психометричні властивості людини дозволяють достатньо добре проводити якісні розмежування мір властивостей об'єктів за такими рівнями: немає відмінності, слаба відмінність, сильна відмінність, дуже сильна відмінність, абсолютна відмінність.

Так були отримані дев'ять рівнів ступенів відмінності, які можуть бути добре узгоджені.

3. У психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти певну кількість предметів за якою-небудь властивістю. Ця межа рівна 7 ± 2, тому для створення шкали, на якій ці об'єкти будуть помітні, знадобилося 9 точок.

Правомочність і перевага цієї шкали доведена практикою.

Таблиця 3.1 Шкала Сааті

Ступінь переваги одного об’єкта над іншим	***Міра важливості (значущості) переваги***
Рівна важливість (значущість). Немає переваг	1
Слабка перевага за важливістю (значущістю). Слабка перевага	3
Істотна або сильна перевага за важливістю (значущістю). Сильна перевага	5
Дуже сильна або значна перевага за важливістю (значущістю). Дуже сильна перевага	7
Абсолютна перевага	9
Проміжна оцінка міри переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

3.3 Експертне оцінювання. Основні поняття методу експертних оцінок

У випадках неординарності проблеми (труднощі, новизна, недостатність наявної інформації, неможливість математичної формалізації процесу рішення) звертаються до рекомендацій компетентних фахівців у своїй проблемній області.

Експерти (від латинського "expertus" – досвідчений) – це особи, що володіють знаннями і здатні виказати аргументовану думку з явища, що вивчається.

Метод експертних оцінок – процес аналізу експертами і аргументування, формування кількісних оцінок, обробка оцінок формальними методами.

Експертиза – процедура отримання оцінок від експертів.

Метод експертних оцінок включає три складові.

1. ***Інтуїтивно-логічний аналіз задачі***. Будується на логічному мисленні та інтуїції експертів, заснований на їх знанні і досвіді. Цим пояснюється високий рівень вимог, що пред'являються до експертів.

2. ***Рішення і видача кількісних або якісних оцінок***.

Ця процедура є завершальною частиною роботи експерта. Їм формується рішення з даної проблеми і дається оцінка очікуваних результатів.

3. ***Обробка результатів рішення***. Отримані від експертів оцінки повинні бути оброблені з метою отримання підсумкової оцінки проблеми. Прикладами задач, при рішенні яких використовуються експертні оцінки, є:

1) вибір варіантів технічного і соціально-економічного розвитку підприємства і регіону;

2) відбір проектів при проведенні тендерів на обстеження і поліпшення екологічного стану регіону;

3) відбір заявок на отримання грантів і розробку наукових тем в області еколого-економічного моніторингу;

4) вибір стратегічної мети фірми в умовах глобалізації бізнесу.

При проведенні експертизи використовуються різні форми експертизи і різні шкали.

Основні форми проведення експертизи

Розрізняють такі форми проведення експертизи:

1) *дискусія*;

2) *анкетування;*

Анкета – це набір питань, на які пропонується відповісти експерту. Багатьма дослідженнями встановлено, що людина краще відповідає на "якісні" питання ("гірше-краще"), ніж на кількісні. Рекомендується спочатку формувати загальні питання, потім часткові.

3) *інтерв'ювання*;

Опитування типу інтерв'ю передбачає розмову дослідника з експертом, під час якої дослідник ставить питання відповідно з розробленою програмою. До недоліків методу відносяться складність формалізації та високі вимоги до дослідника й експерта.

4) "*мозковий штурм*".

Методи цього типу відомі також під назвою колективної генерації ідей, мозкового штурму, дискусійних методів. Усі ці методи засновані на вільному висуненні ідей, направлених на вирішення проблеми. Потім з цих ідей відбираються найцінніші.

Перевагою методу "мозкового штурму" є висока оперативність отримання необхідного рішення. Основним недоліком його є складність організації експертизи, оскільки іноді неможливо зібрати разом необхідних фахівців, створити невимушену атмосферу і виключити вплив посадових взаємостосунків.

5) *метод нарад*.

Класичний метод прийняття рішення керівником шляхом проведення наради зі своїми підлеглими, в рамках якого кожний з підлеглих висловлює свою позицію з даного питання. Далі керівник зважує виказані аргументи і ухвалює рішення. Якщо нарада відбувається серед рівних учасників, наприклад, членів ради директорів, то рішення може ухвалюватися шляхом голосування. Перевагою даного методу є простота його реалізації. Недоліком

– залежність від красномовства ораторів, за яким може ховатися недостатня компетентність у даних питаннях.

6) *метод сценаріїв*.

Метод "сценаріїв" є сукупністю правил по викладу письмових пропозицій фахівців з вирішуваної проблеми. Сценарій є документом, в якому міститься аналіз проблеми та пропозиції з її реалізації. Пропозиції спочатку пишуть експерти індивідуально, а потім вони узгоджуються і висловлюються у формі єдиного документа. Основною перевагою сценарію є комплексний обсяг вирішуваної проблеми в доступній для сприйняття формі. До недоліків можна віднести можливі неоднозначність, нечіткість висловлюваних питань і недостатню обґрунтованості окремих рішень.

7) *метод* "*Дельфі*".

Важається, що метод "Дельфі" є однією з найперспективніших форм проведення експертного оцінювання. Метод "Дельфі", або метод "дельфійського оракула", є ітеративною процедурою анкетного опиту. При цьому дотримується вимога відсутності особистих контактів між експертами, і забезпечення їх повною інформацією з усіх результатів оцінок після кожного туру опиту із збереженням анонімності оцінок, аргументування і критики.

Процедура методу включає декілька послідовних етапів опиту.

На першому етапі проводиться індивідуальний опит експертів, звичайно у формі анкет. Експерти дають відповіді, не аргументуючи їх. Потім результати опиту обробляються, і формується колективна думка групи експертів. Таким чином виявляються і узагальнюються аргументи на користь різних думок.

На другому – вся інформація повідомляться експертам і їх просять переглянути оцінки і пояснити причини своєї незгоди з колективною думкою. Нові оцінки знов обробляються і здійснюється перехід до наступного етапу.

Практика показує, що після трьох-чотирьох етапів відповіді експертів стабілізуються, і необхідно припиняти процедуру.

Перевагою методу "Дельфі" є використання зворотного зв'язку в ході опиту, що значно підвищує об'єктивність експертних оцінок. Проте даний метод вимагає значного часу на реалізацію всієї багатоетапної процедури.

Етапи підготовки і проведення експертизи

Якість одержуваних експертних оцінок значною мірою визначається підготовкою експертизи, а також вживаними методами обробки інформації, одержуваної від експертів. Єдиних правил підготовки і проведення експертизи немає.

Проте можна виділити основні етапи її підготовки і проведення. До них відносяться:

1) формулювання мети експертного аналізу;

2) формування групи організаторів експертизи;

3) розробка процедур проведення експертної оцінки;

4) підбір експертів;

5) отримання експертних оцінок;

6) обробка результатів опиту і аналіз отриманих даних;

7) встановлення ступеня досягнення мети експертизи.

З погляду підтримки прийняття рішень найбільший інтерес представляють два етапи: отримання експертних оцінок, обробка результатів опитування і аналіз отриманих даних. Основні методи експертного оцінювання або технології вимірювання об'єктів: ранжирування, метод переваг, безпосередня оцінка, парне порівняння. Вони можуть застосовуватися як у випадку роботи одного експерта, так і групи експертів. Оскільки в процесі експертного оцінювання переважно беруть участь декілька фахівців, то процес обробки їх рішень підлягає узгодженню.

3.4 Тести для самоконтролю знань

1. Аксіома
Або $A = B$, або $A \neq B$
відноситься до властивості чисел:

1) Тотожність*
2) Ранговий порядок
3) Адитивність

2. Аксіома
Якщо $A > B$, то $B < A$
відноситься до властивості чисел:

1) Тотожність
2) Ранговий порядок*
3) Адитивність

3. Аксіома
Якщо $A = P$ і $B = Q$, то $A + B = P + Q$
відноситься до властивості чисел:

1) Тотожність
2) Ранговий порядок
3) Адитивність*

4. У якій шкалі числа використовуються як найменування об'єктів?

1) Шкала найменувань*
2) Шкала порядку
3) Шкала інтервалів
4) Шкала відносин

5. В якій шкалі не виникають проблеми з порівнянням об'єктів?

1) Шкала найменувань
2) Шкала інтервалів
3) Шкала відносин
4) Шкала простого порядку*
5) Шкала слабого порядку
6) Шкала сильного порядку

6. В якій шкалі обчислюються медіани, процентилі, коефіцієнти рангової кореляції?

1) Шкала найменувань
2) Шкала інтервалів
3) Шкала відносин
4) Шкала простого порядку
5) Шкала слабого порядку*
6) Шкала сильного порядку

7. Виберіть правильні відповіді:

1) Шкала інтервалів побудована з рівномірних інтервалів*
2) Шкала інтервалів побудована з будь-яких інтервалів
3) Шкала інтервалів є більш сильною порівняно зі шкалою порядку*
4) Шкала інтервалів є менш сильною порівняно зі шкалою порядку

8. Виберіть найсильнішу шкалу:

1) Шкала найменувань
2) Шкала інтервалів
3) Шкала відносин*
4) Шкала порядку

9. Перевага якого метода - висока оперативність отримання необхідного рішення?

1) дискусія
2) анкетування
3) інтерв'ювання
4) "мозковий штурм"*
5) метод нарад
6) метод сценаріїв
7) метод "Дельфі"

10. Перевага якого метода - простота його реалізації?

1) дискусія
2) анкетування
3) інтерв'ювання
4) "мозковий штурм"
5) метод нарад*
6) метод сценаріїв
7) метод "Дельфі"

<u>Тема 4.</u>
Моделі та методи прийняття рішень за умов багатокритеріальності

4.1 Структурування альтернатив з використанням критеріїв

В темі 2 було розглянуто варіант бінарного порівняння без використання критеріїв.

Критеріями називають показники привабливості (або непривабливості) альтернатив для учасників процесу вибору, зокрема ОПР. У професійній діяльності вибір критеріїв часто визначається багаторічною практикою та досвідом.

Звичайно для опису переваг використовуються числові функції, які називаються критеріями, визначені на множині результатів вибору. Значення критерію характеризує ступінь інтенсивності деякої властивості результату, важливого з погляду поставленої мети.

У загальному випадку критерій представляють у вигляді деякої оцінної функції К, приймаючої значення на деякій множині оцінок О, або у вигляді правила, за яким вибирається "якнайкраща альтернатива", яка відповідає максимальному або мінімальному значенню оцінної функції (залежно від значення критерію).

Окремим випадком є прийняття рішень на ***підставі одного критерію***, коли кожну альтернативу можна оцінити одним числом (значенням критерію). Такий варіант можливий у випадку задач в умовах повної визначеності, коли критерій виражають у вигляді функції мети, тоді вибір альтернатив полягає в рішенні оптимізаційної задачі. Тоді порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм чисел.

4.2 Функція корисності

Нехай $d \in D$ – деяка альтернатива з множини D можливих альтернатив. Вважається, що для будь-якої d може бути задана функція $q(d)$, така, що

$$q(d_1) > q(d_2) \text{ , якщо } d_1 \succ d_2,$$

де знак $\succ$ означає перевагу альтернативи d_1 над d_2.

Якщо припускати, що вибір альтернативи призводить до однозначних наслідків (вибір в умовах визначеності), а критерій чисельно виражає оцінку цих наслідків (переваг), то найкращою альтернативою є та, яка задовольняє умову

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q(d) \,.$$

Критеріальну функцію $q(d)$ називають також ***цільовою функцією, функцією переваги або функцією корисності***.

4.3 Задача багатокритеріальної оптимізації

У переважній більшості задач існує досить багато критеріїв, за якими можуть бути оцінені альтернативні рішення. Тому на практиці для більш повної оцінки альтернатив застосовують не один, а декілька критеріїв, що з різних сторін характеризують кожну альтернативу.

В такому випадку виникає задача ***багатокритеріальної оптимізації***.

Наприклад, при покупці устаткування розглядаються декілька критеріїв: вартість, надійність, продуктивність та інші. Наявність декількох критеріїв робить задачу прийняття рішень багатокритеріальною.

Наступний приклад ілюструє необхідність визначення важливості критерію при виборі рішення. Кількість балів, яку набрали абітурієнти на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО):

Абітурієнт 1: математика – 88, література – 69.

Абітурієнт 2: математика – 63, література – 92.

Альтернатива d_1 – прийняти у ВНЗ абітурієнта 1, альтернатива d_2 – прийняти у ВНЗ абітурієнта 2.

З погляду технічного ВНЗ переважає альтернатива d_1, з погляду гуманітарного – альтернатива d_2.

Задача багатокритеріального прийняття рішень визначається множиною можливих рішень *D*, векторним критерієм *K* і відносинами переваг на множині *D*.

Мета рішення задачі – пошук "оптимальної в певному розумінні альтернативи" $d^* \in D$ або групи альтернатив з урахуванням відносин переваги на основі векторного критерію, який визначає ОПР.

Наприклад, при покупці комп'ютера покупець прагне придбати надійний, з високою швидкістю обчислень, високою роздільною здатністю відеокарти, недорогий пристрій. Звичайно для порівняння альтернатив на підставі критеріїв використовується критеріальна таблиця (табл. 4.1).

Таблиця 4.1. Критеріальна таблиця

	k_1	k_2	…	k_n
d_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
d_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
…				
d_m	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}

У рядках знаходяться альтернативи, в стовпцях – критерії, на перетині рядків і стовпців – оцінка альтернатив по відповідних критеріях.

У теорії багатокритеріального аналізу метод структуризації альтернатив називають вирішальним правилом. Пошук рішення багатокритеріальної задачі не є проблемою, якщо перевага по одному критерію спричиняє за собою таку ж перевагу по іншому критерію, тобто критерії кооперуються. Наприклад, при покупці комп'ютера покупець прагне придбати престижний, дорогий пристрій, або навпаки скромний та недорогий пристрій.

Рішення багатокритеріальної задачі також не представляє особливої складності, якщо критерії нейтральні один відносно одного. Наприклад, при покупці комп'ютера покупець прагне придбати надійний, з сучасним дизайном інструмент.

У загальному випадку критерії ***конкурують один з одним***. Наприклад, невисока вартість і престижність комп'ютера.

Задача полягає у тому, щоб серед множини можливих альтернатив D знайти таку альтернативу, яка в просторі окремих критеріїв *найближча до опорної точки з заданими якостями*.

Приклад 4.1. Знайти роботу, яка влаштовує ОПР, за двома критеріями: q_1– відстань від дому до офісу та q_2 – рівень зарплати (рис. 4.1).

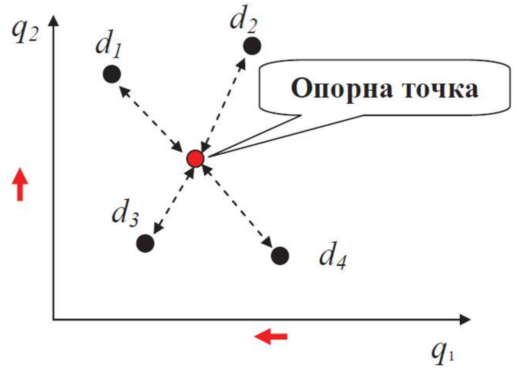


Рис. 4.1. Простір критеріїв: q_1 – відстань до роботи, q_2 – зарплата

Якщо уважно подивитись на рис. 4.1, то можна зробити такі висновки:

1. Альтернатива d_1 більш приваблива: обравши такий варіант роботи ОПР буде ближче до офісу (критерій q_1) та мати більшу зарплату (критерій q_2).
2. Альтернатива d_4 є найгірша серед можливих альтернатив $d_1,\ldots, d_4$: відстань до офісу найбільша (критерій q_1), а платня найменша (критерій q_2).

При розв’язуванні задачі прийняття рішень за сукупністю критеріїв розумно звузити початкову множину D допустимих альтернатив, тобто побудувати множину $D_0 \subseteq D$, якій заздалегідь належить оптимальна альтернатива d^*.

Якщо виявиться, що $D \subset D_0$, тобто можна наперед видалити з розгляду неефективні альтернативи, то пошук оптимальної альтернативи буде спрощений.

Один з популярних методів звуження множини D ґрунтується на багатокритеріальній оптимізації за Парето.

4.4 Визначення множини Парето.

Вільфредо Парето (1848 – 1923) – італійський економіст-соціолог, який першим звернув увагу на те, що починати впорядкування багатокритеріальних альтернатив треба, починаючи з видаленням явно гірших (рис. 4.2).

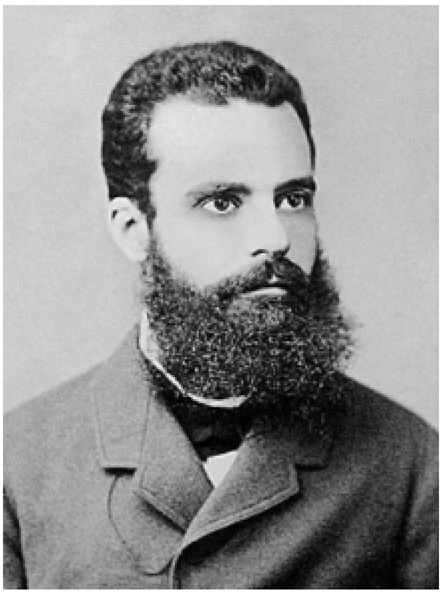


Рис. 4.2. Вільфредо Парето

Згідно з методом багатокритеріальної оптимізації за Парето вважається, що альтернатива d_i ***має переваги*** порівняно з альтернативою d_j у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща ніж d_j хоча б за одним критерієм.

При цьому альтернатива d_i називається ***домінуючою.***

Якщо ж існує розбіжність переваг d_i і d_j хоча б за одним критерієм - кожна з них перевершує будь-яку іншу по якомусь з критеріїв (по одному критерію краще альтернатива d_i, по іншому – альтернатива d_j), то такі альтернативи вважають ***непорівняними***.

У результаті попарного порівняння, гірші за всіма критеріями альтернативи відкидають, а альтернативи, що залишились, утворюють підмножину *Pa* альтернатив, оптимальних за Парето.

У множину Парето *Pa* входять тільки ті альтернативи, які не домінують одна над іншою, але домінують над альтернативами, що не входять у цю множину. Якщо $D/Pa \neq \varnothing$, тобто множина неефективних альтернатив не порожня, то в множині Парето обов'язково знайдеться альтернатива, яка домінує над деякою альтернативою з неефективної множини ***за всіма критеріями***.

Нехай $D = \{d_1,...,d_M\}$ - множина з *M* можливих альтернатив, а

$$q_i(d_j),\ i = 1,...,p\,,\ j = 1,...,M$$

– сукупність значень *p* різних критеріїв, за якими оцінюють кожну з цих альтернатив, причому чим більше значення критерію, тим краща відповідна властивість альтернативи з точки зору ОПР.

Формально множину Парето *Pa* визначають таким чином.

Припустимо, що для двох альтернатив d_α і d_β ($1 \le \alpha \le M, 1 \le \beta \le M, \alpha \ne \beta$) виконується нерівність

$$q_i(d_\alpha) \ge q_i(d_\beta) \quad \forall i = 1,...,p\,, \tag{4.1}$$

і, крім цього, існує хоча б один критерій, для якого (4.1) переходить до ***строгої нерівності***. Тобто у альтернативи d_β оцінки гірше, ніж у d_α.

У такому випадку альтернатива d_α заздалегідь краща за альтернативу d_β, яку можна видалити з розгляду, тобто

$$d_\beta \notin Pa.$$

Тобто альтернатива d_β не є конкурентоздатною, її викреслюють з таблиці. Залишаються альтернативи, які хоча б по одному критерію не гірше, ніж інші або недомінуючі альтернативи. Множину Парето ще називають множиною непокращуваних рішень.

Таким чином, найпростіший алгоритм визначення множини *Pa* полягає у почерговому виборі альтернатив вихідної множини $D = \{d_1,...,d_M\}$ і порівняні обраної альтернативи з рештою альтернатив.

Якщо знайдеться альтернатива, яка домінує над *обраною*, то переходимо до аналізу наступного варіанту, оскільки *обрана* альтернатива свідомо *не належить* до множини Парето. Якщо ж жодна з альтернатив множини $D = \{d_1,...,d_M\}$ не домінує над обраною альтернативою, то вважають, що обрана альтернатива належить до множини Pa .

Потім обирається наступний елемент вихідної множини і так до тих пір, поки не будуть перевірені всі можливі варіанти.

4.5 Парето-оптимальність рішення.

Парето-оптимальність рішення означає, що воно не може бути поліпшено по жодному з критеріїв без погіршення по якомусь іншому критерію.

При пошуку однієї переважної альтернативи необхідні додаткові відомості про критерії, які змогли б зменшити множину Парето.

Рішення багатокритеріальної задачі зводиться до таких етапів.

1. Визначення множини непокращуваних рішень за Парето.

2. Отримання додаткової інформації про критерії.

3. Використання додаткової інформації про критерії доти, поки множина Парето не міститиме тільки одну альтернативу або групу альтернатив і "згортання" критеріїв.

Приклад 4.2. Нехай треба вибрати мобільний телефон за двома критеріями: q_1 – термін роботи акумулятора та q_2– ємність оперативної пам'яті.

Покажемо, як можна просто визначати множину Парето графічним способом (рис. 4.3).

Зобразимо альтернативи телефонів з конкретними значеннями критеріїв точками на площині (рис. 4.3, а). Для кожного з варіантів визначимо альтернативи, які гірші одразу за двома критеріями. Для цього потрібно через точку, що аналізується, провести горизонтальну та вертикальну лінії та видалити всі альтернативи, які належать області, що ліворуч та нижче даної точки.

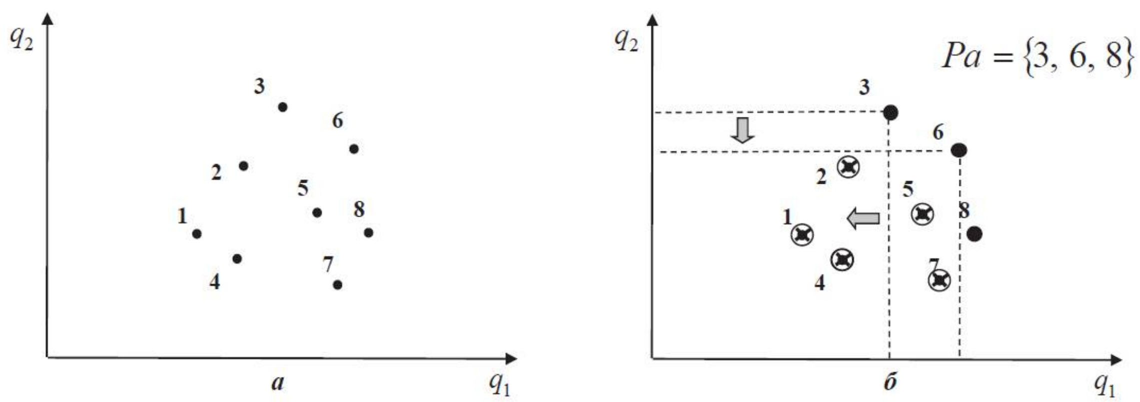


Рис. 4.3. Визначення множини Парето

Наприклад, для точки 3 видаляють альтернативи 1, 2, 4, а для точки 6 – альтернативи 5, 7. У результаті визначаємо, що множину Парето утворюють точки 3, 6, 8 (рис. 4.3, б).

Приклад 4.3. Змінимо тепер один з критеріїв вибору телефону та будемо його обирати згідно з критеріями: q_1 – термін роботи акумулятора та q_2 – ціна.

У такому випадку, на відміну від попереднього, критерії мають протилежний напрямок: критерій q_1 бажано збільшувати, а критерій q_2 зменшувати. Продемонструємо порядок визначення множини Парето Pa.

Нехай альтернативи телефонів з конкретними значеннями q_1 та q_2 зображено точками на площині (рис. 4.4, а). Для побудови множини Парето, тепер уже для кожної точки, що аналізується, потрібно видаляти неефективні альтернативи, які знаходяться ліворуч та вище даної точки. Тобто видаляти альтернативи, у яких термін роботи акумулятора менше, а ціна більше.

Наприклад, для точки 5 видаляють неефективні за двома критеріями альтернативи 2, 3, для точки 7 – альтернативи 1, 4, 5, а для точки 8 – альтернатива 6. У результаті множину Парето утворюють лише точки 7 і 8 (рис. 4.4, б).

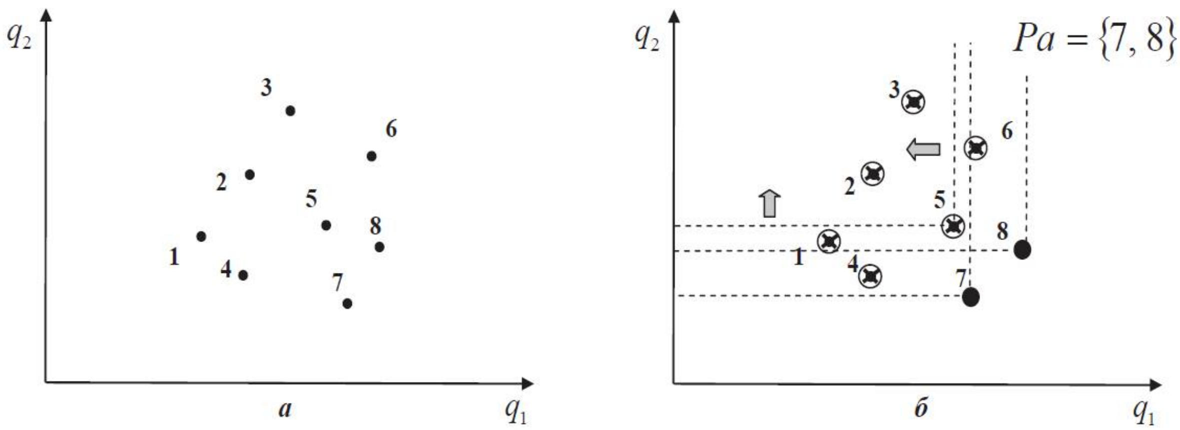


Рис. 4.4. Визначення множини Парето

Зрозуміло, що коли множина Парето включає декілька альтернатив, то остаточний вибір ґрунтується на пораді експерта або застосовується додатковий критерій.

Розглянемо ще раз альтернативи, що зображені на рис. 4.1. Після переходу від початкової множини альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4 (рис. 4.5, а) до підмножини Парето (рис. 4.5, б) будуть видалені неефективні альтернативи d_3, d_4. Якщо тепер серед альтернатив d_1, d_2, які належать до множини Парето Pa , вибрати альтернативу d_1, яка знаходиться на мінімальній відстані від опорної точки, то така альтернатива і може вважатися ***оптимальною.***

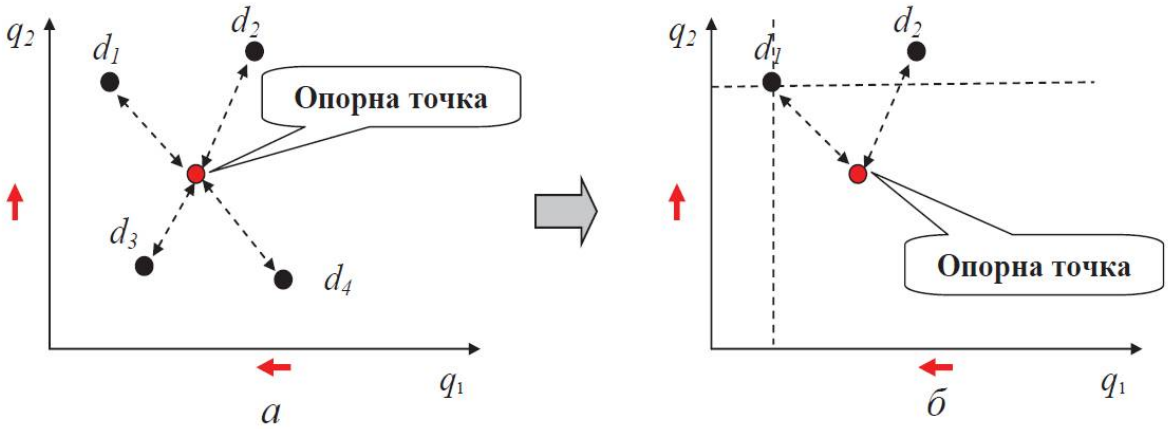


Рис. 4.5. Визначення оптимальної альтернативи на множині Парето

Зауважимо, що для реалізації методу пошуку альтернативи з заданими якостями можуть застосовуватись не тільки декартові відстані, а й манхеттенська метрика, відстані Хемінга, Левенштейна, Мінковського та інші.

Розглянемо ще один приклад побудови множини Парето альтернатив, що характеризуються трьома критеріями.

Приклад 4.4. Треба вибрати місце роботи з варіантів, викладених у табл. 4.2, ґрунтуючись на критеріях q_1 – зарплата, q_2 – термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу.

Зрозуміло, що критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Таблиця 4.2. Варіанти альтернатив місця роботи

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн.)	Відпустка (днів)	Термін поїздки (хв.)
1	9000	20	60
2	5000	30	20

3	7000	36	40
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	6000	30	10
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Аналізуючи табл. 4.2, визначимо спочатку Парето оптимальну множину. Легко бачити, що за трьома критеріями можна заздалегідь видалити неефективні варіанти 1 (7 варіант кращий ніж 1), 2 (6 варіант кращий ніж 2), 8 (6 варіант кращий ніж 8) і 9 (3 варіант кращий ніж 9).

Таким чином, множина Парето включає п'ять альтернатив:

$$Pa = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Для того, щоб звузити множину Парето введемо додаткові обмеження на критерії:

- зарплата – не менше ніж 6000 грн на місяць;
- термін відпустки – не менше ніж 30 днів;
- термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Таким обмеженням задовольняють вже тільки два варіанти з множини Парето – альтернативи 3 та 6, між якими потрібно зробити остаточний вибір на основі неформальних міркувань.

Розглянемо ще один підхід до визначення оптимального варіанту за даними табл. 4.2, а саме оптимізацію на основі критеріїв, що мають ***пріоритети.***

Для цього впорядкуємо критерії за їх важливістю для ОПР, наприклад, так

$$q_1 \succ q_3 \succ q_2,$$

тобто будемо вважати, що для ОПР найбільш важливим є розмір зарплати, а найменш важливим – термін відпустки.

Тоді, відповідно до даних у табл. 4.2 максимальному значенню зарплати (q_1 =9000 грн) відповідають варіанти 1 та 7. Далі, порівнюємо ці варіанти за терміном поїздки від дому до офісу. Оскільки значення цього критерію однакові (q_3 =60 хв), то порівнюємо термін відпустки.

Звідси випливає, що оптимальним є варіант 7, для якого зарплата q_1 =7000 грн, відпустка q_2 =35 днів і термін поїздки до роботи q_3 =60 хв.

Розглянуті приклади показують, що оптимальне рішення за багатьма критеріями не є однозначним і залежить від методу, який застосовують для розв’язування конкретної задачі.

4.6 Моделі і методи прийняття рішень в умовах багатокритеріальності

4.6.1 Парне порівняння на основі єдиної порядкової шкали

Отримана множина недомінуючих альтернатив підлягає структуризації. Поширеним методом впорядкування альтернатив є парне порівняння на основі якісної інформації з використанням "єдиної порядкової шкали".

Наприклад, необхідно упорядкувати студентів певної групи за оцінками, отриманими з математики і фізкультури, виходячи з п'ятибальної системи оцінок (двійки не беруться до уваги). Причому, вважається, що математика важливіша. Порівняння будь-якої пари студентів зводиться до пошуку в таблиці поєднань значень критеріїв і відповідних їм рангів. Для цього виконується впорядкування поєднання оцінок таким чином (табл. 4.3).

Таблиця 4.3 Ранжування студентів за результатами складання двох екзаменів

№	Студент	Оцінка з математики	Оцінка з фізкультури	Ранг
1	Аврамов Єгор	5	3	3
2	Азарова Катерина	5	5	1
3	Гассій Кирило	3	4	8

4	Гордієвський Даніїл	4	4	5
5	Данієлян Гарій	5	4	2
6	Кіданчук Марія	3	3	9
7	Козак Валерія	3	5	7
8	Колєв Віталій	4	5	4
9	Кондарюк Іван	4	3	6

В табл. 4.4 приведені результати ранжирування студентів за результатами складання екзаменів з двох дисциплін на підставі даних табл. 4.3.

Таблиця 4.4. Єдина порядкова шкала для ранжирування студентів

Ранг	Математика	Фізкультура
1	5	5
2	5	4
3	5	3
4	4	5
5	4	4
6	4	3
7	3	5
8	3	4
9	3	3

Таблиця такого типу називається "єдиною порядковою шкалою". Недоліком методу є громіздкість побудови шкали при великій кількості критеріїв.

4.6.2 Метод головного критерію

У методі головного критерію вибирається один з критеріїв, який якнайповніше відображає мету прийняття рішень.

Решта критеріїв враховується тільки з погляду можливої вказівки їх нижніх меж. Таким чином, багатокритеріальна задача прийняття рішень замінюється однокритеріальною задачею з критерієм K_i , де оптимальне рішення відповідає вибору альтернативи d^* , для якої виконується умова:

$$d^* = \arg\max_{d \in D} K_i(d)$$

при обмеженнях $K_i(d) \geq \lambda_k$, $k \neq i$, де λ_k – нижня межа k-го критерію.

Далі наведений приклад використання методу головного критерію при прийнятті рішення про вибір кандидатів на посаду.

Використовується трьохбальна система оцінки кандидатів на посаду по двох критеріях: "Освіта" і "Досвід" (табл. 4.5).

Таблиця 4.5. Критеріальна таблиця вибору кандидатів на посаду

Кандидати	Критерії	
	Освіта	Досвід
1	1	3
2	2	2
3	2	1
4	1	2
5	3	1

Перш за все, необхідно вибрати з множини альтернатив недомінуючі.

Для цього необхідно виконати парне порівняння усіх альтернатив. Перша та друга альтернативи непорівнянні. Перша альтернатива домінує четверту альтернативу, тому альтернативу 4 відкидають. Порівняння другої і третьої альтернатив дозволяє відкинути третю альтернативу. Альтернативи 1, 2, 5 непорівнянні або утворюють множину Парето.

Надалі розглядаються тільки альтернативи 1, 2, 5. Припустимо, другий критерій є головним, тоді оптимальним буде перший кандидат, оскільки значення K_2=3 більше всіх. При використанні обмежень на решту критеріїв рішення буде іншим.

Якщо $K_2 \geq 2$ (λ_1=2), то в цьому випадку максимум K_2 досягається для альтернатив 1, 2 і 4. Але для альтернатив 1, 4 не виконується введене обмеження (λ_1=2). Тому оптимальною є друга альтернатива.

4.6.3 Лінійна (аддитивна) згортка як метод упорядкування альтернатив

Найпоширеніший спосіб впорядкування альтернатив – "лінійна згортка" (зважена згортка). Кожному критерію привласнюють певну вагу (w_1, $w_2,\ldots,w_n$).

Обчислюють зважені суми по кожному рядку критеріальної таблиці по формулі:

$$K_i(d) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} w_j \ ,$$

де $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

При цьому оптимальне значення альтернативи відповідає формулі

$$d^* = \arg\max_{d \in D} K_i(d)$$

Ранжування виконується по значенню K_i.

Лінійна згортка є прикладом найпростішої ***функції корисності***. Далі наведений приклад застосування методу лінійної згортки.

Для прикладу оцінки кандидатів на деяку посаду вектор ваги критеріїв має вигляд: w_j: (0,4; 0,6).

Значення елементів лінійної згортки:

K_1 = 0,4×1+0,6×3=2,2;

K_2 = 0,4×2+0,6×2=2;

K_5 = 0,4×3+0,6×1=1,8.

Перший кандидат є найкращим.

Методу властиві такі недоліки:

1. Низька оцінка по одному критерію може бути компенсована високою оцінкою по-іншому.

2. Не завжди вдається коректно оцінити вагу критеріїв.

4.6.4 Максимінна згортка

Більш універсальним методом вибору на підставі декількох критеріїв є максимінна згортка:

$$d^* = \arg\max_{i=1,\dots,m}\min_{j=1,\dots,n} x_{ij} w_j$$

Далі наведений приклад оцінки кандидатів на посаду методом максимінної згортки:

$K_1 = \min\{0,4\times1;\ 0,6\times3\} = 0,4;$

$K_2 = \min\{0,4\times2;\ 0,6\times2\} = 0,8;$

$K_5 = \min\{0,4\times3;\ 0,6\times1\} = 0,6.$

$d^* = \max K_i = 0,8.$

Другий кандидат є найкращим на підставі максимінного критерію.

4.6.5 Мультиплікативна згортка

Мультиплікативна згортка використовується в моделях, заснованих на постулаті "низька оцінка хоча б по одному критерію спричиняє за собою низьке значення функції корисності". Згортка має вигляд:

$$K_i(d) = \sum_{j=1}^{n} (x_{ij})^{w_j},$$

де w_j – вага критерію,

$$0 \le w_j \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

Рішення d^* є найкращим, якщо для усіх $d \in D$ виконується умова:

$$d^* = \arg\max_i K_i(d).$$

Для прикладу оцінки кандидатів на посаду при векторі ваги критеріїв (0,4; 0,6) значення критеріїв для альтернатив 1, 2, 5 такі:

$K_1 = 1^{0,4} + 3^{0,6} = 2,93,$

$K_2 = 2^{0,4} + 2^{0,6} = 2,84,$

$K_5 = 3^{0,4} + 1^{0,6} = 2,55.$

У цьому випадку перший кандидат є якнайкращим.

4.7 Тести для самоконтролю знань

1. Критерій – це

1) числова функція*
2) якісна функція
3) будь-яка функція

2. В критеріальній таблиці:

1) у рядках знаходяться альтернативи*
2) в стовпцях знаходяться критерії*
3) на перетині рядків і стовпців знаходиться оцінка альтернатив*
4) у рядках знаходяться критерії
5) в стовпцях знаходяться альтернативи

3. Багатокритеріальні задачі - це:

1) задачі, які складаються в пошуку кращого (оптимального) рішення, що задовольняє кільком незводимим один одному критеріям*
2) порівняння однорідних критеріїв різних учасників
3) нерізні критерії, а наявність у цільовій функції не тільки глобального, але і локального екстремумів

4. Експертні оцінки - це:

1) кількісні чи порядкові оцінки процесів чи явищ, які не піддаються безпосередньому виміру
2) оцінки, які засновані на судженні спеціалістів
3) оцінки, які не можна враховувати повністю об'єктивними, оскільки на спеціалиста-експерта можуть діяти різноманітні побічні фактори
4) наукові методи, які дають в сукупності більш чи менш об'єктивні відповіді
5) усі відповіді вірні*

5. У множину Парето:

1) входять тільки ті альтернативи, які не домінують одна над іншою, але домінують над альтернативами, що не входять у цю множину*
2) входять тільки ті альтернативи, які домінують одна над іншою, але не домінують над альтернативами, що не входять у цю множину

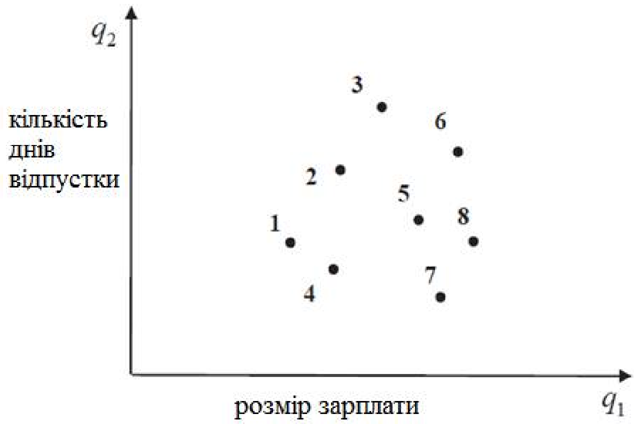
3) входять тільки ті альтернативи, які не домінують одна над іншою
4) входять тільки ті альтернативи, які домінують одна над іншою

6. Альтернатива d_i ***має переваги*** порівняно з альтернативою d_j

1) у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща ніж d_j хоча б за одним критерієм*
2) у тому випадку, коли d_i краща ніж d_j за всіма критеріями
3) у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями

7. Визначити множину Парето

Відповідь вкажіть числами через один проміжок



3 6 8*

8. Дано: критеріальна таблиця, де альтернативами є претенденти на отримання тендеру з поліпшення екологічної рівноваги в регіоні.

Альтернативи	Критерії			
	Вартість	Якість водних ресурсів	Якість повітря	Якість земельних ресурсів
Претендент 1	2	4	5	4
Претендент 2	2	3	4	5
Претендент 3	5	3	3	3

Критеріями є вартість виконання робіт, очікувана якість: водних ресурсів, повітря, земельних ресурсів. Оцінки пропозицій претендентів виконані експертом по п'ятибальній шкалі (більш високий бал означає більш високу

перевагу). Вага критеріїв: (0,2; 0,3; 0,3; 0,2). Необхідно вибрати кращого претендента на виконання робіт на підставі методу лінійної згортки.
Введіть номер претендента

1*

9. Для реалізації методу пошуку альтернативи з заданими якостями можуть застосовуватись:

1) декартова відстань
2) манхеттенська метрика
3) відстань Хемінга
4) відстань Левенштейна
5) відстань Мінковського
6) усі відповіді вірні*

10. Альтернатива d_i домінуюча над альтернативою d_j

1) у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща ніж d_j хоча б за одним критерієм*
2) у тому випадку, коли d_i краща ніж d_j за всіма критеріями
3) у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями

Тема 5.
Метод аналізу ієрархій (МАІ)

5.1 Загальна характеристика методу аналізу ієрархій

Метод Аналізу Ієрархій (***МАІ***) – математичний інструмент системного підходу до вирішення проблем прийняття рішень. МАІ не надає особі, яка приймає рішення (ОПР), будь-якого «правильного» рішення, а дозволяє йому в інтерактивному режимі знайти такий варіант (альтернативу), який найкраще узгоджується з його розумінням суті проблеми та вимогами до її вирішення. Цей метод розроблений американським вченим математиком Томасом Л. Сааті в 1970 році, з того часу він активно розвивається і широко використовується на практиці. Метод аналізу ієрархій можна використовувати не тільки для порівняння об'єктів, але й для вирішення складніших проблем управління, прогнозування та інших.

Метод надає змогу:

- виокремити структурні елементи задачі прийняття рішень і формалізувати зв’язки між ними;
- визначити системи переваг ОПР і критеріїв, за якими оцінюють альтернативи;
- синтезувати правило прийняття рішень, яке ґрунтується на перевагах одних альтернатив у порівнянні з іншими.

Основа методу – структуризація задачі прийняття рішень на основі багаторівневої ієрархії.

Переваги методу:

- наочність моделей;
- простота інтерпретації результатів;
- відносна простота розрахунків;
- відповідність принципам системного аналізу;

- можливість оцінювання альтернатив не тільки за кількісними, але і за якісними критеріями, що суб'єктивно визначаються експертами;
- стійкість до порушення узгодженості суб'єктивних оцінок.

Основною ***перевагою*** методу аналізу ієрархій є висока універсальність – метод може застосовуватися для вирішення найрізноманітніших задач: аналізу можливих сценаріїв розвитку ситуації, розподілу ресурсів, складання рейтингу клієнтів, прийняття кадрових рішень та інших.

Недоліком методу аналізу ієрархій є необхідність отримання великого обсягу інформації від експертів. Метод найбільшою мірою підходить для тих випадків, коли основна частина даних заснована на уподобаннях особи, яка приймає рішення, в процесі вибору найкращого варіанта рішення з множини багатьох існуючих альтернатив.

У типовій ситуації прийняття рішення:

- розглядаються декілька варіантів рішення (альтернатив);
- заданий критерій, яким визначається якою мірою те чи інше рішення підходить;
- відомі умови, у яких вирішується проблема, та причини, що впливають на вибір того чи іншого рішення.

Постановка задачі в процесі застосування методу аналізу ієрархій: Нехай є множина альтернатив (варіантів рішень): A_1, A_2, … A_n. Кожна з альтернатив оцінюється списком критеріїв: K_1, K_2, … K_m. Потрібно визначити найкраще рішення.

5.2 Етапи застосування методу аналізу ієрархій:

5.2.1. ***Побудова якісної моделі проблеми у вигляді ієрархії***, що включає мету, альтернативні варіанти досягнення мети та критерії для оцінки якості альтернатив.

Головний принцип методу аналізу ієрархій – узагальнення задачі на верхньому рівні та її деталізація на нижніх рівнях ієрархії. Тобто верхній рівень визначає головні цілі, а нижні рівні – способи формування та методи розбиття елементів попереднього рівня (рис. 5.1).

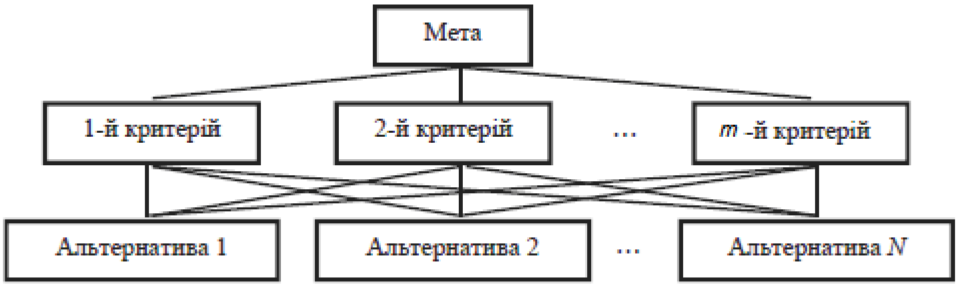


Рис. 5.1. Приклад трирівневої моделі абстрактної задачі

5.2.2. ***Визначення пріоритетів всіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь***.

5.2.2.1 ***Попарне порівняння критеріїв за важливістю.***

Для парного порівняння критеріїв складають зворотно симетричну квадратну матрицю парного порівняння розміром $m \times m$ (табл. 5.2)

Елемент матриці k_{ij} – міра переваги критерію K_i над критерієм K_j згідно шкали Сааті (табл. 5.1):

Таблиця 5.1. Шкала Сааті

Ступінь переваги одного об'єкта над іншим	***Міра важливості (значущості) переваги***
Однакова значущість. Немає переваг	1
Слабка значущість. Слабка перевага	3
Істотна або сильна значущість. Сильна перевага	5
Дуже сильна або очевидна значущість. Дуже сильна перевага	7
Абсолютна значущість. Абсолютна перевага.	9
Проміжні значення між сусідніми судженнями	2, 4, 6, 8

У процесі заповнення матриці якщо елемент K_i важливіший за елемент K_j, то клітина (i, j) – елемент k_{ij}, відповідна рядку i і стовпцю j, заповнюється цілим числом, а клітина (j, i), відповідна рядку j і стовпцю i, заповнюється зворотним числом (дробом)

$$k_{ji} = 1/k_{ij}.$$

Наприклад, якщо K_1 помірно перевершує (слабка перевага) K_4, то в клітину (1;4) (на перетині першого рядка і четвертого стовпця) ставиться число 3, а в клітину (4;1) (четвертий рядок першого стовпця) – обернена величина, рівна 1/3.

Якщо ж елемент K_j більш важливий, ніж елемент K_i, ціле число ставиться в клітину (j, i), а зворотна величина – в клітину (i, j). Якщо вважається, що K_i, K_j однакові по важливості, то в обидві клітини ставиться одиниця.

Таблиця 5.2. Матриця попарного порівняння критеріїв

	K_1	K_2	…	K_m	*Власний вектор* V	*Вектор пріоритетів* P
K_1						
K_2						
…						
K_m						
Разом						
$\lambda_{\max}$						
ІУ						
ВУ						

Заповнення таблиці (див. табл. 5.2) проводиться порядково. Спочатку проставляють цілі оцінки, тоді відповідні їм дробові оцінки виходять з них автоматично (як зворотні до цілих чисел). Чим важливіший критерій, тим більше цілих оцінок буде у відповідному рядку матриці, і самі оцінки мають великі значення. Оскільки кожен критерій дорівнює сам собі за важливістю, то головна діагональ матриці завжди складатиметься з одиниць.

Розрахунок середніх геометричних (елементів власного вектору V) в кожному рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} k_{ij}} \text{ , } i = 1,...,m \text{ , } j = 1,...,m \text{ .}$$

Компонента i нормалізованого вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{m} V_i} \text{ , } i = 1,...,m \text{ .}$$

Кожний компонент вектору пріоритетів є оцінкою важливості відповідного критерію (наприклад, 1-й компонент є оцінкою важливості першого критерію).

Очевидно, що сума компонентів вектору пріоритетів дорівнює одиниці.

При проведенні попарних порівнянь здебільшого ставляться такі питання при порівнянні критеріїв K_i та K_j:

- який із них важливіший чи має більший вплив?
- який із них найімовірніший?
- який із них краще?

5.2.2.2 ***Попарне порівняння альтернатив по кожному критерію за важливістю.***

Проводиться попарне порівняння альтернатив по кожному критерію аналогічно п.2.1.

Для парного порівняння альтернатив складають зворотно симетричну квадратну матрицю парного порівняння розміром $n \times n$ (табл. 5.3) – заповнюється по кожному j-му критерію K_j, $j = 1,...,m$.

Таблиця 5.3. Матриця попарного порівняння альтернатив

K_j	A_1	A_2	…	A_n	*Власний вектор* V	*Вектор пріоритетів* P
A_1						
A_2						
…						
A_n						
Разом						
$\lambda_{\max}$						
ІУ						
ВУ						

Заповнення таблиці з використанням шкали Сааті.

Розрахунок середніх геометричних (елементів власного вектору *V*) в кожному рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\ , \ i = 1,...,n\ , \ j = 1,...,n\ .$$

Компонента *i* нормалізованого вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}\ , \ i = 1,...,n\ .$$

При проведенні попарних порівнянь альтернатив за кожним критерієм також ставиться питання:

яка із них краще (важливіше) за критерієм K_j, $j = 1,...,m$?

5.2.3. ***Перевірка узгодженості локальних пріоритетів***

Метод Сааті узагальнює традиційне поняття транзитивності для будь-якої трійки альтернатив.

Традиційне поняття транзитивності: якщо $A_i \succ A_j$ і $A_j \succ A_k$, то $A_i \succ A_k$.

Узагальнене поняття транзитивності формулюють: якщо $A_i \succ A_j$ в a_{ij} разів, і $A_j \succ A_k$ в a_{jk} разів, то $A_i \succ A_k$ в $a_{ij} \cdot a_{jk}$ разів.

Зрозуміло, що ці умови виконуються автоматично, якщо значення a_{ij} ґрунтуються на *об'єктивних кількісних оцінках*, коли ваги альтернатив $\omega_1,...,\omega_n$ точно відомі. Матриця переваг у цьому випадку є узгодженою.

Друга, найпоширеніша ситуація, полягає в тому, що властивості об'єктів *слабо структуровані* і можуть бути оцінені тільки в *шкалі порядку*. В цьому випадку експерти використовують шкалу Сааті. В цьому разі неможливо досягти повної узгодженості через різні кваліметричні шкали у різних об'єктів тому розглядають два показники***: індекс узгодженості*** (ІУ) і ***відношення узгодженості*** (ВУ).

В загальному випадку узгодженість зворотньо-симетричної матриці еквівалентна до вимоги рівності її максимального власного значення λ_{max} числу порівнюваних об'єктів. У випадку порівняння альтернатив $\lambda_{max} = n$.

Наближені значення λ_{max} для оцінки відношення узгодженості можна отримати за формулою:

$$\lambda_{\max} = M_j \cdot P_j,$$

де $M_j = \sum a_{ij}$ - сума елементів *j*-го стовпця матриці парного порівняння;

P_j - компонента вектору пріоритетів.

Згідно з методом Сааті ***відношення узгодженості*** обчислюється по формулі:

$$ВУ = ІУ/ВІ,$$

де ***індекс узгодженості -*** нормоване відхилення λ_{max} від n:

$$ІУ = (\lambda_{max} - n)/(n - 1).$$

Випадковий індекс (*ВІ*) – це індекс узгодженості, розрахований для квадратної n-вимірної позитивної зворотно-симетричної матриці, елементи якої згенерували датчиком випадкових чисел, розподілених по рівномірному закону для інтервалу значень: 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. У таблиці нижче представлені значення випадкового індексу *ВІ* для різних матриць порядку від 2 до 10.

Значення випадкового індексу (n – порядок матриці)

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВІ	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В загальному випадку *ВІ* можна наближено знайти з формули

$$BI = \frac{1{,}98(n-2)}{n},$$

де n – розмір матриці парних порівнянь.

Прийнятним ступенем узгодженості можна вважати діапазон (0,1 – 0,15).

Якщо значення *ВУ* ≤ (10% - 15%), то ступінь узгодженості вважається добрим, оцінки в матриці вважаються узгодженими.

Інакше експерту рекомендується переглянути свої думки і переглянути оцінки в матриці.

5.2.4. ***Синтез глобальних пріоритетів альтернатив шляхом лінійної згортки локальних пріоритетів елементів на ієрархії.***

Визначається загальний критерій (пріоритет) для кожної альтернативи:

$K(A_1)$ = оцінка A_1 по K_1 х першу компоненту ВП + оцінка A_1 по K_2 х другу компоненту ВП + … + оцінка A_1 по K_m х m компоненту ВП,

де ВП – вектор пріоритетів із таблиці 5.2

Аналогічно підраховуються $K(A_2)$, …, $K(A_n)$ (табл.5.4).

Таблиця 5.4. Синтез глобальних пріоритетів альтернатив

	K_1	K_2	…	K_m	Глобальні пріоритети (підсумкові
	перша компонента	друга компонента		m компонента	

	ВП	ВП		ВП	значення пріоритетів)
A_1					$K(A_1)$=
A_2					$K(A_2)$=
…					…
A_n					$K(A_n)$=

5.2.5. ***Прийняття рішення з урахуванням отриманих результатів.***

Компоненти вектору глобальних пріоритетів ранжируються по зростанню і робиться висновок щодо найкращої альтернативи, для якої значення K є максимальним.

5.3 Задача. Приклад рішення.

Студент ОНМУ вибирає одну з мов програмування для подальшого застосування в професійній діяльності: Python, C#, JS. Для того щоб вибрати мову, студент сформулював три основних критерії використання в професійній діяльності: Аналіз даних, Web розробка і Системне адміністрування. Студент вважає, що Аналіз даних має сильну перевагу (є перспективнішим в 5 разів), ніж Web розробка і слабку перевагу (в 3 рази важливіший) ніж Системне адміністрування. А Системне адміністрування має слабку перевагу (в 3 рази важливіше) ніж Web розробка.

При виборі мов програмування для Аналізу даних студент вважає, що Python має середнє значення між сильною і слабкою перевагою (в 4 рази важливіше за C#), і має слабку перевагу (в 3 рази важливіше) ніж JS. А C# має дуже слабку перевагу (в 2 рази важливіше) ніж JS.

При виборі мов програмування для Web розробки студент вважає, що Python має слабку перевагу (в 3 рази важливіше) над C#, і має сильну перевагу (в 5 рази важливіший) за JS. А C# в має дуже слабку перевагу (в 2 рази важливіше) за JS.

При виборі мов програмування для Системного адміністрування студент вважає, що Python має дуже слабку перевагу (в 2 рази важливіше) за C# і має слабку перевагу (в 3 рази важливіше) за JS. А C# має дуже слабку перевагу (в 2 рази важливіше) ніж JS.

Яку мову необхідно обрати студенту, щоб він була задоволений вибором, який приведе його в успішне майбутнє?

Рішення.

Побудова дерева ієрархії зображено на рис. 5.2

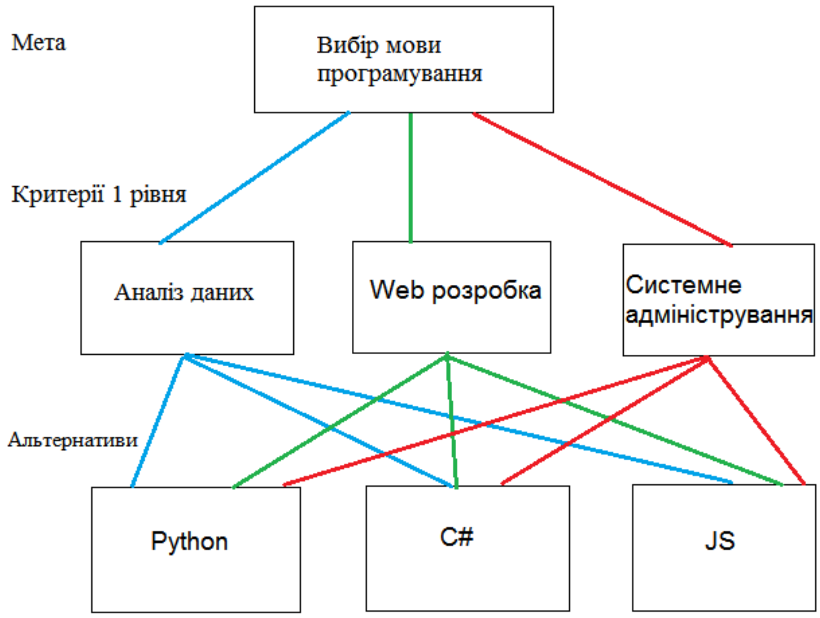


Рисунок 5.2. – Дерево ієрархії

Створення матриці парних порівнянь для критеріїв Аналіз даних, Web розробка і Системне адміністрування, обчислення вектору пріоритетів та визначення узгодженості отриманої матриці попарних порівнянь показано на рис. 5.3.

	Критерії: К1 - Аналіз даних, К2 - Web розробка, К3 - Системне адміністрування				
	V - власний вектор, P - вектор пріоритетів				
Критерії	К1	К2	К3	V	P
К1	1	5	3	2,466212	**0,636986**
К2	0,2	1	0,333333	0,40548	**0,104729**
К3	0,333333	3	1	1	**0,258285**
Разом	**1,533333**	**9**	**4,333333**	3,871692	
Lambda	3,038511				
ІУ	0,019256				
ВУ	**0,033199**	3,32%	<10%		

Рисунок 5.3 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Створення матриці парних порівнянь для альтернатив згідно критеріїв Аналіз даних, Web розробка і Системне адміністрування, обчислення вектору пріоритетів та визначення узгодженості отриманих матриць попарних порівнянь показано на рис. 5.4.

Синтез глобальних пріоритетів показано на рис. 5.5.

При виконанні розрахунків застосовували формули MS EXCEL:

Для розрахунку λ_{max}

=СУММПРОИЗВ(ТРАНСП(B8:D8);F5:F7)

Для розрахунку компонент вектору глобального пріоритету

=СУММПРОИЗВ(B55:D55;B56:D56)

Загальний висновок. Найкращий вибір - мова Python.

5.4 Критерії декількох рівнів

Число рівнів в ієрархічній моделі може бути довільним. Наприклад, якщо створюють модель для вибору автомобіля, то рівень критеріїв має включати критерій «надійність». Цей критерій можна далі деталізувати наступним рівнем, який включає вже критерії «надійність двигуна», «надійність ходової частини» тощо. У свою чергу надійність ходової частини можна деталізувати критеріями наступного рівня, такими як «надійність гальмівної системи», надійність підвіски тощо.

Критерій: К1 - Аналіз даних
Альтернативи: A1 - Python, A2 - C#, A3 - JS

К1	A1	A2	A3	V	P
A1	1	4	3	2,289428	**0,630098**
A2	0,25	1	2	0,793701	**0,218443**
A3	0,333333	0,5	1	0,550321	**0,15146**
Разом	**1,583333**	**5,5**	**6**	3,63345	
Lambda	3,107847				
ІУ	0,053924				
ВУ	0,092972	9,30%	<10%		

Критерій: К2 - Web розробка
Альтернативи: A1 - Python, A2 - C#, A3 - JS

К2	A1	A2	A3	V	P
A1	1	3	5	2,466212	**0,648329**
A2	0,333333	1	2	0,87358	**0,229651**
A3	0,2	0,5	1	0,464159	**0,12202**
Разом	**1,533333**	**4,5**	**8**	3,803951	
Lambda	3,003695				
ІУ	0,001847				
ВУ	0,003185	0,32%	<10%		

Критерій: К3 - Системне адміністрування
Альтернативи: A1 - Python, A2 - C#, A3 - JS

К3	A1	A2	A3	V	P
A1	1	2	3	1,817121	**0,539615**
A2	0,5	1	2	1	**0,296961**
A3	0,333333	0,5	1	0,550321	**0,163424**
Разом	**1,833333**	**3,5**	**6**	3,367442	
Lambda	3,009203				
ІУ	0,004601				
ВУ	0,007933	0,79%	<10%		

Рисунок 5.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критеріями

	Критерії			
	К1	К2	К3	Глобальні
Альтернативи	**0,636986**	**0,104729**	**0,258285**	пріоритети
A1	0,630098	0,648329	0,539615	***0,608637***
A2	0,218443	0,229651	0,296961	***0,239897***
A3	0,15146	0,12202	0,163424	***0,151467***

Рисунок 5.5 – Синтез глобальних пріоритетів

Продемонструємо принцип створення ієрархічної моделі на прикладі конкретної задачі – прийняття рішення про стратегію розвитку фармацевтичної промисловості.

Будемо вважати, що можливі ***альтернативи*** такі:

1. Відмова від розвитку вітчизняної промисловості, тобто імпортна закупка всіх ліків.
2. Створення підприємств з випуску обмеженої групи ліків.
3. Створення виробництв основної номенклатури ліків.

Далі визначаємо основних учасників процесу, якими є:

- держава;
- виробники ліків;
- споживачі.

Треба також прийняти до уваги різні інтереси цих сторін. Так мета держави – нові робочі місця, оподаткування, низькі ціни ліків для вирішення соціальних проблем. Основний інтерес виробників – отримання максимальних прибутків, а споживачів – отримання якісних ліків в розумні терміни за прийнятними цінами.

Навіть такий попередній аналіз дає змогу побудувати ієрархію задачі, визначити її структуру та взаємозв'язки між окремими елементами різних рівнів, що в подальшому полегшує розв'язання задачі (рис. 5.6).

Рис. 5.6. Приклад спрощеної ієрархії конкретної задачі

5.5 Адекватність моделі, яка побудована за методом МАІ

Адекватність моделі – властивість моделі, що полягає в здатності моделі відтворювати з необхідною повнотою ті властивості якості об'єкту, які є істотними для мети аналізу. Іншими словами - це властивість моделі забезпечувати заданий ступінь ефективності управління процесом досягнення необхідної мети. Адекватність означає, що вимоги повноти, точності правильності моделі виконується тією мірою, яка є достатньою для досягнення поставленої мети.

Вимоги адекватності моделі і об'єкта – необхідна умова для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів з моделі на об'єкт дослідження. Будь-яка модель є спрощеною копією оригіналу, тому неможливо говорити про абсолютну адекватність моделі. Оцінка ступеня схожості спирається тільки на оцінку відмінності від оригіналу. Щодо моделі, отриманої згідно з МАІ, до поняття адекватності відноситься перевірка двох моментів:

1) відношення узгодженості (ВУ) повинне бути менше 0,1 (прийнятним вважається діапазон значень (0,1 – 0,3));

2) модель стійка відносно до незначних змін її структури.

Стійкість вектора пріоритетів – якісна характеристика чутливості значень пріоритетів до малих змін даних або структури моделі. Очевидно, дані, що використовуються для прийняття рішень, завжди більш-менш неточні. Тому чим менше чутливість значень пріоритетів, тим більше обґрунтованість використання цих пріоритетів для підтримки прийняття рішення. Якщо при малих змінах даних або структури рейтинг змінюється неістотно, то він вважається стійким. Поняття "істотна зміна рейтингу" залежить від вирішуваної задачі.

5.6 Рекомендації до побудови ієрархій

У методі аналізу ієрархій немає строгих правил створення моделей прийняття рішення. МАІ дозволяє лише систематизувати процес прийняття рішень, упорядкувати процес витягання знань з наявної інформації. Тому для створення моделей прийняття рішення потрібні досвідчені фахівці.

Рекомендується така послідовність підготовки прийняття рішення за допомогою МАІ.

1. Визначити набір можливих (альтернативних) рішень і мету прийняття рішення (головний критерій, за яким визначається перевага рішення). Мета може бути сформульованою дуже узагальнено (часто при постановці проблеми немає чіткого усвідомлення мети).

2. Визначити групи чинників, що роблять вплив на прийняття рішення.

Як правило, частина таких груп – це деталізації сформульованої узагальнено головної мети рейтингування альтернатив (приватна мета, підкритерії і т. п.).

3. Сформувати рівні: перший рівень (вершина) – головна мета (головний критерій) рейтингування рішень, нижній рівень – можливі рішення, проміжні рівні – групи однотипних чинників, що впливають на рейтинг рішень.

Таким чином, сформована рівнева структура моделі.

Така структура дає попереднє уявлення про рейтингування рішень. На ній показані вузли (мета, чинники, рішення), згруповані по типах.

4. З'ясувати структуру впливів між метою, чинниками і рішеннями. При цьому спочатку виділяють пари рівнів, один з яких робить вплив на іншій. Потім з'ясовують, між якими саме вузлами виділених рівнів є зв'язки.

5. Додати до рівневої структури моделі зв'язки між вузлами. Зв'язок "Мета" —> "Фактор рівня Х" означає, що важливість обліку чинника "Х" у моделі визначається метою рейтингування рішень.

Зв'язок "Фактор" —> "Рішення" означає, що перевага (важливість, оптимальність, доцільність) рішення в моделі визначається зокрема з погляду дії даного чинника. Зв'язок "Чинник А" —> "Фактор Б" означає, що важливість обліку чинника Б у моделі визначається наявністю чинника А.

6. Проаналізувати кластерну структуру моделі прийняття рішення. При необхідності внести корективи: додати або видалити вузли, додати або

видалити зв'язки. Таким чином, формування структури моделі завершено (проведений аналіз).

7. Внести дані для кластерів: провести порівняння для вузлів кожного кластера і для кластерів, що мають загальну вершину, або ввести відповідні вектори пріоритетів без проведення порівнянь.

8. Оцінити якість даних (узгодженість, достовірність). При необхідності провести коригування даних.

9. Розрахувати рейтинг пріоритетів рішень і показники узгодженості і достовірності.

10. Доцільно розрахувати вектори пріоритетів для рівнів.

11. Перевірити стійкість рейтингу.

12. Провести інтерпретацію отриманих результатів для підтримки прийняття рішення, тобто провести синтез.

Для інтерпретації результатів може бути потрібна також інформація: про істотні і неістотні чинники, враховані в моделі, про ситуації прийняття рішення, близькі до тієї, що розглядається по структурі або по інформаційному наповненню.

МАІ знаходить застосування в найрізноманітніших сферах людської діяльності:

- розробка програми розподілу ресурсів на підприємстві;
- розподіл транспортних засобів регіону (області, міста);
- планування розвитку системи доставок продукції;
- підбір кандидатів на вакантну посаду;
- виявлення критично важливих технологій для розвитку виробництва;
- виявлення важливих екологічних аспектів у формуванні системи екологічного менеджменту на підприємстві;
- прогнозування цін на товари і послуги;
- атестація фахівців на підприємстві;

- вибір нових технологій основного виробництва й інформаційних технологій в процесі реінжинірингу.

Якщо виявляється, що в масштабі моделі дані недостатньо злагоджені або недостатньо достовірні, то доцільно провести вибіркове коригування даних.

Розроблені й успішно застосовуються пакети прикладних програм, що дозволяють виконувати: побудову ієрархії, порівняння альтернатив на підставі вибраних критеріїв, необхідні обчислення пріоритетів рівнів, узгодженості рішень і отримати остаточний варіант ранжирування альтернатив. До них відносяться такі пакети, як "Expert Choice" та "Decision Greed".

5.7 Тести для самоконтролю знань

1. Якщо в клітинці (2, 6) матриці парного порівняння стоїть число 7, то це означає

1) Критерій K_2 має дуже сильну перевагу над критерієм K_6*
2) Критерій K_6 має дуже сильну перевагу над критерієм K_2

2. Якщо в клітинці (2, 1) матриці парного порівняння стоїть число 1/3, то це означає

1) Критерій K_2 має слабку перевагу над критерієм K_1
2) Критерій K_1 має слабку перевагу над критерієм K_2*

3. Які питання можна вирішити за допомогою МАІ?

1) який із критеріїв важливіший ?*
2) який із критеріїв має більший вплив ?*
3) який із критеріїв найімовірніший ?*
4) який із критеріїв краще ?*
5) яка ймовірність найважливішого критерію ?*

4. Відділ кадрів приймає на роботу одного з трьох співробітників: Іванов (І), Петров (П), Михайлов (М). Відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (С), досвід роботи (Д), рекомендації (Р).
Для порівняння трьох критеріїв відділ кадрів використовує матрицю К

К =

	С	Д	Р
С	1	2	1/4
Д	1/2	1	1/5
Р	4	5	1

Після проведеної співбесіди, отримання даних про досвід роботи і рекомендації, побудовані матриці

А_С =

	І	П	М
І	1	3	4
П	1/3	1	1/5
М	1/4	5	1

А_Д =

	І	П	М
І	1	1/3	2
П	3	1	1/2
М	1/2	2	1

А_Р =

	І	П	М
І	1	1/2	1
П	2	1	1/2
М	1	2	1

Виберіть правильні твердження:

1) Критерій Рекомендація важливіший ніж критерій Співбесіда*
2) Критерій Співбесіда важливіший ніж критерій Рекомендація
3) Критерій Рекомендація важливіший ніж критерій Досвід*
4) Критерій Досвід важливіший ніж критерій Рекомендація
5) Критерій Співбесіда важливіший ніж критерій Досвід*
6) Критерій Досвід важливіший ніж критерій Співбесіда
7) Згідно критерію Співбесіда Михайлов більше підходить, ніж Петров*
8) Згідно критерію Співбесіда Петров більше підходить, ніж Іванов
9) Згідно критерію Досвід роботи Михайлов більше підходить, ніж Іванов*
10) Згідно критерію Досвід роботи Іванов більше підходить, ніж Михайлов
11) Згідно критерію Рекомендації Михайлов більше підходить, ніж Петров*
12) Згідно критерію Рекомендації у Михайлова не має переваг над Івановим*

5. Відділ кадрів приймає на роботу одного з трьох співробітників: Іванов (І), Петров (П), Михайлов (М). Відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (С), досвід роботи (Д), рекомендації (Р).
Для порівняння трьох критеріїв відділ кадрів використовує матрицю К

К =

	С	Д	Р
С	1	2	1/4
Д	1/2	1	1/5
Р	4	5	1

Після проведеної співбесіди, отримання даних про досвід роботи і рекомендації, побудовані матриці

А_С =

	І	П	М
І	1	3	4
П	1/3	1	1/5
М	1/4	5	1

А_Д =

	І	П	М
І	1	1/3	2
П	3	1	1/2
М	1/2	2	1

А_Р =

	І	П	М
І	1	1/2	1
П	2	1	1/2
М	1	2	1

Виберіть правильне ранжування критеріїв:

1) $Р \succ С \succ Д$ *
2) $Р \succ Д \succ С$
3) $Д \succ С \succ Р$
4) $Д \succ Р \succ С$
5) $С \succ Д \succ Р$
6) $С \succ Р \succ Д$

6. Відділ кадрів приймає на роботу одного з трьох співробітників: Іванов (І), Петров (П), Михайлов (М). Відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (С), досвід роботи (Д), рекомендації (Р).
Для порівняння трьох критеріїв відділ кадрів використовує матрицю К

К =

	С	Д	Р
С	1	2	1/4
Д	1/2	1	1/5
Р	4	5	1

Після проведеної співбесіди, отримання даних про досвід роботи і рекомендації, побудовані матриці

А_С =

	І	П	М
І	1	3	4
П	1/3	1	1/5
М	1/4	5	1

А_Д =

	І	П	М
І	1	1/3	2
П	3	1	1/2
М	1/2	2	1

A_P =

	І	П	М
І	1	1/2	1
П	2	1	1/2
М	1	2	1

Виберіть правильне ранжування альтернатив за критерієм Співбесіда:

1) $I \succ M \succ П$ *
2) $I \succ$ П $\succ M$
3) $M \succ I \succ П$
4) $M \succ П \succ I$
5) $П \succ I \succ M$
6) $П \succ M \succ I$

7. Альтернативи знаходяться на

1) нижньому рівні ієрархії*
2) верхньому рівні ієрархії

8. Які пакети прикладних програм використовують для рішення ЗПР за допомогою МАІ?

1) Expert Choice*
2) Decision Greed*
3) Сервіс Пошук рішення MS Excel
4) Сервіс Аналіз рішення MS Excel

9. Ким розроблений метод аналізу ієрархій?

1) Сааті*
2) Тьюкі
3) Вальд
4) Севідж
5) Гурвіц
6) Леман

10. Якщо $A_i \succ A_j$ і $A_j \succ A_k$, то $A_i \succ A_k$, то це

1) Традиційне поняття транзитивності*
2) Узагальнене поняття транзитивності

<u>Тема 6.</u>
Прийняття рішень в умовах ризику.

6.1 Умови класифікації рішень в теорії прийняття рішення

Прийняття рішень в умовах визначеності.

Умови, при яких особа, що приймає рішення, знає з достатнім ступенем впевненості, які існують альтернативи і які умови пов'язані з кожною альтернативою.

Прийняття рішень в умовах ризику

Умова, за якої доступність кожної альтернативи, її потенційні вигоди і витрати – усі асоціюються з ризиками.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Умови, при яких особа, що приймає рішення, не знає всіх альтернатив, ризиків, пов'язаних з кожною із них, або наслідків кожної з альтернатив.

Класифікація прийняття рішень в залежності від умов наведена на рис. 6.1.

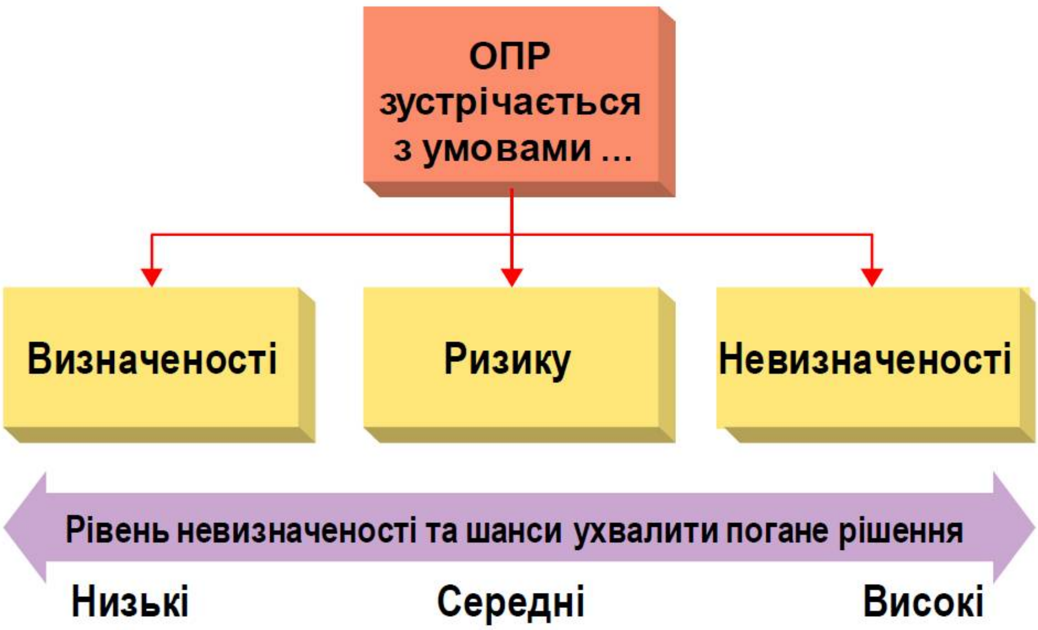


Рис. 6.1 Умови класифікації рішень в теорії прийняття рішення

Залежно від інформації, якою володіє керуюча підсистема про стан середовища, існують різні типи задач прийняття рішень:

- Прийняття рішень в умовах визначеності.

- Прийняття рішень в умовах ризику.
- Прийняття рішень в умовах невизначеності.
- Прийняття рішень в теоретико-ігрових умовах (де середовище теж є керуючою підсистемою).

Прийняття рішень за умов ризику класифікується як прийняття рішень в умовах, коли кожна альтернатива рішення пов'язана з множиною можливих результатів, причому кожен результат має певну *ймовірність появи*, відому заздалегідь особі, що приймає рішення.

6.2 Критерій очікуваного значення

Якщо рішення приймається за умов ризику, то вартості альтернативних рішень зазвичай описуються *імовірнісними розподілами*. Тобто, прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є *випадковою величиною* (повернуть або не повернуть кредит: в одному випадку ми отримаємо прибуток, у іншому збитки). Тому в якості критерію прийняття рішення використовується ***очікуване значення вартості - математичне сподівання*** (М). Критерій очікуваного значення зводиться або до максимізації очікуваного (середнього) прибутку, або до мінімізації очікуваних витрат. В даному випадку передбачається, що прибуток (витрати), пов'язаний з кожним альтернативним рішенням, є випадковою величиною.

6.3 Задача. Модель газетного кіоску. Поняття платіжної матриці. Критерій максимуму очікуваного середнього виграшу

Продавець газетного кіоску може купити журнал по 40 грн. за кожний екземпляр та продати їх по 75 грн. Але, звісно, він повинен закупити журнали до того, як знатиме, скільки реально він їх продасть. Якщо він закупить журналів більше, ніж зможе продати, він зазнає збитків, які рівні вартості непроданих журналів. Якщо він закупить надто мало журналів, то він втратить потенційних покупців сьогодні і, можливо, в майбутньому (незадоволений покупець може перестати купувати в цьому газетному кіоску свій улюблений журнал).

Припустимо, що ***майбутні*** втрати (тобто упущену вигоду) можна узагальнено оцінити у 50 грн на одного незадоволеного покупця.

Припустимо, що продавець оцінив ймовірності попиту на журнал наступним чином.

P_0 = P {попит = 0} = 0,1;

P_1 = P {попит = 1} = 0,3;

P_2 = P {попит = 2} = 0,4;

P_3 = P {попит = 3} = 0,2.

Рішення.

Позначимо

П - кількість проданих журналів;

З - кількість закуплених журналів;

Н - незадоволений попит.

Складемо платіжну матрицю для цієї моделі.

Платіжна матриця - це таблиця, число стовпців якої відповідає числу значень можливого попиту (у цій моделі чотири значення попиту), число рядків - кількості закуповуваних продавцем журналів (рішення продавця, альтернативи).

Платежі у платіжній матриці, що обчислюються для кожної комбінації рішення та попиту, визначають прибуток або втрачену вигоду, якщо кількість закуплених журналів не відповідає попиту на них. Ці платежі обчислюються за такою формулою:

$$A = 75*П – 40*З – 50*Н,$$

тут 75 грн - вартість проданого журналу,

40 грн - покупна вартість журналу,

50 грн - вартість втрати покупця (втрачена вигода).

Результати занесемо у платіжну матрицю (табл. 6.1)

Таблиця 6.1. Платіжна матриця

Рішення продавця (A_i)	Попит			
	0	1	2	3
A_1: 0	0	-50	-100	-150
A_2: 1	-40	35	-15	-65
A_3: 2	-80	-5	70	20
A_4: 3	-120	-45	30	105

Розглядаючи цю модель, важливо зрозуміти, що кількість проданих журналів та попит не є тотожними величинами.

Кількість проданих журналів - це мінімум двох величин: кількості закуплених журналів та реального попиту. Наприклад, якщо не закуплено жодного екземпляра журналу, то, очевидно, кількість проданих журналів дорівнює нулю, незалежно від попиту, та незадоволений попит дорівнює самому попиту.

Для прийняття рішення застосуємо ***критерій максимуму очікуваного середнього виграшу*** (***очікуваної вартісної оцінки EMV*** – expected monetary value).

Якщо відома платіжна матриця з оцінками умов (a_{ij}) та ймовірностями реалізації p_j, можна визначити очікувану вартісну оцінку *EMV* для кожної альтернативи, яка є сумою всіляких оцінок умов (виграшів) для цієї альтернативи, помножених на ймовірності реалізації цих умов (виграшів).

$$EMV(A_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij}$$

(Середньозважене за ймовірністю значення платежів).

Критерієм для вибору найкращого рішення є максимум очікуваної вартісної оцінки:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} \text{ для } \forall\, i = 1,...,m$$

Визначимо очікуваний результат (платіж) для кожного рішення:

$EMV(A_1) = 0*0,1 – 50*0,3 – 100*0,4 – 150*0,2 = -85$

$EMV(A_2) = -40*0,1 +35*0,3 – 15*0,4 – 65*0,2 = -12,5$

$EMV(A_3) = -80*0,1 – 5*0,3 +70*0,4 +20*0,2 = 22,5$

$EMV(A_4) = -120*0,1 – 45*0,3 + 30*0,4 + 105*0,2 = 7,5$

Знаходимо max {-85, -12.5, 22.5, 7.5} = 22.5.

Висновок. Оптимальне рішення – закупати два екземпляри журналу.

6.4 Дерева рішень. Показник очікуваної цінності достовірної інформації

Дерева рішень - це графічний засіб аналізу прийнятих рішень за умов ризику. Дерева рішень створюються для використання у моделях, у яких приймається послідовність рішень, кожна з яких веде до деякого результату.

Процес прийняття рішень за допомогою дерева рішень передбачає виконання п'яти наступних етапів.

Етап 1. Формулювання задачі.

Насамперед, необхідно відкинути фактори, що не належать до проблеми, а серед безлічі тих, що залишилися виділити суттєві і несуттєві. Це дозволить привести опис задачі прийняття рішення до формі, що піддається аналізу. Повинні бути виконані такі основні процедури:

• визначення можливостей збору інформацій для експериментування та реальних дій;

• складання переліку подій, які з певною ймовірністю можуть статися;

• встановлення тимчасового порядку розташування подій, у яких є корисна і доступна інформація, і тих послідовних дій, які можна зробити.

Етап 2. Побудова дерева розв'язків.

Слід зазначити, що дерево рішень будується зліва направо, а розрахунки проводяться, навпаки, з правої сторони наліво.

Етап 3. Оцінка ймовірностей станів середовища.

Необхідно зіставити шанси виникнення кожної конкретної події (імовірності настання подій). Слід зазначити, що ці ймовірності визначаються або на підставі наявної статистики (проведення розрахунків), або експертним шляхом.

Етап 4. Встановлення виграшів (або програшів як виграшів зі знаком мінус).

Для кожної можливої комбінації альтернатив (дій) та станів середовища встановлюється величина виграшу чи програшу.

Етап 5. Розв'язання задачі.

Задача вирішується шляхом розрахунку очікуваної вартісної оцінки *EMV*. Критерій вибору найкращого рішення – максимум *EMV*.

Прямокутниками (□) позначимо вершини прийняття рішень, кружечками (○) позначимо неконтрольовані події - настання станів середовища, результати. Короткими паралельними лініями відсікатимуться ті гілки, які є менш сприятливими порівняно з іншими і можуть бути відкинуті.

Приклад побудови дерева рішення показано на рис. 6.2.

Окрім показника очікуваної вартісної оцінки *EMV* при прийнятті рішень в умовах ризику ще використовується показник очікуваної цінності достовірної інформації *EVPI*.

У разі ризику, як зазначалось, інформація визначається або виходячи з наявної статистики (проведення розрахунків), або експертним шляхом. Однак, на ринку є консультаційні фірми (фахівці у певній галузі діяльності), які за певну плату готові надати інформацію про фактичну ситуацію на ринку в той момент, коли ОПР має прийняти рішення.

Прийняття пропозиції залежить від співвідношення між очікуваною цінністю (результативністю) точної інформації та величиною запитаної плати за додаткову (істинну) інформацію, завдяки якій може бути скориговано ухвалення рішення, тобто початкова дія може бути змінена.

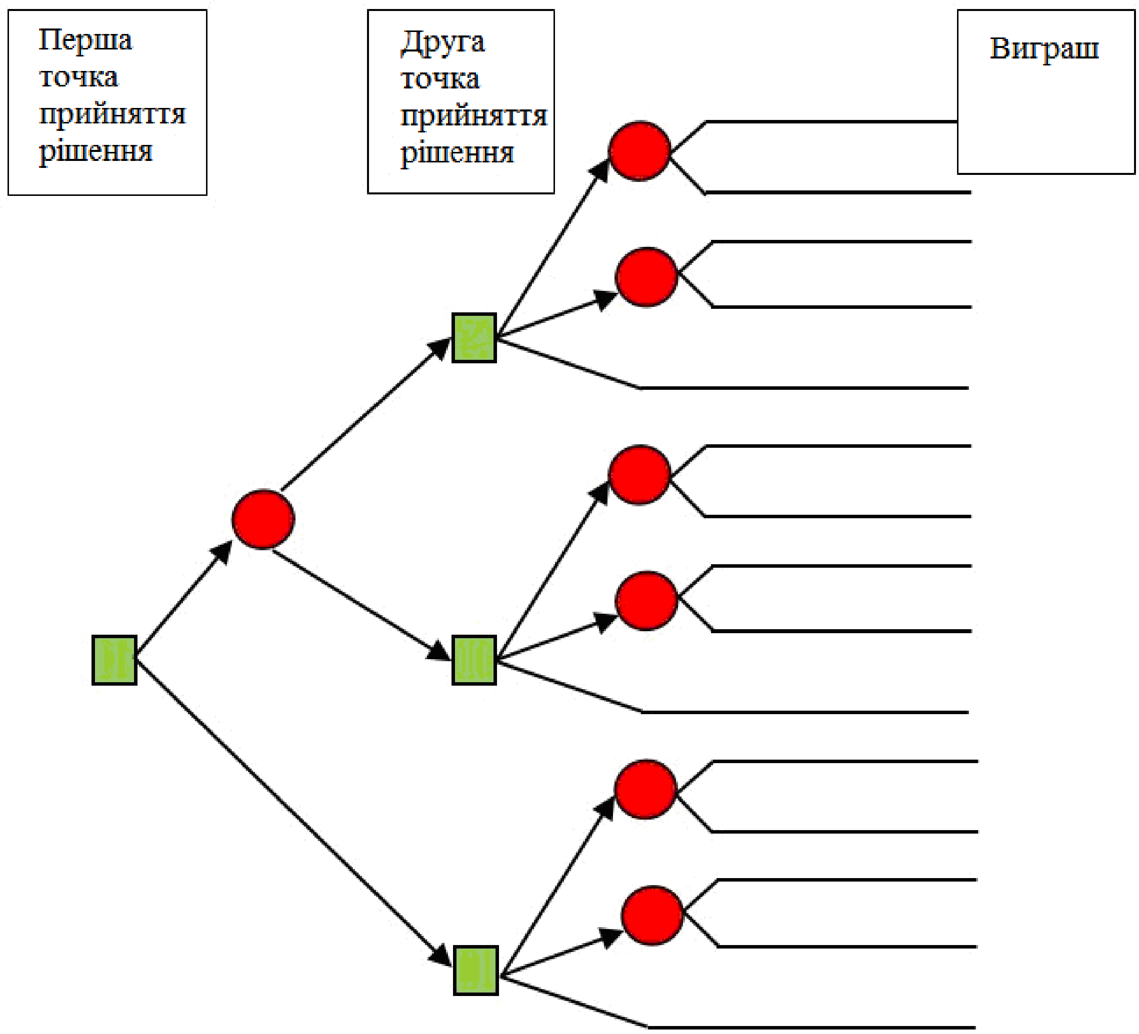


Рис. 6.2 – Приклад побудови дерева рішення

Очікуваною цінністю достовірної інформації EVPI (Expected Value of Perfect Information) назвемо різницю між виграшем за умов визначеності та виграшем за умов ризику.

Щоб визначити очікувану цінність достовірної інформації *EVPI*, спочатку необхідно розрахувати математичне очікування за умов визначеності, яке дорівнює очікуваному (чи середньому) доходу у разі, коли маємо достовірну інформацію перед тим, як прийняти рішення.

Очікуваний виграш за умов достовірної інформації визначається як:

$$\sum_{j=1}^{n} (\max_i a_{ij}) \cdot p_j$$

Очікуваний виграш в умовах ризику визначається як:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j$$

Таким чином, очікувана цінність достовірної інформації визначається за такою формулою:

$$EVPI = \sum_{j=1}^{n} (\max_i a_{ij}) \cdot p_j - \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j$$

Приклад.

Підприємець не знає, що робити. Він може відкрити у своїй аптеці або велику або маленьку секцію фітобара. Він може отримати додаткову інформацію про те, чи буде ринок вітамінних напоїв сприятливим чи ні. Ця інформація коштуватиме йому 3 млн. грн. Він вважає, що ця інформація виявиться сприятливою з ймовірністю 0,5. Якщо ринок буде сприятливим, то велика секція фітобару принесе прибуток 15 млн. грн., а маленька - 5 млн. грн. За несприятливого ринку він втратить 20 млн. грн. у разі, якщо він відкриє велику секцію, та 10 млн. грн. якщо маленьку. Не маючи додаткової інформації, цей підприємець оцінює ймовірність сприятливого ринку як 0,7. Позитивний результат обстеження гарантує сприятливий ринок із ймовірністю, що дорівнює 0,9. При негативному результаті ринок може бути сприятливим з ймовірністю 0,4. Потрібно визначити:

• чи потрібно отримати додаткову інформацію?

• чи слід відкрити велику секцію?

• якою є очікувана вартісна оцінка найкращого рішення?

Рішення.

Платіжна матриця для цієї задачі має вигляд:

	Сприятливий ринок	Несприятливий ринок
A_1 – велика секція	15	-20
A_2 – маленька секція	5	-10

Побудуємо дерево рішень. На рисунку покажемо можливі стани середовища і рішення, і ймовірності різних результатів обстеження і ймовірності наступу різних станів середовища.

Прямокутниками позначимо вершини прийняття рішень, кружечками позначимо неконтрольовані події - настання станів середовища.

Розрахуємо очікувані вартісні оцінки *EMV*. Для цього необхідно врахувати умову застосування додаткової інформації про те, чи буде ринок вітамінних напоїв сприятливим чи ні (рис. 6.3):

- чи можна отримати додаткову інформацію, чи можна не отримувати;
- якщо отримувати інформацію, то інформація може бути сприятливою чи ні;
- при тій та іншій інформації ми можемо вибрати велику чи маленьку секції;
- для кожної із секцій ринок може бути сприятливим чи ні.

Враховуючи це, розрахуємо відповідні виграші та програші, використовуючи платіжну матрицю та витрати на отримання додаткової інформації у 3 млн. грн. (рис. 6.4):

Не враховуючи додаткову інформацію

$$\begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$$

Враховуючи додаткову інформацію

$$\begin{pmatrix} 15-3 & -20-3 \\ 5-3 & -10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -23 \\ 2 & -13 \end{pmatrix}$$

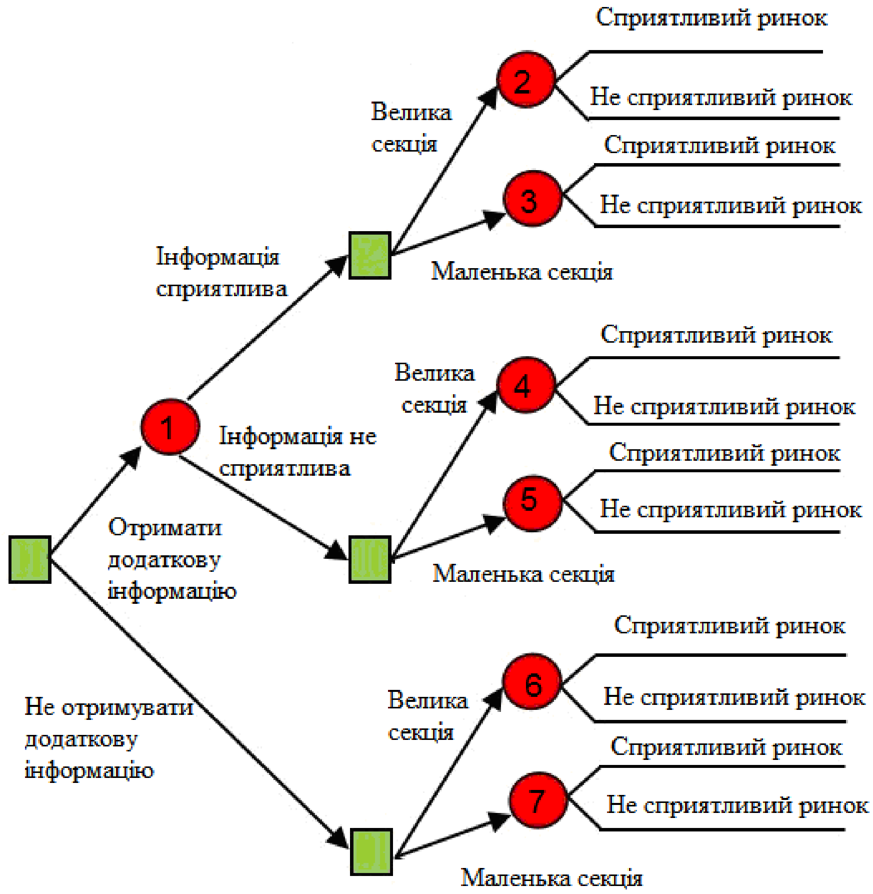


Рис. 6.3 – Побудова дерева рішення, частина 1

Позитивний результат обстеження гарантує *сприятливий ринок* із ймовірністю, що дорівнює 0,9. Отже, негативний результат матиме ймовірність 1-0,9 = 0,1. Ця інформація дозволить розрахувати для кожної вершини очікувані вартісні оцінки:

12*0,9 – 23*0,1 = 8,5 млн. грн.

2*0,9 – 13*0,1 = 0,5 млн. грн.

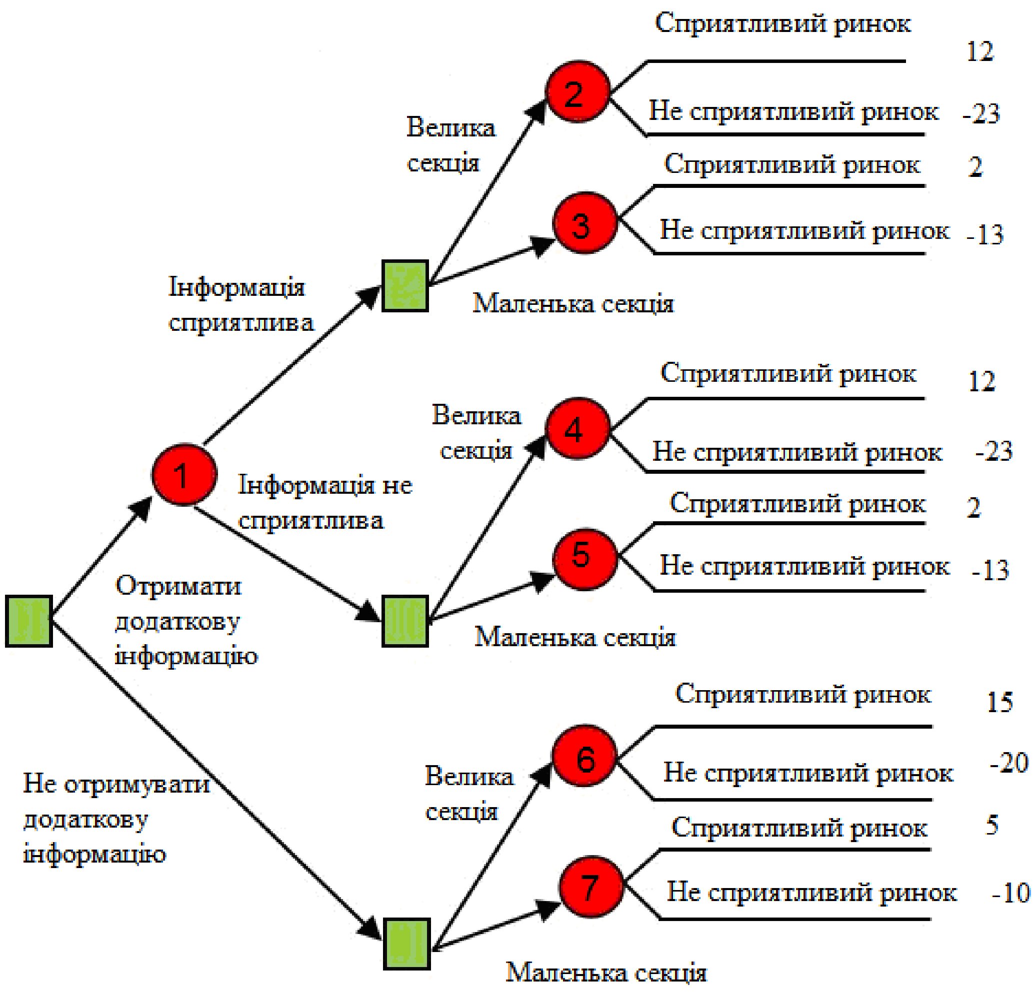


Рисунок 6.4 – Побудова дерева рішення, частина 2

Вибравши найбільше з очікуваних вартісних оцінок $max(8{,}5;\ 0{,}5) = 8{,}5$ отримаємо варіант (вершина) 2 (не відсікається), тобто необхідно отримати додаткову інформацію, при цьому інформація буде сприятливою і, отже, підприємець відкриватиме велику секцію. Варіант 3 у цьому випадку відсікатиметься, цьому варіанту відповідає, що необхідно отримувати додаткову інформацію, інформація несприятлива, підприємець відкриватиме малу секцію (рис. 6.5).

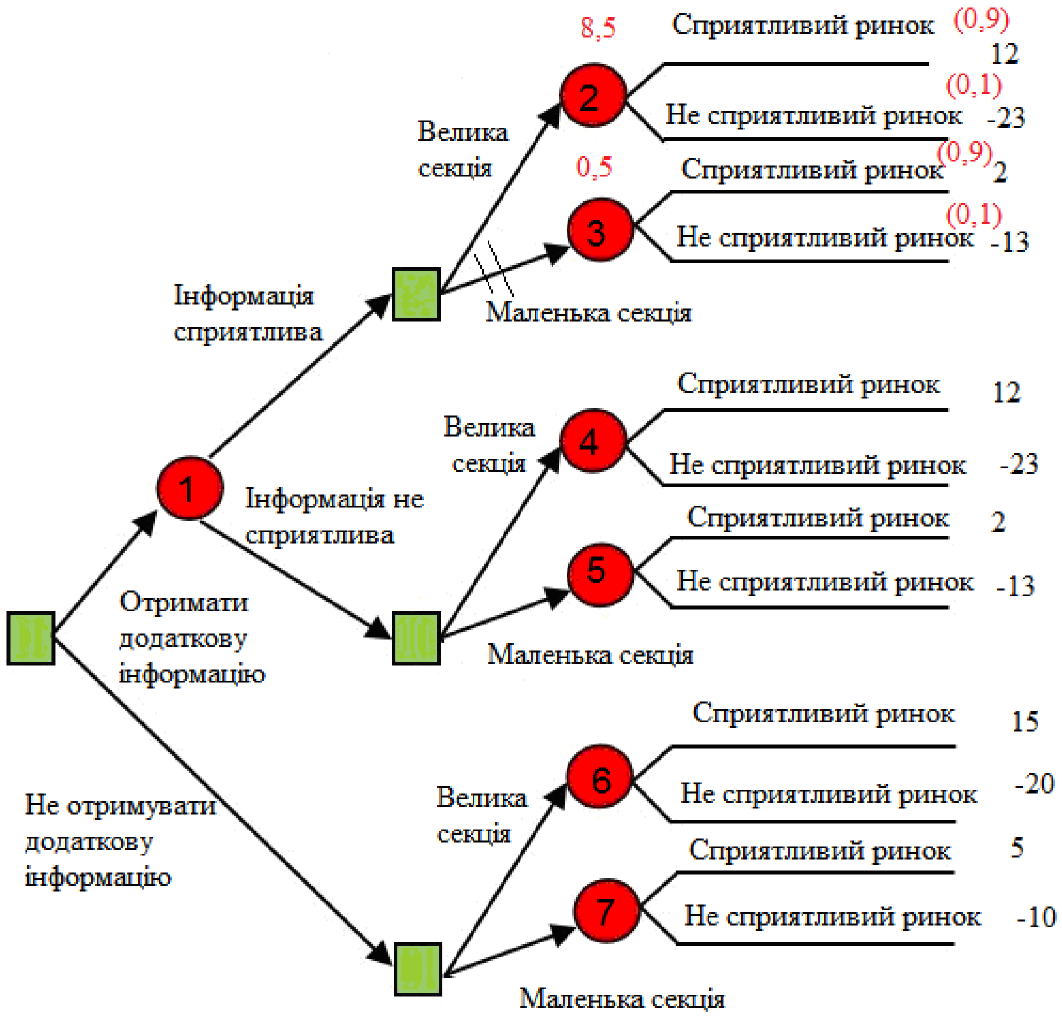


Рис. 6.5 – Побудова дерева рішення, частина 3

При негативному результаті ринок може бути сприятливим з ймовірністю 0,4. Тоді очікувані вартісні оцінки матимуть вигляд:

12*0,4 – 23*0,6 = -9 млн. грн.

2*0,4 – 13*0,6 = -7 млн. грн.

Вибравши найбільше очікуваних вартісних оцінок *max*(-9; -7) = -7, отримаємо варіант 5 (не відсікається), тобто необхідно отримати додаткову інформацію, за умови, що вона буде несприятливою і підприємець відкриває малу секцію. Варіант 4, якому відповідає варіант з отриманням додаткової інформації, яка буде несприятливою та підприємець відкриває велику секцію – відсікається. Дерево рішень у цьому випадку матиме вигляд (рис. 6.6):

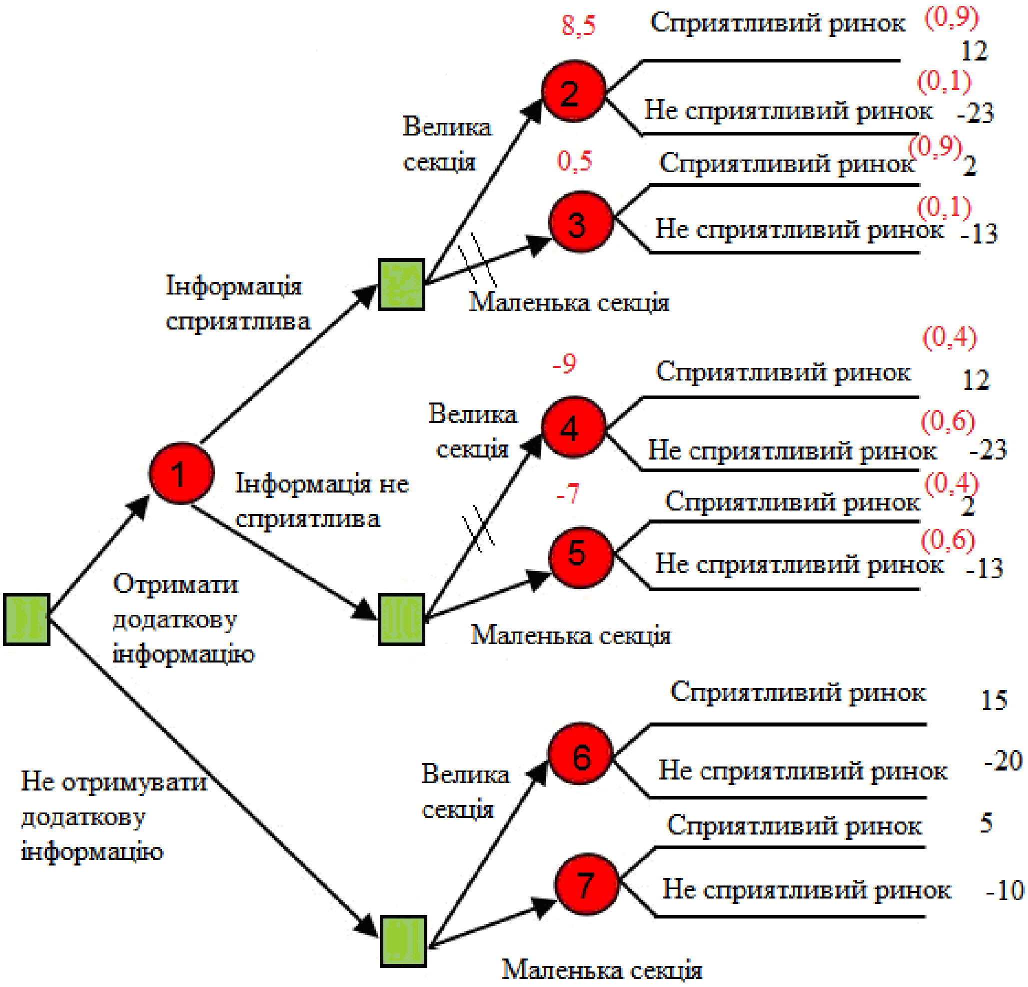


Рис. 6.6 – Побудова дерева рішення, частина 4

За умовою задачі за відсутності додаткової інформації підприємець оцінює ймовірність сприятливих умов ринку 0,7.

У цьому випадку очікувані вартісні оцінки матимуть вигляд:

15*0,7 – 20*0,3 = 4,5 млн. грн.

5*0,7 – 10*0,3 = 0,5 млн. грн.

Вибравши найбільшу з очікуваних вартісних оцінок *max*(4,5; 0,5) = 4,5, отримаємо варіант 6 (не відсікається), тобто не треба отримувати додаткову інформацію і підприємець відкриє велику секцію. Варіант 7, якому відповідає випадок, у якому не отримують додаткової інформації, та підприємець відкриває маленьку секцію – відсікається. Дерево рішень з урахуванням отриманих результатів для другої точки прийняття рішення матиме вигляд (рис. 6.7):

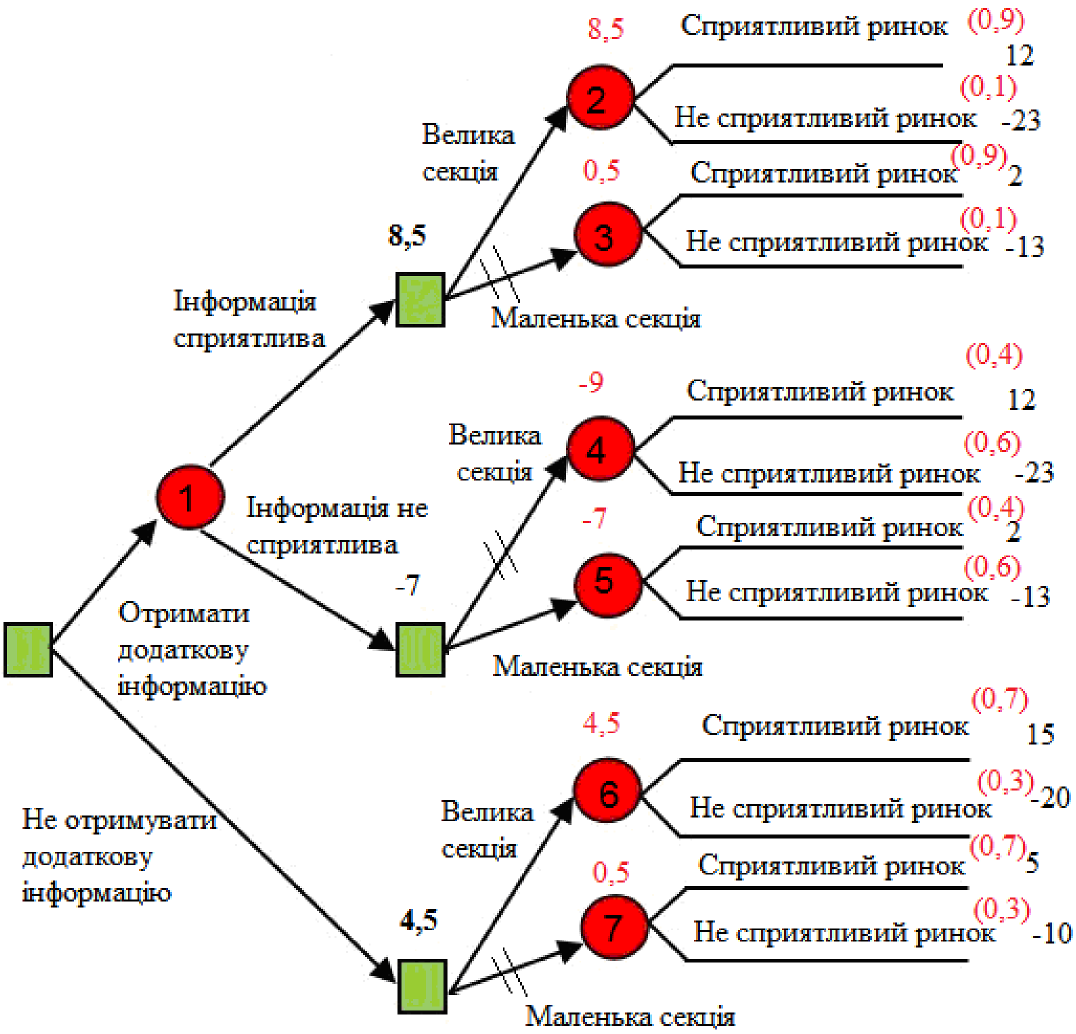


Рис. 6.7 – Побудова дерева рішення, частина 5

Перейдемо тепер до оцінки варіанта 1. Йому відповідає оцінка інформації – буде вона сприятливою чи ні. Підприємець вважає, що ця інформація виявиться сприятливою із ймовірністю 0,5. Тоді отримуємо для варіанта 1:

8,5*0,5 – 7*0,5 = 0,75 млн. грн.

Цьому відповідає варіант, коли варто отримувати інформацію.

У разі, коли додаткову інформацію не отримують, цей показник дорівнює 4,5 млн. грн., отже, він є кращим (рис. 6.8).

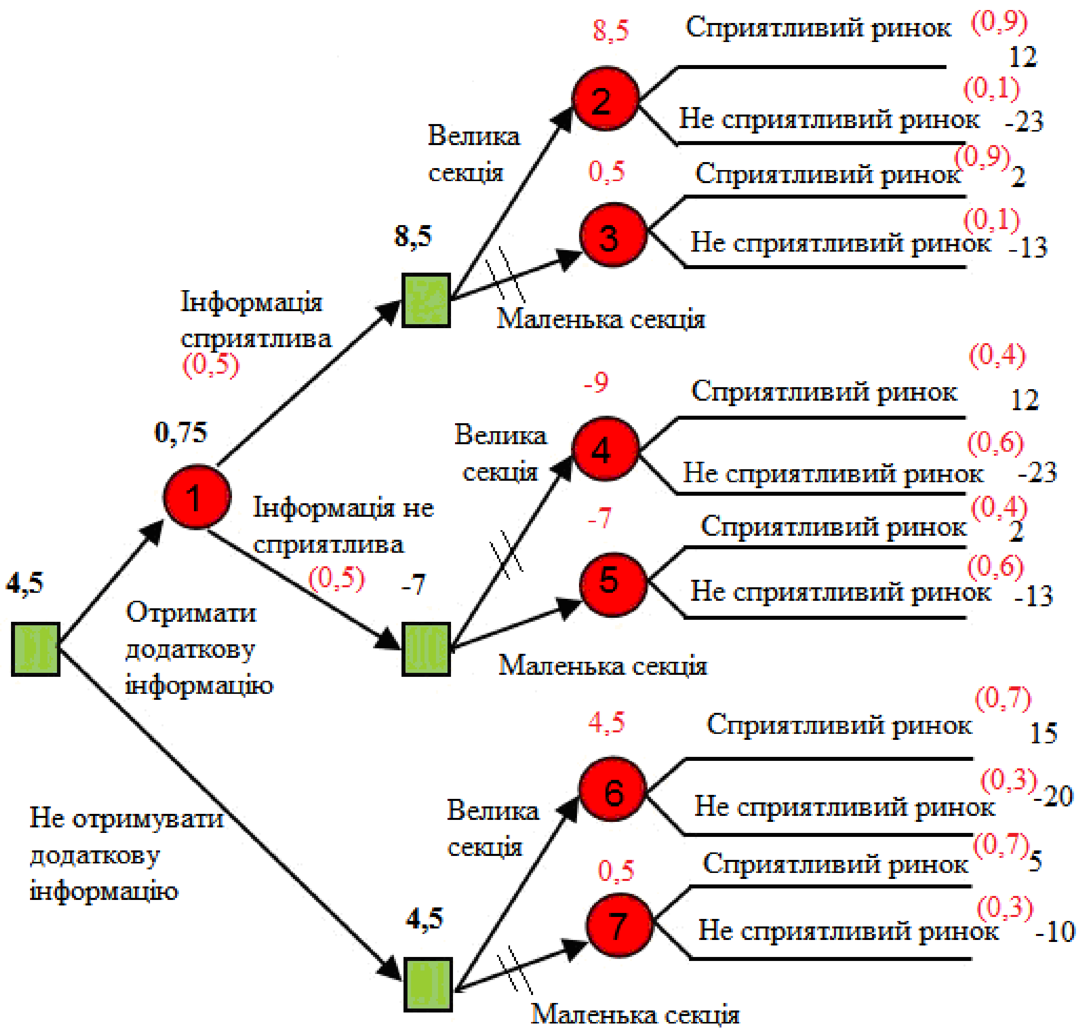


Рис. 6.8 – Побудова дерева рішення, частина 6

Висновок. Таким чином, не слід витрачати гроші на отримання додаткової інформації, при цьому слід відкривати велику секцію. Очікувана вартісна оцінка найкращого рішення для цього варіанту становитиме 4,5 млн. грн.

6.5 Байєсовський підхід до прийняття рішень. Апостеріорні ймовірності.

Розподіли ймовірностей, що використовують при формулюванні критерію очікуємого значення, отримують, як правило, з накопиченої раніше інформації. В деяких випадках можливо модифікувати ці ймовірності за допомогою поточної і/або отриманої раніше інформації, яка зазвичай ґрунтується на дослідженні вибіркових (або експериментальних) даних. Отримані при цьому ймовірності називають ***апостеріорними*** (або

Байєсовськими), на відміну від ***апріорних*** ймовірностей, отриманих з вихідної інформації.

Теорема. Нехай випадкова подія A може статися сумісно з однією з інших несумісних подій (гіпотез) $H_1,,...,H_N$, що утворюють повну групу, для яких відомі *апріорні* імовірності $P(H_i)$, i =1,...N, такі, що

$$\sum_{i=1}^{N} P(H_i) = 1 \tag{6.1}$$

Нехай також відомі умовні імовірності $P(A|Hi)$, i=1,...N події A з кожною з гіпотез.

Тоді, якщо в результаті експерименту встановлено, що подія A сталася, то *апостеріорна* імовірність i -ї гіпотези може бути визначена за формулою

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{N} P(H_i)P(A \mid H_i)}, \qquad i = 1,...,N. \tag{6.2}$$

Доведення. За означенням сумісну імовірність події A з гіпотезою H_i, i=1,...N можна записати у вигляді

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A \mid H_i) = P(A)P(H_i \mid A), \qquad i = 1,...,N. \tag{6.3}$$

З співвідношення (6.3) випливає, що

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}, \qquad i = 1,...,N. \tag{6.4}$$

Оскільки гіпотези H_i , i =1,...N несумісні та задовольняють умову (6.1), то за формулою повної імовірності маємо

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid H_i)P(H_i). \tag{6.5}$$

Підстановка (6.5) в (6.4) дає (6.2).

Теорема доведена.

Приклад 2. З медичної статистики відомо, що 1% жінок у сорокарічному віці хворіє на рак молочної залози. За даними медичної статистики встановлено також, що при проходженні профілактичного обстеження методом мамографії 80% жінок, у котрих дійсно є рак молочної залози, та 9,6% здорових жінок отримують позитивні результати діагностики – підозру на рак.

Під час проведення огляду *конкретна жінка* даної вікової групи отримала позитивний результат мамографії. Виникає питання: яка імовірність того, що у цієї пацієнтки насправді є рак молочної залози?

Цікаво, що тільки 15% лікарів дають правильну відповідь на це питання. Інші ж 85% дають невірну оцінку та вважають, що у пацієнтки імовірність раку молочної залози належить діапазону 70–90%, що досить далеко від правди!

Визначимо правильну оцінку за допомогою формули Байєса (6.5). Сформулюємо дві гіпотези:

H_1 – пацієнтка хворіє на рак;

H_2 – пацієнтка не хворіє на рак.

Нехай випадкова подія A полягає в тому, що мамографія *конкретної особи* надала позитивний результат.

Тоді за умовами задачі маємо апріорні імовірності гіпотез

$$P(H_1) = 0{,}01, \tag{6.6}$$

$$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0{,}99 \tag{6.7}$$

та умовні імовірності позитивного результату мамографії

$$P(A \mid H_1) = 0{,}8, \tag{6.8}$$

$$P(A \mid H_2) = 0{,}096. \tag{6.9}$$

Використовуючи формулу (6.2), за даними (6.6) – (6.9) визначимо *апостеріорну* імовірність наявності раку молочної залози при *позитивному* результаті мамографії

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}8}{0{,}01 \cdot 0{,}8 + 0{,}99 \cdot 0{,}096} = 0{,}0776.$$

Таким чином, правильна відповідь на поставлене питання така: імовірність того, що у пацієнтки насправді є рак молочної залози складає менше 8%, а не

70–90%, як це помилково вважає більшість лікарів на основі інтуїтивних міркувань.

Навіть з такого досить простого прикладу випливає висновок про важливість застосування байєсової стратегії для прийняття обґрунтованих рішень в умовах ризику. Рішення, які приймаються інтуїтивно, можуть призвести до великих помилок.

Приклад 3. Підприємство повинно зробити вибір: чи вводити нову технологію щодо розробки екологічно чистої продукції, чи ні. Введення нової технології підвищить вартість продукту, тому сумніву підлягає попит на такий продукт у населення та, відповідно, прибуток підприємства. Попит може бути таким: низький, середній, високий. Крім того, розвиток ринку не є прогнозованим, він може бути одним з таких: стихійний, збалансований, інтенсивній.

Вартість введення нової технології дорівнює 220 000 грн. Якщо нову технологію не вводити, то і затрат, пов’язаних з нею, не буде.

Витрати на випуск нової продукції складають 2 120 000 грн.

Існуючий дохід від випуску продукції складає 840 000 грн.

Очікуваний дохід внаслідок введення нової технології буде залежати від попиту на продукцію (низький, середній, високий) та напряму розвитку ринку (стихійний, збалансований, інтенсивній).

При низькому попиту очікуваний дохід буде складати 3 100 000 грн, при середньому – 3 200 000 грн, при високому – 3 500 000 грн.

Прибуток підприємства при різних варіантах попиту розрахуємо за наступною формулою:

Прибуток підприємства при різних варіантах попиту =
= Дохід внаслідок введення нової технології – Витрати на випуск нової продукції.

При низькому попиту прибуток складатиме:

3 100 000 грн – 2 120 000 грн = 880 000 грн.

При середньому попиту прибуток складатиме:

3 200 000 грн – 2 120 000 грн = 980 000 грн.

При високому попиту прибуток складатиме:

3 500 000 грн – 2 120 000 грн = 1 380 000 грн.

Маркетингові дослідження можуть дати додаткову інформацію, яка, однак, не зможе повністю відповісти на питання про попит на продукцію.

За даними маркетингових досліджень експертна оцінка ймовірності попиту при різних варіантах розвитку ринку наведена в табл. 6.2.

Таблиця 6.2. Експертна оцінка ймовірності попиту при відповідному розвитку ринку

Попит/Розвиток ринку	Низький попит	Середній попит	Високий попит
Стихійний	0,45	0,15	0,15
Збалансований	0,35	0,60	0,40
Інтенсивний	0,20	0,25	0,45

Апріорні вірогідності попиту на продукцію за даними експертів мають значення, наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3. Апріорні ймовірності попиту на продукцію за даними експертів

Низький попит	Середній попит	Високий попит
0,1	0,7	0,2

За плату 10000 грн можна провести додаткові маркетингові дослідження, які покажуть прогноз розвитку ринку.

Необхідно визначити апостеріорну імовірність попиту на продукцію при відповідному розвитку ринку. Для цього необхідно скористатися теоремою Байєса та деякими поняттями з теорії ймовірностей.

Події H_i – попит на продукцію (низький, середній, високий) (табл. 6.3) є несумісними та утворюють повну групу подій, тобто сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Випадкові події, щодо розвитку ринку та попиту на продукцію, є сумісними та залежними одна від одної, тому сумісну ймовірностей настання цих подій можна знайти за формулою:

$$P(A\times H_1) = P(A)\times P(H_j|A) = P(H_j)\times P(A|H_j),$$

де A – розвиток ринку (стихійний, збалансований, інтенсивний),

H_i – попит на продукцію (низький, середній, високий);

$P(A)$ – імовірність розвитку ринку;

$P(A|H_j)$ – умовна імовірність розвитку ринку A за умовою попиту H_i;

$P(H_j|A)$ – умовна імовірність попиту H_i за умовою розвитку ринку A.

Повну імовірність розвитку ринку $P(A)$ можна знайти за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\times P(A\,|\,H_i)$$

Обчислення представлено в таблиці 6.4

Таблиця 6.4. Сумісні ймовірності та повна ймовірність розвитку ринку

Попит/Розвиток ринку	Низький попит	Середній попит	Високий попит	Повна імовірність розвитку ринку
Стихійний	0,045	0,105	0,03	0,180
Збалансований	0,035	0,420	0,08	0,535
Інтенсивний	0,020	0,175	0,09	0,285

Апостеріорні ймовірністі попиту при відповідному розвитку ринку можна знайти за формулою Байєса (6.2).

Обчислення представлено в таблиці 6.5

Таблиця 6.5. Апостеріорні ймовірності попиту при відповідному розвитку ринку

Попит/Розвиток ринку	Низький попит	Середній попит	Високий попит
Стихійний	0,250000	0,583333	0,166667
Збалансований	0,065421	0,785047	0,149533
Інтенсивний	0,070175	0,614035	0,315789

Нижче побудовано дерево рішень (рис. 6.9).

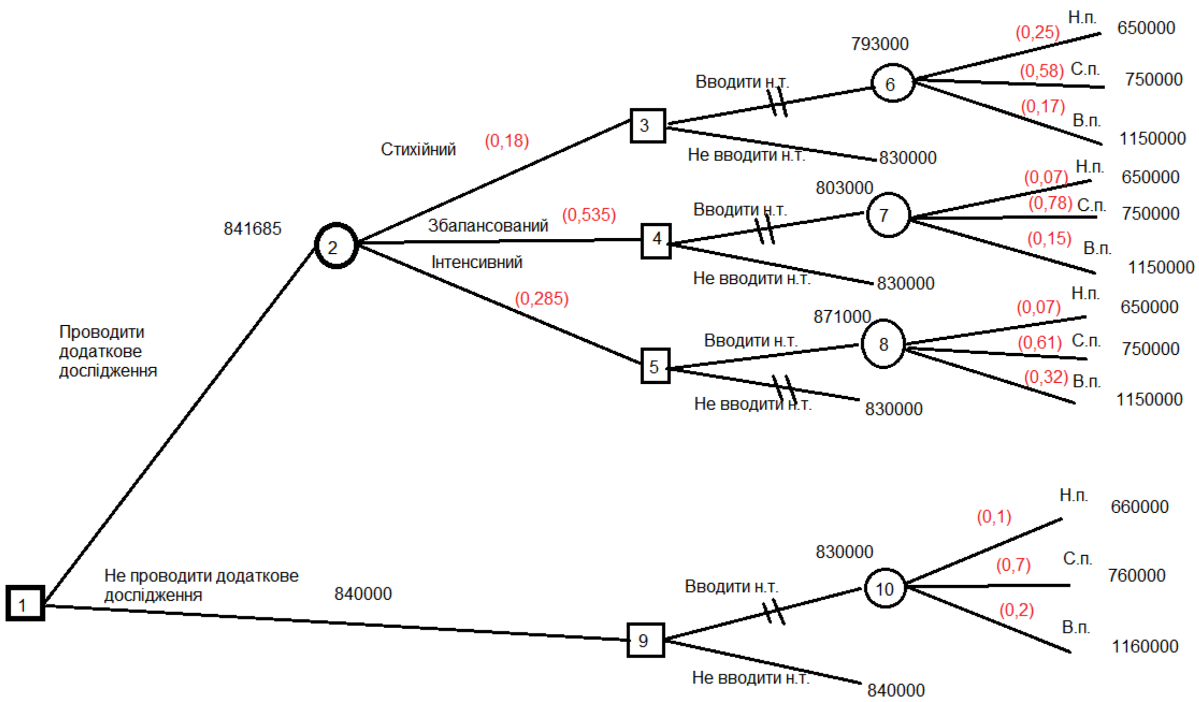


Рис. 6.9 – Дерево рішення

Проводити додаткове дослідження (10000) при введенні нової технології (220000).

	Низький попит	Середній попит	Високий попит
Проводити додаткове дослідження	880000 – 10000 – 220000 = 650000	980000 – 10000 – 220000 = 750000	1380000 – 10000 – 220000 =1150000
Не проводити додаткове дослідження	880000 – 220000 = 660000	980000 – 220000 = 760000	1380000 – 220000 =1160000

Отримано такий результат: якщо не проводити додаткові маркетингові дослідження, то не слід впроваджувати нову технологію виробництва.

Проведення додаткових маркетингових досліджень є доцільним. Воно підвищує ймовірність прийняти раціональне рішення щодо введення нової технології, оскільки дає можливість більш детально проаналізувати зв’язок між розвитком ринку та попитом на продукцію.

Додаткові дослідження показали, що введення нової технології доцільно тільки при інтенсивному розвитку ринку. При стихійному та навіть збалансованому розвитку ринку нову технологію вводити не слід.

6.6 Тести для самоконтролю знань

1. Виберіть правильні відповіді для прийняття рішень в умовах ризику

1) Кожна альтернатива пов'язана з множиною результатів, кожний з результатів має певну ймовірність появи, яку знає ОПР*
2) Кожна альтернатива пов'язана з множиною результатів, кожний з результатів має певну ймовірність появи, яку не знає ОПР
3) Кожна альтернатива пов'язана з множиною результатів, кожний з результатів має не відому ймовірність появи, сума всіх ймовірностей дорівнює 1

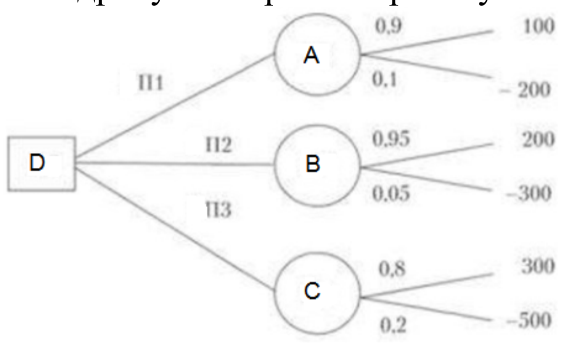
2. При прийнятті рішень в умовах ризику використовують

1) ймовірносні розподіли*
2) випадкові величини*
3) математичне очікування*

3. В платіжній матриці альтернативи вибирають

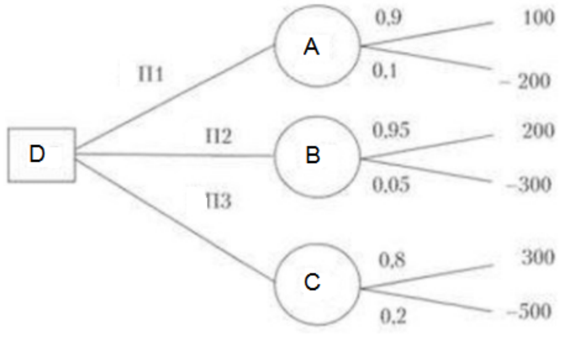
1) по рядках*
2) по стовпчиках

4. Підрахуйте вартість проєкту А:



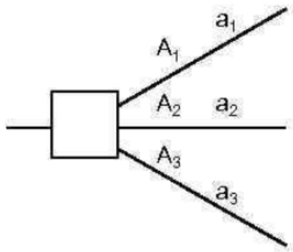
Відповідь: 70

5. Який проєкт з П1, П2, П3 найкращий для отримання максимальної вигоди?:



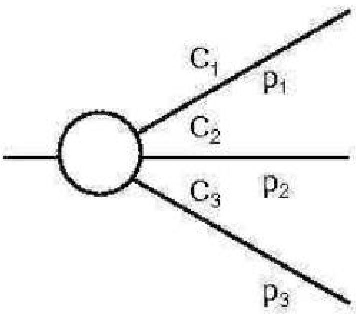
1) П1
2) П2*
3) П3

6. На рисунку зображено:



1) Вузол рішення, альтернативи, величини затрат, пов’язані з прийняття рішення*
2) Вузол події, випадкові результати, ймовірності відповідних невизначеностей

7. На рисунку зображено:

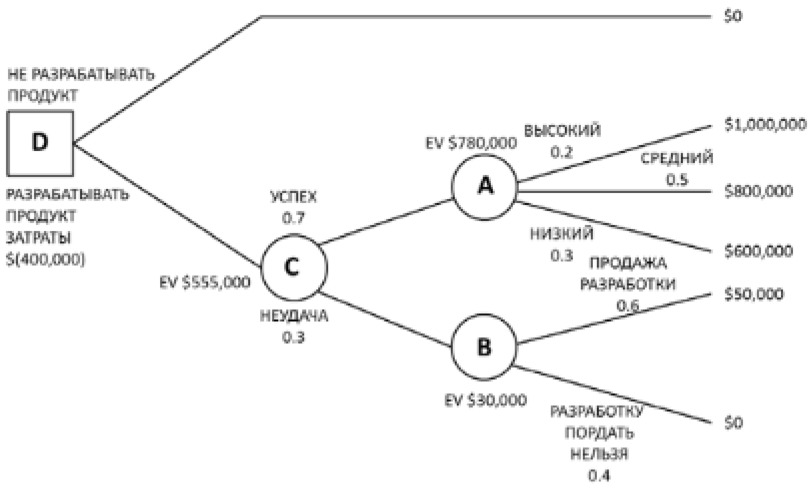


1) Вузол рішення, альтернативи, величини затрат, пов’язані з прийняття рішення
2) Вузол події, випадкові результати, ймовірності відповідних невизначеностей*

8. Що таке очікувана вартісна оцінка *EMV*?

1) Оцінка вартості ресурсів, які потрібні для виконання робіт, передбачених проєктом
2) Оцінка ймовірної вартості ресурсів, які будуть потрібні для виконання робіт, передбачених проєктом*
3) Середня вартість ресурсів, передбачених проєктом
4) Максимальна оцінка вартості ресурсів, які будуть потрібні для виконання робіт, передбачених проєктом

9. Чому дорівнює очікуване значення прибутку?



Відповідь: $155,000

10. Критерій максимуму очікуваного середнього виграшу пов'язаний з

1) очікуваною вартісною оцінкою *EMV**
2) очікуваною цінністю достовірної інформації *EVPI*
3) з двома показниками одночасно *EMV* і *EVPI*

Тема 7.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

7.1 Матриця платежів в умовах невизначеності

Прийняття рішень за умов невизначеності, як й у умовах ризику, вимагає визначення альтернативних дій, яким відповідають платежі, залежні від (випадкових) станів природи.

Матрицю платежів в задачі прийняття рішень з можливими діями (альтернативами) і станами природи можна представити наступним чином (табл. 7.1)

Таблиця 7.1. Матриця платежів в задачі прийняття рішень

	s_1	s_2	…	s_n
a_1	v(a_1, s_1)	v(a_1, s_2)	…	v(a_1, s_n)
a_2	v(a_2, s_1)	v(a_2, s_2)	…	v(a_2, s_n)
…	…	…	…	…
a_m	v(a_m, s_1)	v(a_m, s_2)	…	v(a_m, s_n)

Елемент a_i представляє i-е можливе рішення (альтернативу), а елемент s_j - j-й стан природи. Плата (або дохід), пов'язана з рішенням a_i і станом s_j, дорівнює $v(a_i, s_j)$.

Відмінність між прийняттям рішень в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності ймовірнісний розподіл, що відповідає різним станам, або невідомий, або не може бути визначений.

Практикуються два основних підходи до прийняття рішення в умовах невизначеності.

1. Особа, яка приймає рішення, може використовувати наявну в неї інформацію та власні особисті судження, а також досвід для ідентифікації та визначення суб'єктивних ймовірностей можливих зовнішніх умов, а також оцінки результатів віддач для кожної наявної

стратегії в кожній зовнішній умові. Це, по суті, робить умови невизначеності аналогічними умовам ризику, а процедура прийняття рішення, що обговорювалася раніше для умов ризику, виконується й у цьому разі.

2. Якщо ступінь невизначеності занадто високий, то особа, яка приймає рішення, воліє не робити припущень щодо ймовірностей різних зовнішніх умов, тобто ця особа може або не враховувати ймовірності, або розглядати їх як рівні, що практично одне й те саме.

7.2 Критерії прийняття рішення в умовах невизначеності

Якщо застосовується другий підхід, то для оцінки передбачуваних стратегій є чотири критерії рішення:

- Критерій Лапласа.
- Мінімаксний критерій.
- Критерій Севіджа.
- Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються за рівнем консерватизму, який виявляє особа, яка приймає рішення.

7.2.1 Критерій Лапласа

Вихідну задачу можна розглядати як задачу прийняття рішення в умовах, коли всі можливі стани середовища вважаються рівноправними, а ймовірності рівні одна одній. Цей підхід до рішення використовується в критерії "недостатньої підстави" Лапласа.

Принцип недостатньої підстави свідчить, що, оскільки розподіл ймовірностей станів $P(s_i)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що ймовірності усіх станів природи рівні між собою, тобто

$$P(s_1) = P(s_2) = \ldots = P(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Для кожної альтернативи підраховується математичне очікування виграшу і вибирається та альтернатива, для якої величина цього виграшу максимальна.

Якщо при цьому $v(a_i,\ s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то найкращим рішенням є те, яке забезпечує

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\}$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє витрати особи, яка приймає рішення, то оператор "max" змінюється на "min".

Приклад.

Використовуючи критерій Лапласа, визначити оптимальну альтернативу для умов, заданих у таблиці

Альтернатива	Платіжна матриця			
	s_1	s_2	s_3	s_4
A_1	6	6	6	4
A_2	25	7	7	-15
A_3	10	20	7	-1
A_4	19	16	9	-2
A_5	20	15	15	-3

Рішення.

Для заданих вихідних даних знаходимо

$L(A_1)$ = (6+6+6+4)/4=5,5

$L(A_2)$ = (25+7+7 -15)/4=6,0

$L(A_3)$ = (10+20+7 -1)/4=9,0

$L(A_4)$ = (19+16+9 -2)/4=10,5

$L(A_5)$ = (20+15+15 -3)/4=11,75

Отже, оптимальна альтернатива A_5, має максимальне значення очікуваної вигоди.

Гіпотеза про рівноймовірність станів зовнішнього середовища є досить штучною, тому принцип Лапласа можна користуватися лише в обмежених випадках.

7.2.2 Максимінний критерій

Максимінний критерій (критерій Вальда) ґрунтується на консервативній обережній поведінці особи, яка приймає рішення, та розглядає зовнішні умови як примхливі та недоброзичливі.

Отже, за цим критерієм необхідно визначити найгірший із можливих результатів кожної альтернативи, а потім вибрати альтернативу, яка обіцяє найкращий із найгірших результатів.

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє одержуваний прибуток, то відповідно до максимінного критерію в якості оптимального вибирається рішення, що забезпечує

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє втрати, використовується мінімаксний критерій, який визначається наступним співвідношенням

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}$$

Приклад. Використовуючи критерій Вальда, визначити оптимальну альтернативу для умов, заданих у таблиці

Альтернатива	Платіжна матриця			
	s_1	s_2	s_3	s_4
A_1	6	6	6	4
A_2	25	7	7	-15
A_3	10	20	7	-1
A_4	19	16	9	-2
A_5	20	15	15	-3

Рішення.

Для кожної альтернативи вибираємо за відповідним рядком таблиці мінімальне значення платежу:

$W(A_1) = \min\{6, 6, 6, 4\}=4$

$W(A_2) = \min\{25, 7, 7, -15\}=-15$

$W(A_3) = \min\{10, 20, 7, -1\}=-1$

$W(A_4) = \min\{19, 16, 9, -2\}=-2$

$W(A_5) = \min\{20, 15, 15, -3\}=-3$

Далі з отриманих мінімальних значень вибираємо максимальне:

$W = \max\{4, -15, -1, -2, -3\} = 4$

Отже, оптимальною за критерієм Вальда є альтернатива A_1.

7.2.3 Критерій Севіджа

Критерій Севіджа, який іноді називається критерієм *мінімаксних втрат*, досліджує збитки, які є понесеними втратами в результаті прийняття неправильного рішення. Втрата вимірюється як абсолютна різниця між віддачею для даної альтернативи та віддачею для найбільш ефективної альтернативи в межах одного й того ж стану зовнішніх умов.

Суть вимірювання втрат. Якщо будь-який зовнішній стан виникає в майбутньому і якщо ми вибрали альтернативу, яка забезпечує максимальну віддачу для цього стану, то ми не рахуємо втрати. Але якщо ми вибрали будь-яку іншу стратегію, то втрата є різницею між тим, що відбувається фактично, і тим, що ми отримали б, прийнявши оптимальне рішення.

Матриця втрат необхідна для їхнього підрахунку, і вона є модифікацію платіжної матриці. У межах кожного стовпця (зовнішній стан) найбільший платіж віднімається з кожного наступного платежу в стовпці (включаючи саму себе). Абсолютна різниця між позиціями (без урахування знака) є вимірюванням втрат.

Приклад. Для платіжної матриці, поданої у таблиці, побудувати матрицю втрат. Визначити найкращу альтернативу за критерієм Севіджа

Альтернатива	Платіжна матриця			
	s_1	s_2	s_3	s_4
A_1	6	6	6	4
A_2	25	7	7	-15
A_3	10	20	7	-1
A_4	19	16	9	-2
A_5	20	15	15	-3

Рішення.

У кожному стовпчику платіжної матриці знаходимо максимальний платіж і віднімаємо його значення з усіх платежів цього стовпця (включаючи себе). Абсолютне значення отриманої різниці записуємо у відповідну клітину матриці втрат. В результаті отримуємо матрицю.

Альтернатива	Матриця втрат				Максимальні втрати
	s_1	s_2	s_3	s_4	
A_1	19	14	9	0	19
A_2	0	13	8	19	19
A_3	15	0	8	5	15
A_4	6	4	6	6	6
A_5	5	5	0	7	7

З цієї таблиці випливає, що коли зовнішній стан виявляється рівним s_1, а особа, яка приймає рішення, вибирає альтернативу A_2, то втрат немає, тому що було обрано правильну стратегію.

Однак якщо обрано альтернативу A_1, то втрати вимірюються як $|6 - 25| = 19$, якщо A_3, то втрати рівні $|10 - 25| = 15$ тощо.

Після заповнення матриці втрат визначаються максимальні втрати для кожної альтернативи. Потім вибирається альтернатива із найнижчими максимальними втратами. З останньої таблиці випливає, що оптимальною альтернативою є A_4, тому що вона мінімізує максимальне «покарання» за невірно визначений зовнішній стан.

Зауважимо, що особа, яка приймає рішення, при використанні критерію Севіджа явно відмовляється від спроб максимізувати платіж, вибираючи альтернативу із задовільним платежем при більш низькому ризику.

7.2.4 Критерій Гурвиця

При виборі альтернативи замість двох крайнощів в оцінці ситуації логічно дотримуватися деякої проміжної позиції, що враховує можливість як найгіршого, так і найкращого, сприятливого зовнішнього стану. Такий компромісний варіант було запропоновано Гурвіцем.

Відповідно до цього підходу для кожної альтернативи необхідно визначити лінійну комбінацію мінімального та максимального платежу та вибрати ту альтернативу, для якої ця величина виявиться найбільшою:

$$H = \max_i \left\{ \alpha \max_i a_{ij} + (1-\alpha) \min_j a_{ij} \right\},$$

де α - «ступінь оптимізму», $0 \le \alpha \le 1$.

Ступінь оптимізму визначає міру відповідальності: чим серйознішими є наслідки помилкових рішень, тим ближче до нуля ступінь оптимізму α.

Приклад. Для платіжної матриці, представленої в таблиці, визначити оптимальну альтернативу, використовуючи критерій Гурвіця. Ступінь оптимізму прийняти рівним 0,7.

Альтернатива	Платіжна матриця			
	s_1	s_2	s_3	s_4
A_1	6	6	6	4
A_2	25	7	7	-15
A_3	10	20	7	-1
A_4	19	16	9	-2
A_5	20	15	15	-3

Рішення.

Складемо таблицю, в яку помістимо максимальне та мінімальне значення платежу та середнє зважене найменшого та найбільшого результатів для кожного рядка.

Альтернатива	Платіж		Вага		H
	max	min	×0,7	×0,3	
A_1	6	4	4,2	1,2	5,4
A_2	25	-15	17,5	-4,5	13,0
A_3	20	-1	14,0	-0,3	13,7
A_4	19	-2	13,3	-0,6	12,7
A_5	20	-3	14,0	-0,9	13,1

Найбільший середньозважений платіж визначає вибір оптимальної альтернативи – це альтернатива $A_{3.}$

7.3 Тести для самоконтролю знань

1. Серед критеріїв вибору оптимального рішення при іграх із природою найбільш обережним (з мінімальним ризиком) є:

1) Лапласа
2) Севіджа
3) Вальда*
4) Гурвіця

2. Дана матриця виграшів гри з природою:

	S1	S2	S3
A1	22	18	19
A2	21	19	20
A3	27	13	21
A4	15	16	28

Чи вірно те, що оптимальною стратегією відповідно до критерію Лапласа буде стратегія А3?

1) Вірно*
2) Невірно

3. Дана матриця виграшів гри з природою:

	S1	S2	S3
A1	22	18	19
A2	21	19	20
A3	27	13	21
A4	15	16	28

Знайти оптимальну стратегію відповідно до мінімаксного критерію

1) А1
2) А2*
3) А3
4) А4

4. Дана матриця виграшів гри з природою:

	S1	S2	S3
A1	22	18	19
A2	21	19	20
A3	27	13	21
A4	15	16	28

Знайти оптимальну стратегію відповідно до критерію Гурвіця ($\alpha = 0.15$)

1) A1
2) A2
3) A3
4) A4*

5. Дана матриця виграшів гри з природою:

	S1	S2	S3
A1	22	18	19
A2	21	19	20
A3	27	13	21
A4	15	16	28

Знайти оптимальну стратегію відповідно до критерію Севіджа

1) A1
2) A2
3) A3*
4) A4

6. Сільськогосподарське підприємство може реалізувати певну продукцію:
A1) відразу після збирання;
A2) у зимові місяці;
A3) у весняні місяці.
Прибуток залежить від ціни реалізації в цей період часу, витратами на зберігання та можливих втрат. Розмір прибутку, розрахований для різних станів-співвідношень доходу та витрат (S1, S2 та S3), протягом усього періоду реалізації, представлений у вигляді матриці (млн. грн.)

	S1	S2	S3
A1	2	-3	7
A2	-1	5	4
A3	-7	13	-3

Визначити найбільш вигідну стратегію за критерієм Лапласа

1) A1
2) A2*
3) A3

7. Сільськогосподарське підприємство може реалізувати певну продукцію:
A1) відразу після збирання;
A2) у зимові місяці;
A3) у весняні місяці.
Прибуток залежить від ціни реалізації в цей період часу, витратами на зберігання та можливих втрат. Розмір прибутку, розрахований для різних станів-співвідношень доходу та витрат (S1, S2 та S3), протягом усього періоду реалізації, представлений у вигляді матриці (млн. грн.)

	S1	S2	S3
A1	2	-3	7
A2	-1	5	4
A3	-7	13	-3

Визначити найбільш вигідну стратегію за критерієм Вальда (максимінним)

1) A1
2) A2*
3) A3

8. Сільськогосподарське підприємство може реалізувати певну продукцію:
A1) відразу після збирання;
A2) у зимові місяці;
A3) у весняні місяці.
Прибуток залежить від ціни реалізації в цей період часу, витратами на зберігання та можливих втрат. Розмір прибутку, розрахований для різних станів-співвідношень доходу та витрат (S1, S2 та S3), протягом усього періоду реалізації, представлений у вигляді матриці (млн. грн.)

	S1	S2	S3
A1	2	-3	7
A2	-1	5	4
A3	-7	13	-3

Визначити найбільш вигідну стратегію за критерієм Гурвіца ($\alpha = 0.4$)

1) A1
2) A2
3) A3*

9. В платіжній матриці

	s_1	s_2	…	s_n
a_1	$v(a_{1,}s_1)$	$v(a_{1,}s_2)$	…	$v(a_{1,}s_n)$
a_2	$v(a_{2,}s_1)$	$v(a_{2,}s_2)$	…	$v(a_{2,}s_n)$
…	…	…	…	…
a_m	$v(a_{m,}s_1)$	$v(a_{m,}s_2)$	…	$v(a_{m,}s_n)$

1) m альтернатив*
2) n станів природи*
3) n альтернатив
4) m станів природи

10. Які існують критерії для прийняття рішення в умовах невизначеності?

1) Критерій Лапласа*
2) Критерій Вальда*
3) Критерій Севіджа*
4) Критерій Гурвіця*
5) Критерій Парето
6) Критерій Белмана

Тема 8.
Прийняття рішень в умовах конфлікту

8.1 Поняття конфлікту і конфліктної ситуації

Конфліктною називають ситуацію, коли не збігаються інтереси двох або більше сторін.

Конфлікт може бути:

- антагоністичним, коли виграш однієї сторони досягають завдяки програшу протилежної;
- неантагоністичним, коли інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні повністю співпадаючими, наприклад, конфлікт студента та викладача на екзамені.

Розумно вирішувати конфліктні ситуації та не вибирати крайні форми поведінки, якщо це можливо. Для цього потрібно вміти формально описувати конфлікт (побудувати модель) і провести її аналіз.

На описовому рівні конфлікти є предметом вивчення науки конфліктології, яка досліджує закономірності виникнення, розвитку, вирішення і завершення конфліктів будь-якого рівня.

Так, наприклад, встановлено, що всі види вирішення конфліктів між людьми зводяться до 5 способів і визначаються 4 видами дій учасників, що відображено на сітці Томаса-Кілмана (рис. 8.1).

Рисунок. 8.1. Стилі поведінки людини в конфліктних ситуаціях

Конфронтація виникає, коли:

- результат вирішення конфлікту дуже важливий;
- критична ситуація;
- немає іншого вибору;
- є влада і авторитет.

Ухилення виникає, коли:

- результат не дуже важливий;
- відчуття можливості вирішити конфлікт на свою користь;
- складність самої ситуації;
- необхідно виграти час;
- немає достатніх ресурсів (влади).

Співпраця можлива, коли:

- сторони взаємозалежні;
- рівність влади над ситуацією (відсутність лідера) ;
- є можливість узгодити свої інтереси з інтересами іншої сторони.

Пристосування можливе, коли:

- конфлікт не дуже хвилює;
- бажання зберегти мир;
- розуміння своєї неправоти;
- мало шансів на перемогу;
- розуміння проблем іншої сторони.

Компроміс можливий, коли:

- сторони бажають швидко вирішити конфлікт;
- сторони прагнуть отримати хоча б щось можливе з ситуації;
- інші підходи вирішення конфлікту неефективні.

8.2 Відмінність теорії ігор від конфліктології

Таким чином, конфліктологія дає змогу, на змістовному рівні, класифікувати конфліктні ситуації, визначити взаємозв'язок дій (стратегій) сторін з мотивацією цих дій та зв'язати потенційно можливий результат вирішення конфлікту з обраною стратегією поведінки.

На відміну від конфліктології, теорія ігор – це математична дисципліна, яка вивчає формальні аспекти конфлікту, а саме:

- математичні моделі конфліктних ситуацій;
- методи аналізу моделей конфліктних ситуацій;
- формальні стратегії оптимальної поведінки в умовах конфлікту.

Історія теорії ігор як самостійної дисципліни починається в 1944 році, коли Джон фон Нейман та Оскар Моргенштерн опублікували книгу "Теорія ігор та економічна поведінка" (Theory of Games and Economic Behavior).

8.3 Матричні ігри із нульовою сумою. Платіжна матриця гри

В багатьох практичних задачах виникають ситуації, коли потрібно прийняти рішення, не маючи достатньої інформації. Невідомими може бути як умови здійснення будь-якої операції, і свідомі дії осіб, від яких залежить успіх цієї операції.

Ситуації, в яких стикаються інтереси двох сторін і результат будь-якої операції, що здійснюється однією із сторін, залежить від дій іншої сторони, називаються ***конфліктними***.

Математична модель конфліктної ситуації називається ***грою***, а математична теорія, що допомагає приймати раціональні рішення у конфліктній ситуації, - ***теорією ігор***.

Конфліктуючі сторони називаються ***гравцями***, а дії, які можуть виконувати гравці, є ***стратегіями***. Кожний гравець має не менш ніж дві стратегії (якщо у нього тільки одна стратегія, то він фактично на приймає участі в грі, тому що заздалегідь відомо, що він зробить).

Результат гри називається ***виграшем***.

Прикладами формалізованих ігор можуть бути футбол, карткова гра, шахи.

В економіці модель поведінки гравців виникає, наприклад, коли кілька фірм прагнуть зайняти вигідніше місце на ринку, кілька осіб намагаються поділити між собою якесь благо (ресурси, фінанси) так, щоб кожному дісталося якомога більше. Гравцями у конфліктних ситуаціях економіки, які можна моделювати як ігри, є фірми, банки, окремі люди та інші економічні агенти. У свою чергу, в умовах війни модель гри використовується, наприклад, у виборі кращої зброї (з наявної або потенційно можливої) для розгрому противника або захисту від нападу.

Для гри характерна *невизначеність* результату. Причини невизначеності можна розподілити за такими групами:

- комбінаторні (як у шахах);
- вплив випадкових факторів (як у грі "орел або решка", кістки, карткові ігри);
- стратегічні (гравець не знає, до якої дії вдасться противник).

8.4 Класифікація ігор

8.4.1 Класифікація за кількістю гравців (гра двох і більше осіб). Ігри двох осіб посідають центральне місце у всій теорії ігор. Основним поняттям теорії ігор для гри двох осіб є узагальнення дуже істотної ідеї рівноваги, яка природно з'являється в іграх двох осіб. Що ж до ігор *n* осіб, то одна частина теорії ігор присвячена іграм, у яких співпраця між гравцями заборонена. В іншій частині теорії ігор *n* осіб передбачається, що гравці можуть співпрацювати для взаємної користі (некооперативні та кооперативні ігри).

8.4.2 Класифікація за кількістю гравців та його стратегіям (число стратегій щонайменше дві, можливо дорівнює нескінченності).

8.4.3 Класифікація за кількістю інформації щодо минулих ходів: ігри з повною інформацією та неповною інформацією. Нехай є гравець 1 – покупець і гравець 2 – продавець. Якщо гравець 1 не має повної інформації про дії гравця 2, то гравець 1 може і не розрізнити дві альтернативи, між якими йому належить зробити вибір. Наприклад, вибираючи між двома видами деякого товару і не знаючи про те, що за деякими ознаками товар А гірший за товар В, гравець 1 може не бачити відмінності між альтернативами.

8.4.4 Класифікація за принципами розподілу виграшу: кооперативні, коаліційні з одного боку та некооперативні, безкоаліційні з іншого боку. У некооперативній грі, або інакше – безкоаліційній грі, гравці обирають стратегії одночасно, не знаючи, яку стратегію вибере другий гравець. Комунікація між гравцями неможлива. У кооперативній грі, або інакше – коаліційній грі, гравці можуть об'єднуватися в коаліції та вживати колективних дій, щоб збільшити свої виграші.

8.4.5 Кінцева гра двох осіб з нульовою сумою або антагоністична гра – це стратегічна гра з повною інформацією, у якій беруть участь сторони із протилежними інтересами. Антагоністичними іграми є матричні ігри.

Матричною грою називається гра, що здійснюється за такими правилами:

- У грі беруть участь два гравці;
- Кожен із гравців має кінцевий набір стратегій;
- Гра полягає в тому, що кожен із гравців, не маючи інформації про дії противника, робить один хід (вибирає одну зі своїх стратегій). Результатом вибору гравцями стратегій є виграш та програш у грі.
- І виграш, і програш виражаються числами.

Матрична гра називається ***грою з нульовою сумою***, якщо у цій грі виграш одного гравця дорівнює програшу іншого гравця.

Правила матричної гри визначає *платіжна матриця*, елементи якої – виграші першого гравця, які є також програшами другого гравця.

Матрична гра є *антагоністичною* грою. Перший гравець отримує максимальний гарантований (не залежить від поведінки другого гравця) виграш, що дорівнює ціні гри, аналогічно, другий гравець досягає мінімального гарантованого програшу.

Під *стратегією* розуміється сукупність правил (принципів), що визначають вибір варіанта дій при кожному особистому ході гравця в залежності від ситуації, що склалася.

Метою теорії ігор є визначення оптимальної стратегії кожного гравця. Визначити таку стратегію – значить вирішити гру. *Оптимальність стратегії* досягається, коли один із гравців повинен отримати максимальний виграш, при тому що другий дотримується своєї стратегії. А другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії.

Кожна матрична гра із нульовою сумою має ***платіжну матрицю***.

Для того щоб побудувати цю матрицю, позначимо одного з гравців символом A, а іншого символом B, і припустимо, що A_1, A_2, ..., A_m - стратегії, які може застосовувати гравець A, а B_1, B_2, ..., B_n - стратегії, які може застосовувати гравець B.

Матрична гра, у якій гравець A має m стратегій, а гравець B - n стратегій, називається ***грою типу*** $m \times n$.

Розглянемо матрицю C (табл. 8.1)

Таблиця 8.1. Платіжна матриця $m \times n$ гри

Наші рішення	Рішення супротивника				
	B_1	B_2	B_3	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	…	c_{mn}

у якої елементи c_{ij}, ($i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$) дорівнюють виграшам гравця A (і програшам гравця B) при застосуванні гравцями стратегій A_i та B_j відповідно. Матриця C називається ***платіжною матрицею гри***.

Приклад 8.1. Гравці A і B, не дивлячись на рішення один одного, кладуть на стіл монети сторонами Герб і Цифра. Правило гри таке:

- А виграє, якщо сторони монет однакові,
- В виграє (А програє), якщо сторони монет різні.

Складемо платіжну матрицю (табл. 8.2).

Таблиця 8.2. Платіжна матриця гри для гравців А та В

Рішення гравця A	Рішення гравця B	
	B_1 (Герб)	B_2 (Цифра)
A_1 (Герб)	1	-1
A_2 (Цифра)	-1	1

Проведемо аналіз гри:

1. Для одноразової гри розумних стратегій немає (шанси виграти гравців однакові).

2. Для багаторазової гри вже є шанс виграти.

3. Безглуздо застосовувати одну й ту ж стратегію, наприклад A_1, тому що за кількома ходами супротивник її легко «визначить».

4. Нерозумно чітко чергувати стратегії, тому що про таку «стратегію» гри теж легко здогадатися.

5. Шанс виграти підвищується, якщо застосовувати змішану стратегію, коли чисті стратегії A_1 і A_2 чергуються випадковим чином, наприклад так

$$A_1\ A_2\ A_2\ A_1\ A_1\ A_2\ A_1\ A_2\ A_2\ A_2\ A_2\ A_1\ \ldots$$

Приклад 8.2. Кожен з гравців A і B, не дивлячись на рішення один одного, обирає одне з трьох цілих чисел – 1, 2 або 3. Правило гри таке:

- А виграє, якщо сума чисел парна, і він отримає цю суму,
- В виграє, якщо сума чисел непарна, і А програє цю суму.

Складемо платіжну матрицю гри (табл. 8.3).

Таблиця 8.3. Платіжна матриця гри

Рішення гравця A	Рішення гравця B		
	B_1 (число 1)	B_2 (число 2)	B_3 (число 3)
A_1 (число 1)	2	-3	4
A_2 (число 2)	-3	4	-5
A_3 (число 3)	4	-5	6

Аналіз гри показує, що:

1. На будь-яку стратегію, обрану *A*, його супротивник *B* може відповісти найкращим для нього чином:

- на хід A_1 відповісти ходом B_2;
- на хід A_2 відповісти ходом B_3;
- на хід A_3 відповісти ходом B_2.

2. Якщо *B* знає, який хід зробив *A*, то *B* неодмінно виграє.

3. Сукупність оптимальних (найбільш вигідних) стратегій обох гравців (коли вони не знають про хід один одного) зводиться до застосування змішаної стратегії, яка буде розглянута далі.

8.5 Нижня та верхня ціна гри. Принцип мінімаксу

Оптимальною будемо називати стратегію, яка з багаторазовими повторами забезпечить даному гравцю максимально можливий середній виграш або мінімально можливий середній програш.

При побудові оптимальної стратегії гравець вважає, що його супротивник теж розумний і робить все, щоб завадити нашому виграшу.

У даному випадку не враховуються елементи ризику та можливі помилки кожного з гравців. Рішення гри (виграш або програш) зводиться до одного числа – ***ціни гри***.

Повернемось до табл. 8.1 та визначимо як побудувати оптимальну стратегію з чистими ходами обох супротивників.

Якщо гравець *A* обирає стратегію A_i , він повинен передбачити, що гравець *B* теж розумний і прийме стратегію B_j , при якій наш виграш c_{ij} буде мінімальним.

Тобто маємо передбачити, що на кожне рішення A_i супротивник *B* прийме рішення (табл. 8.4)

$$\alpha_i = \min_j c_{ij} .$$

Таблиця 8.4. Визначення стратегії гравця *A* за платіжною матрицею

Наші рішення	Рішення супротивника				$\alpha_i = \min\limits_j c_{ij}$
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	α_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	α_m

Розраховуючи на розумного супротивника і діючи найбільш обережно ми маємо вибрати ту зі стратегій, для якої число α_i буде максимальним, тобто

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij} . \tag{8.1}$$

Величина α зветься ***нижньою ціною гри*** (***максміном***). Дотримуючись максмінної стратегії нам гарантований виграш не менше, ніж нижня ціна гри для *будь-якої* поведінки супротивника, хід якого заздалегідь не знаємо.

Для обчислення нижньої ціни гри α згідно з (8.1) достатньо знайти максимальний елемент у правому стовпчику табл. 8.4.

Розглянемо тепер, які рішення має приймати гравець *B* (наш супротивник), щоб мінімізувати свій програш.

Якщо гравець *B* обирає стратегію B_j, то він міркує так: розумний гравець *A* прийме таку стратегію A_i, щоб число c_{ij} було максимальним, тобто відповідало максимальному виграшу *A* і максимальному програшу *B*. Звідси випливає, що гравець *B* передбачає, що на кожне його рішення B_j гравець *A* приймає рішення

$$\beta_j = \max_i c_{ij} .$$

Розраховуючи на розумного противника і діючи найбільш обережно гравець *B* має вибрати ту зі своїх стратегій, для якої число β_j буде мінімальним, тобто

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij} . \qquad (8.2)$$

Величина β, що визначають за умовою (8.2), зветься ***верхньою ціною гри*** або ***мінімаксом***. Дотримуючись мінімаксної стратегії гравець B (наш супротивник) гарантує, що його програш не перевищить число β (верхню ціну гри) для будь-яких наших дій, про які він може не знати.

Для обчислення верхньої ціни гри β достатньо знайти мінімальний елемент у нижньому рядку табл. 8.5.

Таблиця 8.5. Визначення стратегії гравця B за платіжною матрицею

Наші рішення	Рішення супротивника			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}
$\beta_j = \max_i c_{ij}$	β_1	β_2	…	β_n

У табл. 8.6 подано приклад розрахунку нижньої α та верхньої β цін гри для конкретної платіжної матриці.

Таблиця 8.6. Визначення нижньої та верхньої цін гри

Наші рішення	Рішення супротивника				$\alpha_i = \min_j c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	2	3	**2**
A_2	8	1	9	-4	-4
A_3	-6	3	5	4	-6
$\beta_j = \max_i c_{ij}$	8	7	9	**4**	

В даному випадку нижня ціна гри дорівнює α = 2, що відповідає *максимінної* стратегії A_1 гравця А, а верхня ціна гри дорівнює β = 4 , що відповідає *мінімаксній* стратегії B_4 гравця В.

Таким чином, основний принцип розглянутих стратегій – обережна гра в розрахунку на розумну поведінку протилежної сторони, яка гравцям гарантує виграш і програш у межах цін гри α та β.

Зауважимо, що для будь-яких чисел c_{ij} нижня ціна гри не перевищує верхню ціну гри, тобто справедливе співвідношення,

$$\min_j \max_i c_{ij} \geq \max_i \min_j c_{ij}, \qquad (8.3)$$

або

$$\beta \geq \alpha . \qquad (8.4)$$

8.6 Ігри з сідловою точкою

Згідно з умовою (8.4) в матричній грі можливі дві ситуації:

- нижня ціна гри строго менше верхньої:

$$\alpha < \beta,$$

- нижня та верхня ціни гри співпадають:

$$\alpha = \beta. \qquad (8.5)$$

Умова (8.5) означає, що матрична гра має ***сідлову точку***.

Нагадаємо, що в математиці сідлова точка – це стаціонарна (критична) точка з області визначення функції, у якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, але ця точка не є локальним екстремумом.

Для функції $H(i, j)$ двох змінних i, j, яка має сідлову точку i^0, j^0, справедлива умова

$$H(i^0, j) \leq H(i, j) \leq H(i, j^0) \ \forall i \neq i^0, \forall j \neq j^0.$$

Графік такої неперервної функції $H(i, j)$ нагадує сідло: поверхня $H(i, j)$ опукла в одному напрямку та увігнута в іншому (рис. 8.1).

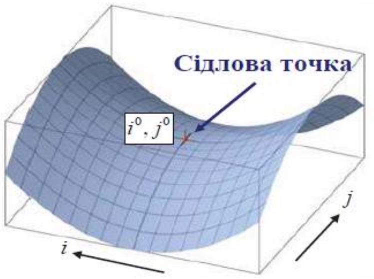


Рис. 8.1. Графік функції $H(i, j)$ з сідловою точкою i^0, j^0

Якщо матриця гри має сідлову точку, то відхилення від стратегії в цій точці будь-яким з гравців погіршує його результат. Тобто оптимальне рішення *для обох гравців* – стратегія гри в сідловій точці.

В такому випадку значення $V = \alpha = \beta$ називається ***ціною гри***.

Розглянемо для гри з сідловою точкою такий елемент платіжної матриці $c_{i^0 j^0}$, який відповідає мінімаксним стратегіям A_{i^0} і B_{j^0}. Цей елемент одночасно є мінімальним в своєму рядку і максимальним в своєму стовпцю, і виконуються рівняння

$$V = \alpha = \max_{1 \le i \le m} c_{ij^0} = \min_{1 \le j \le n} c_{i^0 j} = \beta .$$

Отже, виконується рівняння $c_{i^0 j^0} = V$.

Елемент платіжної матриці $c_{i^0 j^0}$ називається ***сідловою точкою***.

В цьому випадку ***матрична гра має рішення у чистих стратегіях***.

Приклад.

Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	9	2	1
A_2	7	8	5	6
A_3	4	7	3	5
A_4	5	6	1	7

Знайти нижню та верхню ціну гри. Чи має матрична гра сідлову точку?

Рішення.

Правіше від платіжної матриці випишемо найменші елементи в рядках та вкажемо максимальний з них. Внизу матриці запишемо найбільші елементи в стовпцях та вкажемо мінімальний з них.

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	9	2	1	1
A_2	7	8	**5**	6	**5**
A_3	4	7	3	5	3
A_4	5	6	1	7	1
	7	9	**5**	7	

Нижня ціна гри $\alpha = 5$.

Верхня ціна гри $\beta = 5$.

Нижня ціна гри співпадає з верхньою ціною гри $V = \alpha = \beta = 5$.

Ціна гри дорівнює значенню сідлової точки $c_{23} = 5$.

Максимінна стратегія ігрока A – друга чиста стратегія A_2.

Мінімаксна стратегія ігрока B – третя чиста стратегія B_3.

Ця матрична гра має рішення в чистих стратегіях.

Теорема 1. Якщо (i_1, j_1) та (i_2, j_2) – дві сідлові точки, то існують «симетричні» сідлові точки (i_1, j_2) та (i_2, j_1), причому виграші (програші) гравців у всіх сідлових точках однакові (рис. 8.2):

$$c(i_1, j_1) = c(i_2, j_2) = c(i_1, j_2) = c(i_2, j_2).$$

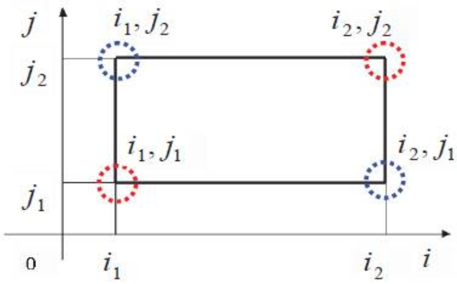


Рис. 8.2. Симетричні сідлові точки

(без доведення).

На рис. 8.3 подано приклад платіжної матриці з чотирма сідловими точками.

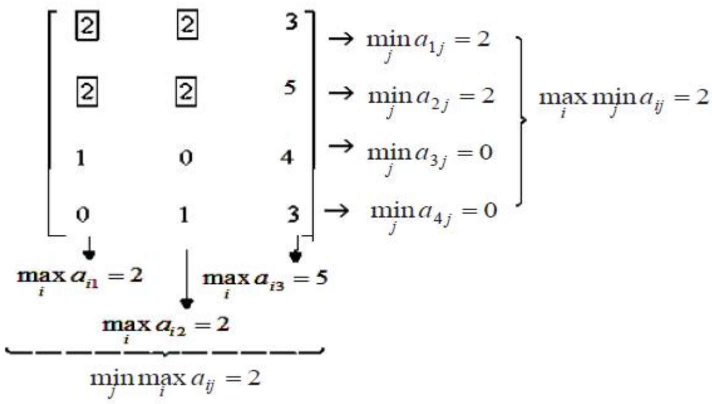


Рис. 8.3. Приклад платіжної матриці з чотирма сідловими точками

Таким чином можна зробити такі загальні висновки:

1. Якщо в матричній грі є сідлова точка, то оптимальні стратегії обох гравців однакові – стратегії у сідловій точці, а ціна гри відома і дорівнює чистій ціні гри $V = \alpha = \beta$.

2. Якщо за наявністю сідлової точки один з гравців буде притримуватись оптимальної стратегії, а другий гравець, у надії підвищити свій виграш, буде

відхилятися від неї, то він може тільки втратити, але не збільшити свій виграш.

3. Матриця гри може містити кілька сідлових точок.

4. Виграші у всіх сідлових точках однакові.

5. Якщо дві сідлові точки лежать у різних рядках і стовпчиках, то знайдуться ще дві «симетричні» сідлові точки.

6. Не у всіх платіжних матрицях є сідлова точка.

7. Гру з сідловою точкою рідко зустрічають на практиці: найчастіше нижня і верхня ціни гри різняться, тобто $\alpha < \beta$.

8. У випадку відсутності сідлової точки для підвищення шансів середнього виграшу ходи гравців повинні включати не тільки чисті стратегії, що ґрунтуються на мінімаксі та максиміні, але й випадкові ходи, тобто доцільно будувати змішані стратегії.

8.7 Тести для самоконтролю знань

1. Конфлікт може бути

1) антагоністичним*
2) неантагоністичним*
3) конфронтаційним

2. Теорія ігор

1) вивчає математичні моделі конфліктних ситуацій*
2) вивчає методи аналізу моделей конфліктних ситуацій*
3) вивчає формальні стратегії оптимальної поведінки в умовах конфлікту*
4) вивчає та класифікує конфліктні ситуації

3. Виберіть правильне твердження:

1) Кожний гравець має не менш ніж дві стратегії*
2) Кожний гравець має не більш ніж дві стратегії

4. Ігри бувають:

1) кооперативні*
2) некооперативні*
3) з повною інформацією*
4) з неповною інформацією*
5) коаліційні*
6) безкоаліційні*
7) антагоністичні*
8) неантагоністичні
9) матричні*
10) векторні
11) з нульовою сумою*
12) з ненульовою сумою

5. Елементи платіжної матриці

1) тільки позитивні числа
2) тільки позитивні числа і нуль
3) негативні числа і позитивні числа
4) позитивні числа, негативні числа і нуль*

6. Нижня ціна гри – це

1) максимін*
2) мінімакс

7. У випадку відсутності сідлової точки

1) Задачу можна вирішити в чистих стратегіях
2) Задачу не можна вирішити в чистих стратегіях*
3) Задачу не можна вирішити

8. Знайти нижню ціну гри з платіжною матрицею

3	2	1	4
10	4	3	10
-2	4	10	2

Відповідь: 3

9. Знайти верхню ціну гри з платіжною матрицею

3	2	1	4
10	4	3	10
-2	4	10	2

Відповідь: 3

10. Максимінною стратегією є стратегія

	B1	B2	B3	B4
A1	3	2	1	4
A2	10	4	3	10
A3	-2	4	10	2

1) A1
2) A2*
3) A3

Тема 9.
Методи розв’язування матричної гри в змішаних стратегіях

9.1 Гра без сідловок точки. Змішані стратегії

Розглянемо матричну гру, платіжну матрицю якої представлено в табл. 9.1.

Таблиця 9.1. Приклад платіжної матриці для гри з нульовою сумою

Наші рішення	Рішення супротивника				$\alpha_i = \min_j c_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	1	3	1
A_2	8	1	9	-4	-4
A_3	5	-6	3	3	-6
A_4	8	4	-2	4	-2
A_5	-6	3	5	5	-6
$\beta_j = \max_i c_{ij}$	8	7	9	5	

З табл. 9.1 випливає, що нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij} = 1,$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij} = 5,$$

тобто нижня ціна гри ***відрізняється*** від верхньої ціни гри , гра є грою без сідлової точки.

Максимінною є стратегія A_1. Мінімаксною є стратегія B_4.

Для будь-якої гри без сідлової точки виконується умова $\alpha < \beta$.

- Якщо партнери грають лише *один раз*, то гравцям доцільно дотримуватися *принципу мінімаксу*, як у *грі з сідловою точкою*, так і у *грі без сідлової точки*.

- У разі *багаторазового повторення гри з сідловою точкою* гравцям також доцільно дотримуватись *принципу мінімаксу*.
- Якщо ж *багаторазово* повторюється *гра без сідлової точки*, то постійне використання мінімаксних стратегій стає *невигідним*.

Виникає питання: як обирати стратегії, щоб для багаторазової гри наш середній виграш $V_{ср}$ перевищував нижню ціну, тобто щоб

$$V_{ср} > \alpha.$$

Покажемо, що для цього слід застосовувати *змішані стратегії* – тобто чергувати чисті стратегії

$$A_i\ ,\ i=1,...,m$$

з певним співвідношенням частот p_i (табл. 9.2).

Таблиця 9.2. Розподіл ймовірностей (частот) чистих стратегій для гравця A

Чисті стратегії	A_1	A_2	…	A_m
Частоти	p_1	p_2	…	p_m

$$p_i \geq 0, \quad i=1,...,m\,,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\,.$$

Величина p_i називається *ймовірністю* (*частотою*) застосування стратегії A_i.

Гравцю В для покращення результату також слід чергувати чисті стратегії B_j, $j=1,...,n$.

Таблиця 9.3. Розподіл ймовірностей (частот) чистих стратегій для гравця B

Чисті стратегії	B_1	B_2	…	B_n
Частоти	q_1	q_2	…	q_n

$$q_j \geq 0, \quad j=1,...,n\,,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\,.$$

Величина q_j називається *ймовірністю* (*частотою*) застосування стратегії B_j.

Стратегія гравця A, яку позначають

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_m \\ p_1 & \ldots & p_m \end{pmatrix}$$

і застосовують чисті стратегії A_1, A_2, …, A_m , чередуючи їх за випадковим законом з ймовірностями p_1, p_2, …, p_m, називається *змішаною стратегією гравця A.*

Стратегія гравця B, яку позначають

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & B_n \\ q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix}$$

і застосовують чисті стратегії B_1, B_2, …, B_n , чередуючи їх за випадковим законом з ймовірностями q_1, q_2, …, q_n, називається *змішаною стратегією гравця B.*

Зауважимо, що чисту стратегію можна вважати особливим випадком змішаної стратегії, коли таку стратегію застосовувати з частотою - одиниця, а інші – з нульовою частотою.

Змішані стратегії, обрані гравцями, називаються ***оптимальними***, якщо одностороннє відхилення будь-яким гравцем від своєї оптимальної стратегії може змінити середній виграш тільки у бік, невигідний для цього гравця.

Сукупність, що складається з оптимальної стратегії одного гравця та оптимальної стратегії іншого гравця, називається ***рішенням гри***.

Середній виграш V при застосуванні обома гравцями оптимальних стратегій називається ***ціною гри***.

Чисту стратегію називають ***активною*** (***корисною***), якщо її використовують у деякій оптимальній змішаній стратегії з ненульовою імовірністю.

9.2 Теорема фон Неймана

У 1928 році фон Нейманом була доведена основна теорема теорії кінцевих антогонічних ігор (*Теорема фон Неймана*), яка стверджує, що

кожна кінцева матрична гра має принаймні одне оптимальне рішення, можливо, серед змішаних стратегій.

Оскільки всі чисті стратегії є окремими випадками змішаних стратегій, то з основної теореми теорії ігор можна отримати

Наслідок 1. Будь-яка гра має ціну.

Наслідок 2. Ціна гри задовольняє нерівності $\alpha \le V \le \beta$.

Наслідок 3. Середній виграш залишається рівним ціні гри, якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, а інший гравець застосовує свої корисні стратегії з будь-якими частотами.

9.3 Методи спрощення платіжної матриці

Враховуючи те, що платіжна матриця визначає виграші гравця A та програші гравця B, введемо такі означення.

Рядок i_1 платіжної матриці C ***домінує*** над рядком i_2, якщо

$$c_{i_1 j} \ge c_{i_2 j}, \quad \forall j = 1,\dots,n$$

та існує стратегія гравця B, що відповідає стовпчику j_0, така, що

$$c_{i_1 j_0} > c_{i_2 j_0}.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку стратегія гравця A, що відповідає рядку i_1 *заздалегідь краща* стратегії, що відповідає рядку i_2 (забезпечує більший виграш), і *друга стратегія може бути видалена з платіжної матриці*.

Аналогічно визначають домінування стовпчиків.

Стовпчик j_1 платіжної матриці ***домінує*** за стовпчик j_2, якщо

$$c_{ij_1} \le c_{ij_2}, \quad \forall i = 1,\dots,m$$

та існує стратегія гравця A, що відповідає рядку i_0, така, що

$$c_{i_0 j_1} < c_{i_0 j_2}.$$

Зрозуміло, що в такому випадку стратегія гравця B, що відповідає стовпчику j_1 *заздалегідь краща* стратегії, що відповідає стовпчику j_2 (забезпечує менший програш), і *друга стратегія може бути видалена з платіжної матриці*.

Також платіжні матриці можуть бути спрощені, якщо з них видалити

- один зі співпадаючих рядків i_1 або i_2 , коли

$$c_{i_1 j} = c_{i_2 j}, \quad \forall j = 1,...,n$$

- один зі співпадаючих стовпчиків j_1 або j_2 , коли

$$c_{ij_1} = c_{ij_2}, \quad \forall i = 1,...,m.$$

Зрозуміло, що рішення за початковою та спрощеною платіжними матрицями будуть співпадати.

Приклад 9.1. Спростимо платіжну матрицю (табл. 9.2).

Таблиця 9.2. Початкова платіжна матриця

Чисті стратегії гравця *A*	Чисті стратегії гравця *B*			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

По рядкам:

Видаляємо рядок 2, тому що $c_{1j} \geq c_{2j}, \quad \forall j = 1,2,3,4.$

Видаляємо рядок 3, тому що $c_{1j} = c_{2j}, \quad \forall j = 1,2,3,4.$

В результаті платіжна матриця приймає вигляд (табл. 9.3).

Таблиця 9.3. Спрощена платіжна матриця після кроку 1

Чисті стратегії гравця *A*	Чисті стратегії гравця *B*			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

По стовпчикам:

З табл. 9.3 видаляємо стовпчик 3, тому що $c_{14} < c_{13}$ та $c_{44} < c_{34}$.

Спрощена таблиця приймає остаточний вигляд (табл. 9.4).

Таблиця 9.4. Кінцева таблиця після спрощення за кроками 1 та 2

Чисті стратегії гравця A	Чисті стратегії гравця B		
	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Таким чином, тепер можна аналізувати не початкову платіжну матрицю 4×4, а спрощену матрицю 2×3, що спрощує задачу.

9.4 Порядок розв'язування матричної гри 2×2 в змішаних стратегіях.

Припустимо, що платіжна матриця гри (табл. 9.5) не має сідлової точки, тобто нижня ціна гри менше верхньої $\alpha < \beta$.

Таблиця 9.5. Платіжна матриця гри 2×2

Стратегії гравця A	Стратегії гравця B	
	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	c_{22}

Знайдемо оптимальну стратегію гравця A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

яка для будь-яких дій супротивника забезпечує гравцю A максимальний середній виграш, що дорівнює ціні гри V.

За означенням, стратегія гравця A буде оптимальною, якщо незалежно від ходу супротивника середній виграш A дорівнює ціні гри V, тобто

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{21}p_2 = V \\ c_{12}p_1 + c_{22}p_2 = V \end{cases} \Rightarrow c_{11}p_1 + c_{21}p_2 = c_{12}p_1 + c_{22}p_2$$

Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, то

$$c_{11}p_1 + c_{21}(1 - p_1) = c_{12}p_1 + c_{22}(1 - p_1)$$

Звідси

$$p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}},\ p_2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Підставимо p_1 в перше рівняння системи

$$c_{11}\frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} + c_{21}\left(1 - \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}\right) = V$$

Отримаємо

$$V = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Для відомої ціни гри V, знайдемо оптимальну стратегію гравця B

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Достатньо одного рівняння

$$c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = V$$

Оскільки $q_1 + q_2 = 1$, то

$$c_{11}q_1 + c_{12}(1 - q_1) = V$$

Отримаємо

$$c_{11}q_1 + c_{12}(1 - q_1) = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Звідси

$$q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} \text{ та } q_2 = \frac{c_{11} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Приклад 9.2. Знайти ціну гри для платіжної матриці з таблиці 9.6

Таблиця 9.6. Платіжна матриця для приклада 9.2

Стратегії гравця *A*	Стратегії гравця *B*	
	B_1	B_2
A_1	3	5
A_2	6	1,5

Рішення.

Стратегії гравця *A*	Стратегії гравця *B*		$\alpha_i = \min\limits_j c_{ij}$
	B_1	B_2	
A_1	3	5	3
A_2	6	1,5	1,5
$\beta_j = \max\limits_i c_{ij}$	6	5	

Нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij} = 3,$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij} = 5,$$

тобто нижня ціна гри ***відрізняється*** від верхньої ціни гри , гра є грою без сідлової точки.

В чистих стратегіях не можливо знайти ціну гри.

Будемо шукати оптимальне рішення у змішаних стратегіях S_A^* та S_B^*.

$$p_1 = \frac{3/2 - 6}{3 + 3/2 - 5 - 6} = \frac{9}{13}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}.$$

Звідси ціна гри

$$V = 3 \cdot \frac{9}{13} + 6 \cdot \frac{4}{13} = \frac{51}{13} = 3\frac{2}{13}$$

$$q_1 = \frac{3/2 - 5}{3 + 3/2 - 5 - 6} = \frac{7}{13}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}.$$

Отримали, для багаторазового використання оптимальні змішані стратегії

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \text{ і } S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

забезпечать максимальний виграш гравцю А та мінімальний програш гравцю В, який дорівнює ціні гри $V = 3\frac{2}{13}$.

9.5 Графоаналітичний метод розв'язування матричної гри

Теорема 9.1. Будь-яка скінчена гра $m \times n$ має розв'язок, при якому число активних стратегій кожного з гравців не перевищує число $L = \min(m, n)$. (Без доказу).

З теореми 9.1 випливає, що в матричних іграх $2 \times n$ або $m \times 2$ завжди знайдеться розв'язок, який передбачає не більше як дві активні стратегії кожного з гравців. Саме це і надає змогу розв'язувати матричні ігри $2 \times n$ та $m \times 2$ графоаналітичним методом.

Розглянемо гру $2 \times n$ з платіжною матрицею за таблицею 9.7.

Таблиця 9.7. Платіжна матриця $2 \times n$ гри

Стратегії гравця A	Стратегії гравця B				
	B_1	B_2	B_3	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2n}

Проведемо через точку (1; 0) координатної площини *Oxy* пряму *L*, перпендикулярну до осі абсцис.

Після цього для кожної з стратегій B_i (i = 1, 2, …, n) проведемо пряму b_i:

$$y = c_{1i} + (c_{2i} - c_{1i})x .$$

Ця пряма поєднує точку $(0; c_{1i})$ на осі *Oy* з точкою $(0; c_{2i})$ на прямій *L*. Ось *Oy* відповідає за стратегію A_1, а пряма *L* – за стратегію A_2.

Якщо гравець *A* застосовує змішану стратегію

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

то його виграш у випадку, коли противник застосовує чисту стратегію B_i, дорівнює

$$V = c_{1i} p_1 + c_{2i} p_2 = c_{1i}(1 - p_2) + c_{2i} p_2 .$$

І цьому виграшу відповідає точка *M* на прямій b_i з абсцисою $x = p_2$ (рис. 9.1).

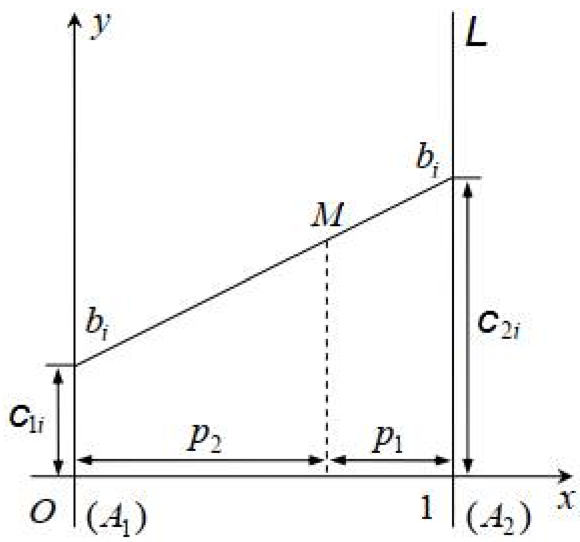


Рис. 9.1 Ймовірності використання змішаних стратегій гравця *A*

Ломана b_1MNb_3, відзначена на рисунку жирною лінією, дозволяє визначити ***мінімальний виграш*** гравця *A* при будь-якій поведінці гравця *B*. Точка *N*, в якій ця ламана досягає ***максимуму***, визначає ***рішення та ціну гри***. Ордината точки *N* дорівнює ціні гри *V*, а її абсциса p_2 – частоті застосування стратегії A_1 в оптимальній змішаній стратегії гравця *A* (рис. 9.2).

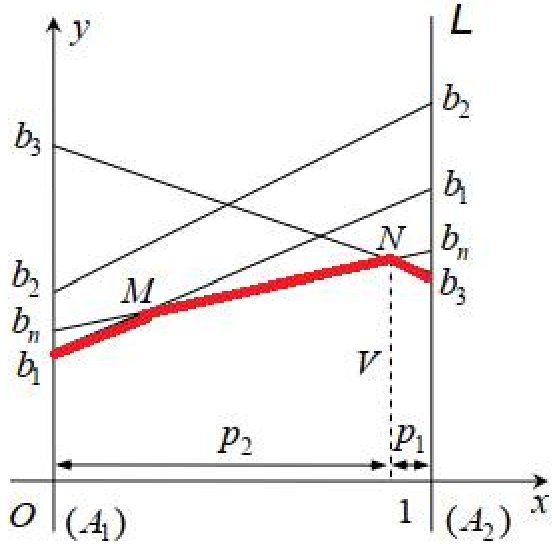


Рис. 9.2 Визначення ціни гри для гравця A

Далі безпосередньо за кресленням знаходимо пару "корисних" стратегій гравця, що перетинаються в точці N (якщо в точці N перетинається більше двох стратегій, то виберемо будь-які дві з них). Нехай це будуть стратегії B_i та B_j. Оскільки виграш гравця A, якщо він дотримується оптимальної стратегії, не залежить від того, в яких пропорціях гравець застосовує ці стратегії, то невідомі p_1, p_2, V визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} c_{1i}p_1 + c_{2i}p_2 = V \\ c_{1j}p_1 + c_{2j}p_2 = V \end{cases} \Rightarrow c_{1i}p_1 + c_{2i}p_2 = c_{1j}p_1 + c_{2j}p_2, \; p_1 + p_2 = 1.$$

Частоти q_i, q_j в оптимальній змішаній стратегії гравця B

$$S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & B_i & \dots & B_j & \dots & 0 \\ 0 & \dots & q_i & \dots & q_j & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

визначаються з співвідношення

$$V = c_{1i}q_i + c_{1j}(1 - q_i), \; q_j = 1 - q_i.$$

Іноді точка N не є перетином двох стратегій, а потрапляє на одну з прямих $x = 0$ або $x = 1$. І тоді рішенням гри будуть відповідні чисті стратегії.

Приклад 9.3.

Гра задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри графоаналітичним методом.

Рішення.

Визначимо верхню та нижню ціни гри

	B1	B2	B3	B4	
A1	1	5	9	3	1
A2	6	3	2	7	2
	6	5	9	7	

Нижня ціна гри $\alpha = \max_i \min_j c_{ij} = 2$,

Верхня ціна гри $\beta = \min_j \max_i c_{ij} = 5$.

$\alpha \neq \beta$, не має сідлової точки, гра не має рішення в чистих стратегіях.

Шукаємо розв'язок задачі в змішаних стратегіях. Змішана стратегія може забезпечити гравцю A максимально можливий середній виграш з ціною гри $V \in [2; 5]$.

Проведемо через точку (1; 0) координатної площини Oxy пряму L, перпендикулярну до осі абсцис.

Після цього для кожної з стратегій B_i (i = 1, 2, 3, 4) проведемо пряму b_i:

$$y = c_{1i} + (c_{2i} - c_{1i})x.$$

Для стратегії B_1: $y = 1 + (6 - 1)x = 1 + 5x$

Для стратегії B_2: $y = 5 - 2x$

Для стратегії B_3: $y = 9 - 7x$

Для стратегії B_4: $y = 3 + 4x$

Ломана b_1MNb_2, відзначена на рисунку жирною лінією, дозволяє визначити ***мінімальний виграш*** гравця A при будь-якій поведінці гравця B.

Як це видно з рисунку у точці М перетинаються прямі, які відповідають стратегіям B_1 і B_2 гравця B. Тому саме стратегії B_3 і B_4 є неактивні та можуть бути вилучені.

Задача зводиться до 2×2 гри.

Точка М, в якій ця ламана досягає ***максимуму***, визначає ***рішення та ціну гри***.

Ордината точки М дорівнює ціні гри *V*.

Абсциса p_2 точки М дорівнює частоті застосування стратегії A_1 в оптимальній змішаній стратегії гравця *A* (рис. 9.3).

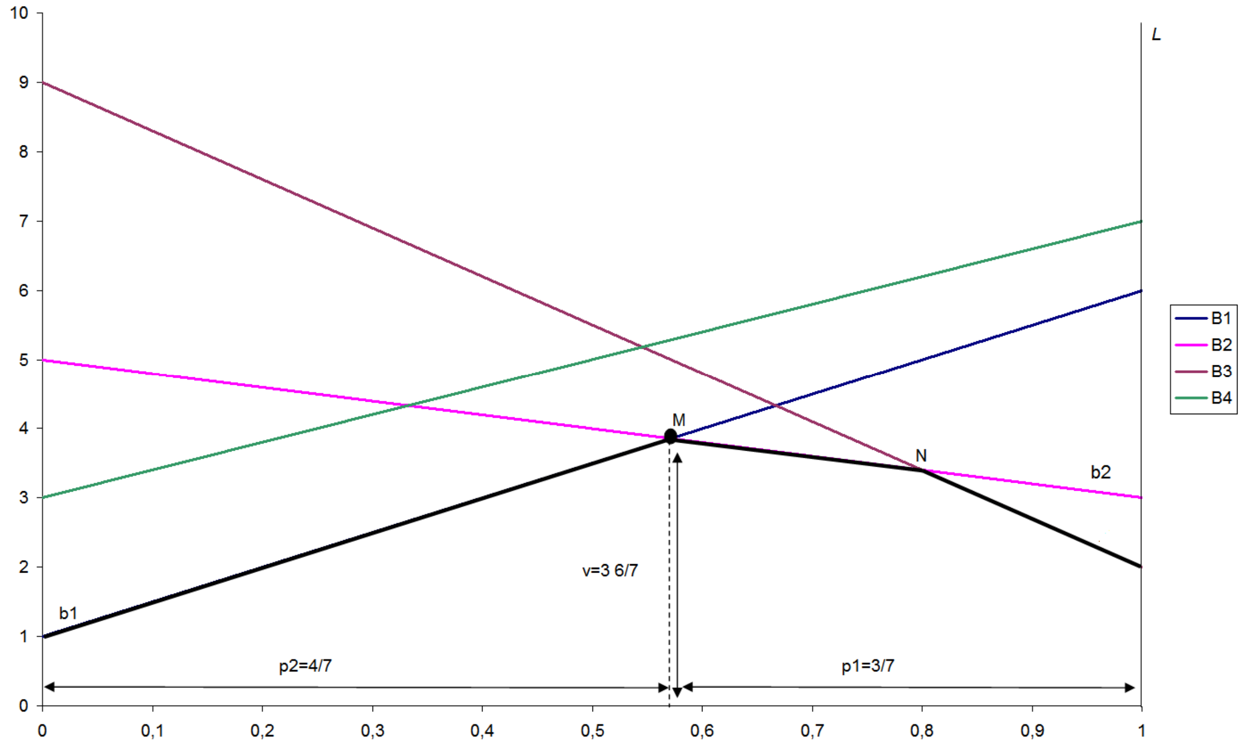


Рис. 9.3 Визначення ціни гри для гравця *A*

Стратегії гравця *A*	Стратегії гравця *B*	
	B_1	B_2
A_1	1	5
A_2	6	3

$$p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{3-6}{1+3-5-6} = \frac{3}{7}$$

$$p_2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{1-5}{1+3-6-6} = \frac{4}{7}$$

$(p_1 + p_2 = 1)$

Оптимальні змішані стратегії гравця *A*:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Визначимо ціну гри:

$$V = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot 6}{1 + 3 - 5 - 6} = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$$

Дійсно $3\frac{6}{7} \in [2; 5]$.

$$q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{3 - 5}{1 + 3 - 5 - 6} = \frac{2}{7}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Оптимальні змішані стратегії гравця *B*:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальні активні (корисні) змішані стратегії гравця *B*:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: для багаторазового використання ***оптимальні*** активні (корисні) змішані стратегії

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ і } S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

забезпечать максимальний виграш гравцю *A* та мінімальний програш гравцю *B*, який дорівнює ціні гри $V = 3\frac{6}{7}$.

Розв’язок матричної гри $m\times2$ знаходять аналогічним чином з тією різницею, що гру розглядають з позиції гравця *B* (мінімаксу).

9.6 Загальний метод розв'язування матричної гри

Будемо як і раніше вважати, що для гри з m можливими стратегіями A_1, A_2 ,..., A_m гравця A та n можливими стратегіями B_1, B_2 ,..., B_n гравця B задана платіжна матриця $m \times n$ (табл. 9.8), у клітинках якої фігурують виграші c_{ij} , $i = 1,...,m$, $j = 1,...n$ гравця A (програші гравця B) у ситуаціях, коли гравці застосовують відповідно стратегії A_i та B_j.

Таблиця 9.8. Платіжна матриця загальної $m \times n$ гри

Наші рішення	Рішення супротивника			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Необхідно знайти розв'язок гри, тобто дві оптимальні змішані стратегії гравців A та B

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \qquad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

де

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1 \text{ та } q_1 + q_2 + ... + q_n = 1,$$

причому деякі з чисел p_i , $i = 1,...,m$ та q_j , $j = 1,...n$ можуть дорівнювати нулю.

Оптимальна стратегія S_A^* повинна при будь-яких діях супротивника B забезпечувати гравцю A середній виграш, не менший за ціну гри V. А якщо гравець B також дотримується своєї оптимальної стратегії S_B^*, то виграш гравця A дорівнює V.

Аналогічно оптимальна стратегія S_B^* при будь-яких діях гравця A повинна забезпечувати гравцю B програш, не більший за ціну гри V, та рівний ціні гри V при дотриманні гравцем A своєї оптимальної стратегії S_A^*.

Будемо надалі вважати, що ціна гри додатна $V > 0$. Для виконання умови V>0 достатньо, щоб всі елементи платіжної матриці були невід'ємними. Це легко забезпечити, якщо до всіх елементів c_{ij} платіжної матриці додати відповідну величину $d > \max\limits_{i,j} |c_{ij}|$, c_{ij}≤0. Зрозуміло, що з такою модифікацією платіжної матриці ціна гри зміниться, але оптимальні стратегії гравців залишаться незмінними.

Припустимо, що гравець A обрав свою оптимальну стратегію

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Тоді, якщо супротивник (гравець B) обрав свою чисту стратегію B_j , то наш середній виграш буде дорівнювати

$$c_j = p_1 c_{1j} + p_2 c_{2j} + \dots + p_m c_{mj}. \tag{9.1}$$

Наша оптимальна стратегія S_A^* має таку властивість, що для будь-якої поведінки супротивника B_j , j = 1,...,n забезпечує виграш не менший за ціну гри $V > 0$.

Звідси випливає, що будь-яке число c_j , j = 1,...,n , яке задовольняє співвідношенню (9.1), не може бути меншим за V , тобто маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} p_1 c_{11} + p_2 c_{21} + \dots + p_m c_{m1} \ge V \\ p_1 c_{12} + p_2 c_{22} + \dots + p_m c_{m2} \ge V \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 c_{1n} + p_2 c_{2n} + \dots + p_m c_{mn} \ge V \end{cases} \tag{9.2}$$

з ціною гри $V \to \max$.

Розділимо нерівності (9.2) на *додатну* величину V та позначимо:

$$x_1 = \frac{p_1}{V};\ x_2 = \frac{p_2}{V};\ \dots;\ x_m = \frac{p_m}{V}. \tag{9.3}$$

Тоді систему (9.2) можна записати так:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m \geq 1 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}, \tag{9.4}$$

де x_1, x_2, …, x_m - невід’ємні числа, що визначаються за (9.3).

Оскільки

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1,$$

то числа x_1, x_2, …, x_m задовольняють умові

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V}. \tag{9.5}$$

З умови (9.5) випливає: для того, щоб наш ***гарантований*** середній виграш V був максимальним, сума чисел $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ повинна бути мінімальною.

Таким чином, отримуємо таку *задачу лінійного програмування*:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m \geq 1 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \tag{9.6}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m$$

з ціною гри $V = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$.

Задача (9.6) завжди має рішення. Отримавши її оптимальне рішення x_1^*, x_2^*, …, x_m^* можна знайти ціну гри $V = \dfrac{1}{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^*}$, оптимальні значення p_1^*, p_2^*, …, p_m^*, і, отже, оптимальну стратегію гравця A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}.$$

Якщо вихідна платіжна матриця збільшувалася на число d, то для отримання ціни початкової гри, V потрібно зменшити на d.

Поведінці гравця B відповідає двоїста задача:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max$$

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \le 1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n$$

де $y_1 = \dfrac{q_1}{V}$; $y_2 = \dfrac{q_2}{V}$; …; $y_n = \dfrac{q_n}{V}$, а цільова функція гравця B еквівалентна функції $V \to \min$, тобто гравець B прагне мінімізувати свій середній програш.

***Приклад* 9.4.** Знайти ціну гри та визначити оптимальні стратегії

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Рішення.

	B1	B2	B3	
A1	0	0,3	0,5	0
A2	0,6	0,1	-0,1	-0,1
A3	0,4	0,2	0,1	**0,1**
	0,6	**0,3**	0,5	

Нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j c_{ij} = 0.1,$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i c_{ij} = 0.3,$$

тобто нижня ціна гри ***відрізняється*** від верхньої ціни гри , гра є грою без сідлової точки.

В чистих стратегіях не можливо знайти ціну гри.

Тому будемо шукати оптимальні змішані стратегії гравця, що забезпечать ціну гри

$$V \in [0.1,\ 0.3].$$

Оскільки матриця містить від'ємні числа, потрібно домогтися, щоб її елементи були не від'ємними, додавши всім її елементам число, рівне модулю найменшого числа матриці. Мінімальний елемент матриці дорівнює - 0,1 його модуль дорівнює 0,1. Додамо до всіх елементів платіжної матриці число, що дорівнює 0,1, в результаті отримаємо:

	B1	B2	B3
A1	0,1	0,4	0,6
A2	0,7	0,2	0
A3	0,5	0,3	0,2

Модель лінійного програмування для гравця A:

$V \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}1p_1 + 0{,}7p_2 + 0{,}5p_3 \ge V \\ 0{,}4p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}3p_3 \ge V \\ 0{,}6p_1 + 0p_2 + 0{,}2p_3 \ge V \end{cases}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_i \ge 0, \quad i = 1,2,3$$

Позначимо

$$x_i = \frac{p_i}{V}, \qquad i = 1,2,3\,.$$

Перепишемо задачу у вигляді

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}5x_3 \geq 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 \geq 1 \\ 0{,}6x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1{,}2{,}3$$

Вирішимо цю задачу за допомогою Пошуку рішення в MS Excel

	B1	B2	B3		x	ц.ф.(min)
A1	0,1	0,4	0,6		1,176471	2,941176
A2	0,7	0,2	0		0	
A3	0,5	0,3	0,2		1,764706	
Обмеження	1	1	1,058824			

Виконаємо зворотні перетворення, щоб отримати ціну гри

$$V = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$$

та частоти застосування стратегій гравцем A

$$p_i = x_i \cdot V, \quad i = 1{,}2{,}3.$$

	B1	B2	B3		x	ц.ф.(min)	V	p
A1	0,1	0,4	0,6		1,176471	2,941176	0,34	0,4
A2	0,7	0,2	0		0			0
A3	0,5	0,3	0,2		1,764706			0,6
Обмеження	1	1	1,058824					

Отримали:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Ціна гри:

для модифікованої задачі $V = 0{,}34$

для вихідної задачі $V = 0{,}34 - 0{,}1 = 0{,}24$

Двоїста задача для гравця B

$V \to \min$

$$\begin{cases} 0{,}1q_1 + 0{,}4q_2 + 0{,}6q_3 \le V \\ 0{,}7q_1 + 0{,}2q_2 + 0q_3 \le V \\ 0{,}5q_1 + 0{,}3q_2 + 0{,}2q_3 \le V \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_i \ge 0, \quad i = 1,2,3$$

Позначимо

$$y_i = \frac{q_i}{V}, \qquad i = 1,2,3.$$

Перепишемо задачу у вигляді

$$y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}7y_2 + 0{,}5y_3 \le 1 \\ 0{,}4y_1 + 0{,}2y_2 + 0{,}3y_3 \le 1 \\ 0{,}6y_1 + 0y_2 + 0{,}2y_3 \le 1 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = 1,2,3$$

Вирішимо цю задачу за допомогою Пошуку рішення в MS Excel (на іншому листі)

					Обмеження
	B1	B2	B3		
A1	0,1	0,4	0,6		1
A2	0,7	0,2	0		0,882352941
A3	0,5	0,3	0,2		1
y	0,588235	2,352941	0		
ц.ф.(max)	2,941176				

Виконаємо зворотні перетворення, щоб отримати та перевірити ціну гри (вона повинна співпадати з ціною гри для гравця *A*)

$$V = \frac{1}{y_1 + y_2 + y_3}$$

та частоти застосування стратегій гравцем *B*

$q_i = y_i \cdot V, \quad i = 1,2,3.$

					Обмеження
	B1	B2	B3		
A1	0,1	0,4	0,6		1
A2	0,7	0,2	0		0,882352941
A3	0,5	0,3	0,2		1
y	0,588235	2,352941	0		
ц.ф.(max)	2,941176				
V	0,34				
q	0,2	0,8	0		

Отримали:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

Ціна гри для модифікованої задачі $V = 0,34$.

Оскільки, ми збільшили всі елементи c_{ij} платіжної матриці на величину $d = 0.1$, то тепер необхідно зменшити ціну гри на 0.1

Ціна гри для вихідної задачі $V = 0,34 - 0,1 = 0,24$

Відповідь: $V = 0,24$, $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ми розглянули аналітичний метод розв'язування парної гри з нульовою сумою. Саме такі ігри найбільш досліджені в теорії ігор. Але така модель не охоплює всі практичні випадки. Зокрема, доволі часто існують ситуації, коли число конфліктуючих сторін більше двох і необхідно знайти оптимальне рішення, яке в деякому розумінні буде задовольняти *всіх* учасників гри.

Тому в теорії ігор розглядають *узагальнене* визначення ігор у нормальній (стратегічній) формі.

9.7 Поняття ігор у нормальній (стратегічній) формі

***Означення* 9.1** Грою у нормальній (стратегічній) формі називають гру, в якій:

- приймає учать N гравців ($N \geq 2$);
- кожний i -й гравець має множину стратегій (ходів) $X_i = \{x_i\}$, $i = 1,..., N$;
- для кожного i -го гравця задана функція виграшу

$$K_i = K_i(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N),$$

яка залежить як від вибору його стратегії $x_i \in X_i$, так і від обраних стратегій іншими гравцями $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, , …, $x_N \in X_N$, причому гравці *одночасно* обирають свої стратегії, *не маючи інформації* щодо стратегій інших гравців.

Таким чином, після вибору стратегій гравців виникає конкретна ситуація

$$x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N),$$

у якій гравці отримають свої виграші

$$K_1(x),\ K_2(x),\ \dots,\ K_i(x),\ \dots,\ K_N(x).$$

***Означення* 9.2**. Стратегію $x_i^{**} \in X_i$ називають домінуючою стратегією i -го гравця, якщо $\forall x_1 \in X_1$, $\forall x_2 \in X_2$, …, $\forall x_i \in X_i$,…, $\forall x_N \in X_N$ справедлива умова

$$K_i(x_1, x_2, ..., x_i^{**}, ..., x_N) \geq K_i(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N).$$

Зауважимо, що

1. Вибір домінуючої стратегії приносить гравцеві результати, які не гірші, ніж результати будь-якої його іншої стратегії, *незалежно від стратегій*, обраних іншими гравцями.
2. Для спрощення прийняття рішення кожен гравець повинен залишити тільки домінуючі стратегії, якщо це можливо, і тим самим сформувати Парето ефективну множину стратегій.

3. Конкретна гра може не містити Парето ефективних множин стратегій гравців.

***Означення* 9.3**. Набір стратегій

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, ..., x_N^*)$$

називають рівноважним за Нешем, якщо для будь-якого i -го гравця

$$K_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, ..., x_N^*) \ge K_i(x_1^*, x_2^*, ..., x_i, ..., x_N^*),\ \forall x_i \in X_i,$$

тобто відхилення від рівноваги може лише погіршити виграш цього гравця.

Зауважимо, що сідлова точка парної гри – частковий випадок рівноваги за Нешем.

Таким чином можна зробити такі висновки:

1. Якщо всі гравці мають домінуючі стратегії, то гра має єдину рівновагу за Нешем.
2. Індивідуальне відхилення від рівноваги за Нешем будь-якого з гравців не принесе йому вигоду.
3. Спільне відхилення від рівноваги за Нешем декількох гравців може, але *не обов'язково* принести їм вигоду.

9.8 «Дилема в'язня».

Розглянемо наочний приклад рівноваги за Нешем, який в теорії прийняття рішень отримав назву «Дилема в'язня».

У всіх судових системах кара за бандитизм (скоєння злочинів у складі організованої групи) набагато жорсткіша, ніж ті самі злочини, скоєні поодинці.

Класичне формулювання «дилеми в'язня» таке:

Двоє злочинців - A і $Б$ - попалися приблизно в один і той же час на подібних злочинах. Є підстави вважати, що вони діяли за змовою, і поліція, ізолювавши їх один від одного, пропонує їм одну й ту саму угоду: якщо один свідчить проти іншого, а той мовчить, то перший звільняється за допомогу слідству, а другий отримує максимальний термін позбавлення волі (10 років).

Якщо обидва мовчать, їхнє діяння проходить за легшою статтею, і кожен із них засуджується до півроку в'язниці. Якщо обидва свідчать один проти одного, вони одержують мінімальний термін (по 2 роки). Кожен ув'язнений вибирає, мовчати чи свідчити проти іншого. Однак жоден із них не знає точно, що зробить інший. Що трапиться?

У клітинках табл. 9.9 представлено можливі наслідки рішень злочинців.

Таблиця 9.9. Наслідки від прийнятих рішень сторін

	В’язень *Б* мовчить	В’язень *Б* дає показання
В’язень *А* мовчить	Обидва отримають по півроку в'язниці	*А* отримує 10 років, Б звільняється
В’язень *А* дає показання	*А* звільняється, *Б* отримує 10 років в'язниці	Обидва отримують по 2 роки в'язниці

Дилема виникає, якщо припустити, що обоє піклуються лише про мінімізацію свого терміну ув'язнення.

Уявімо міркування одного з в'язнів. Якщо партнер мовчить, то краще його зрадити і вийти на волю (інакше півроку в'язниці). Якщо партнер свідчить, краще теж свідчити проти нього, щоб отримати 2 роки (інакше — 10 років) в'язниці. Стратегія «свідчити» суворо переважає стратегію «мовчати». Аналогічно інший в'язень приходить до того ж висновку.

Тим самим визначають *рівновагу за Нешем* – обидва мають зізнатись.

З точки зору групи (цих двох в'язнів) найкраще співпрацювати один з одним, зберігати мовчання та отримати по півроку, оскільки це зменшить сумарний термін ув'язнення. Будь-яке інше рішення буде менш вигідним. Це дуже наочно демонструє, що у грі з ненульовою сумою *Парето-оптимум може бути протилежним до рівноваги Неша*.

9.9 Тести для самоконтролю знань

1. Припустимо, що α – верхня ціна парної гри з нульовою сумою, а β – нижня ціна. Виберіть вірне твердження

1) $\alpha \le \beta$*
2) $\alpha \ge \beta$
3) $\alpha^2 + \beta^2 = 1$
4) $\alpha + \beta = 0$

2. Нехай α – нижня ціна, а β – верхня ціна парної гри з нульовою сумою. Якщо $\alpha = \beta = V$, то число V називається

1) ціною гри*
2) точкою рівноваги
3) оптимальною стратегією
4) змішаною стратегією

3. Нехай α – нижня ціна, а β – верхня ціна парної гри з нульовою сумою. Якщо $\alpha = \beta$, то гра називається…

1) грою з сідловою точкою*
2) нерозв'язним конфліктом
3) грою без правил
4) вирішуваним конфліктом
5) грою за правилами

4. Вектор, кожен із компонентів якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається

1) змішаною стратегією*
2) вектором напрямку
3) вектором нормалі
4) градієнтом

5. Матрична гра, задана платіжною матрицею

1	4
3	2

1) не має сідлової точки*
2) має сідлову точку
3) не є парною грою

6. Матрична гра задана платіжною матрицею

22	22	22
21	23	23
20	21	24

1) В матриці є рядки, які домінують
2) В матриці є стовпчики, які домінують*
3) В матриці не має ні рядків, які домінують, ну стовпчиків, які домінують

7. Які стратегії можна видалити з платіжної матриці?

	B1	B2	B3	B4
A1	6	7	7	5
A2	8	1	6	7
A3	4	-3	4	3

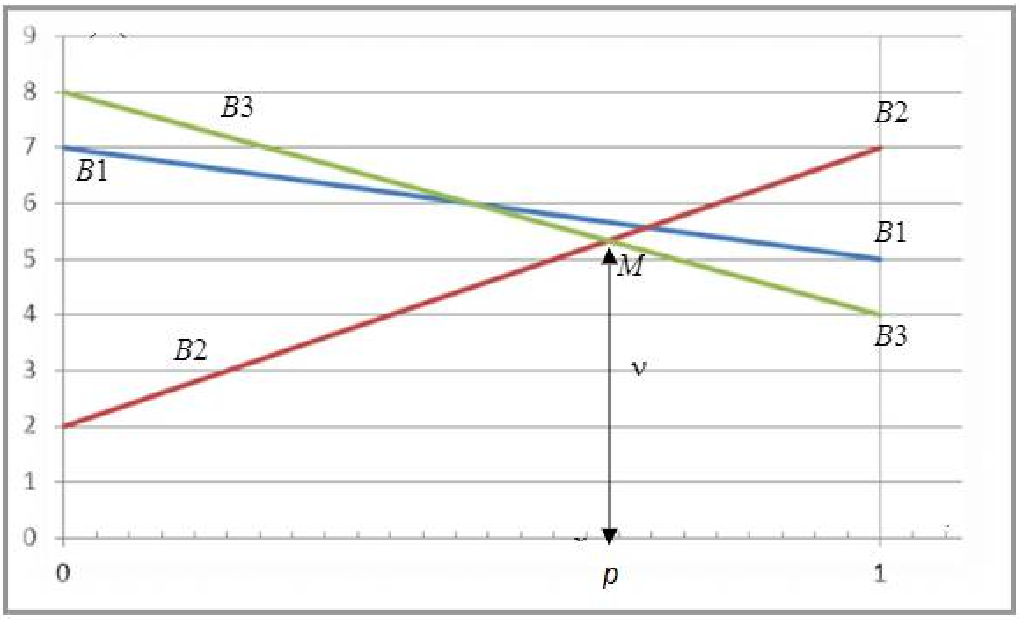
1) A1
2) A2
3) A3*

8. Які стратегії можна видалити з платіжної матриці?

	B1	B2	B3	B4
A1	6	7	7	5
A2	8	1	6	7
A3	4	-3	4	3

1) B1*
2) B2
3) B3*
4) B4

9. Виберіть правильні відповіді



1) B1 - стратегія не буде використовуватися*
2) B2 - стратегія не буде використовуватися
3) B3 - стратегія не буде використовуватися
4) Ймовірність а застосування стратегії A1 більше за ймовірність застосування стратегії A2
5) Ймовірність застосування стратегії A1 менше за ймовірність застосування стратегії A2*
6) Ціна гри приблизно дорівнює 5,3*

10. Дана платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	3	2
A_2	2	2	4
A_3	5	2	3

Визначте частоту використання стратегій гравця *A*

1) 0,6 0,2 0,2*
2) 0,2 0,2 0,6
3) 0,2 0,6 0,2
4) 0,5 0,5 0

Тема 10.
Використання теорії очікуваної корисності при прийнятті рішень

10.1. Теорія очікуваної корисності. Функція корисності

У попередніх темах ми розглядали прийняття рішень в умовах ризику за показниками, що враховують реальні результати, виражені у грошових одиницях (прибуток, збитки тощо). Вихід x_i, який забезпечував дохід у 10 разів більший, ніж результат x_k виглядав в очах ОПР рівно в 10 разів краще. Облік суб'єктивного ставлення ОПР до ризику проводився шляхом вибору відповідних критеріїв для порівняння альтернатив. Проте, як показує практика, люди не завжди приймають рішення виходячи з реальних значень. Підсвідомо вони орієнтуються на *суб'єктивну* "цінність" результатів. Одним із перших, хто сформулював це і спробував дати своє теоретичне пояснення, був математик Д.Бернуллі. Вивчаючи так званий "петербурзький феномен", він ще 1738 року припустив, що при порівнянні альтернатив реальна людина орієнтується не на очікуване значення самого виграшу, а на математичне сподівання його суб'єктивної "корисності". Розвиваючи цю ідею, Бернуллі ввів поняття ***функції корисності***, запропонував їй формулу і описав характеристики. Це стало основою ***теорії очікуваної корисності***, яка досі застосовується для пояснення поведінки економічних агентів за умов ризику.

Функція корисності відбиває міру психологічного задоволення благами. Зазвичай вона позначається $u(x)$. Одиницею виміру корисності є "ютил". Аргументом x цієї функції виступає кількість благ. В наших прикладах в якості x використовуються грошові суми виграшів, прибутку чи збитків. Тому $u(x)$ є функцією корисності грошей.

Запропонована ще у XVIII сторіччі теорія очікуваної корисності отримала свій розвиток у XX сторіччі у працях фон Неймана та Моргенштерна.

10.2. Властивості функції корисності. Ставлення до ризику

Згідно з припущенням Бернуллі, альтернативи порівнюються за їхньою очікуваною корисністю. Щоб її розрахувати, необхідно у відповідність кожному можливому результату x поставити деяке значення корисності u. Це можна зробити, ввівши функцію корисності $u(x)$, що визначає однозначну залежність між x та u.

Властивості функції корисності $u(x)$:

1) ***функція корисності має бути зростаючою***. Це відбиває принцип: "чим більше благ, тим краще".

2) у загальному випадку, функція корисності має бути ***безперервною***, оскільки якщо дві альтернативи забезпечують нам близьку кількість благ, то і корисності цих двох альтернатив має бути близькими.

3) функція корисності має відбивати ставлення ОПР до ризику - ***схильність*** чи ***неприйняття***. Це означає, що функція має коректно описувати відмінності у *психологічному* сприйнятті ОПР втрат та виграшів.

Залежно від ставлення до ризику виділяють три чисті психологічні типи:

- ***не схильний до ризику*** ("ризикофоб");
- ***нейтральний до ризику***;
- ***схильний до ризику*** ("ризикофіл").

Люди, що належать до зазначених типів, по-різному оцінюють втрати та виграші.

У осіб, не схильних до ризику, психологічні переживання у зв'язку з втратою деякої суми грошей є сильнішими, ніж задоволення від виграшу такої ж суми. Це означає, що для такої ОПР, яка має багатство у розмірі x_0 грн., функція корисності повинна задовольняти умові:

$$\boldsymbol{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x) > u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)},$$

де:

$\boldsymbol{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}$ - відображає зменшення корисності (тобто міру переживань, незадоволення) через втрату Δx грн.,

$\boldsymbol{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}$ - відображає збільшення корисності (тобто міру задоволення) від виграшу такої ж суми Δx.

Ця умова виконується, якщо функція корисності є опуклою вгору. На рис.10.1а видно, що опукла вгору функція $u(x)$ справді відбиває більшу "чутливість" ОПР до можливих втрат, ніж до виграшів.

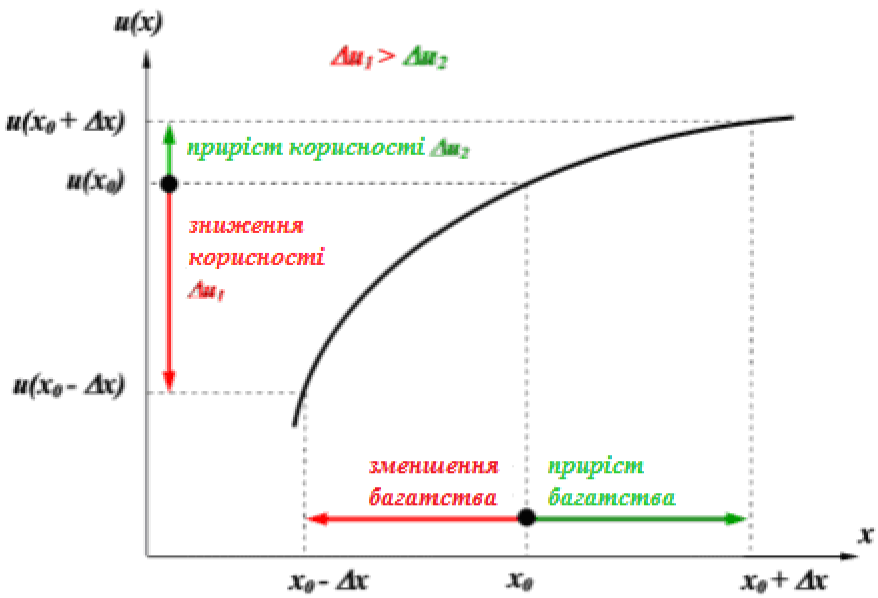


Рис. 10.1а. Опукла ВГОРУ функція корисності, що відображає НЕПРИЙНЯТТЯ ризику.

Навпаки, для ОПР, яка любить ризикувати, психологічні вигоди від можливості виграти Δx грн. перевершують переживання через таку ж втрату. Подібне ставлення до ризику описується опуклою вниз функцією корисності (рис.10.1б).

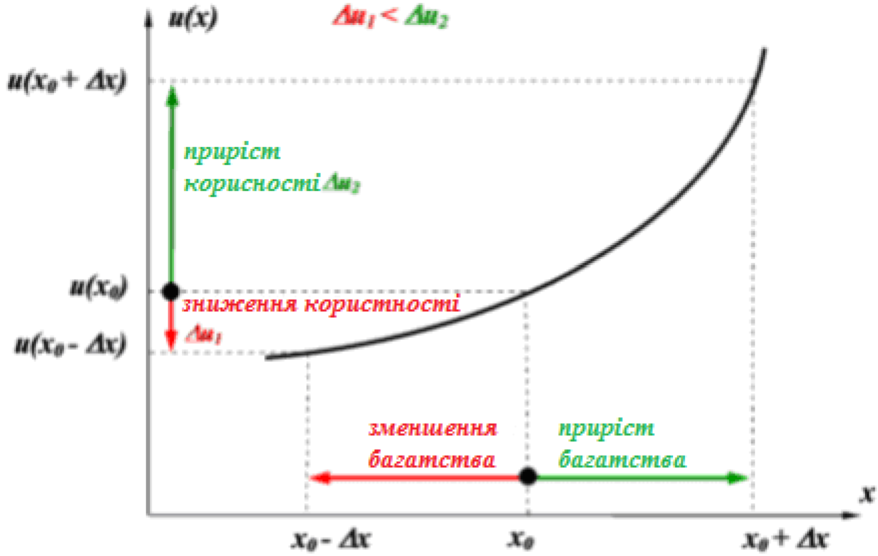


Рис.10.1б. Опукла ВНИЗ функція корисності, що відображає СКЛОННІСТЬ до ризику.

Функція корисності для осіб, нейтральних до ризику, є прямою (рис. 10.1в), яка забезпечує тим самим однакове (рівне) ставлення як до виграшів, так і до програшів. Всі розглянуті нами у попередніх лекціях методи прийняття рішень були справедливі саме для ОПР, що належить до такого типу поведінки.

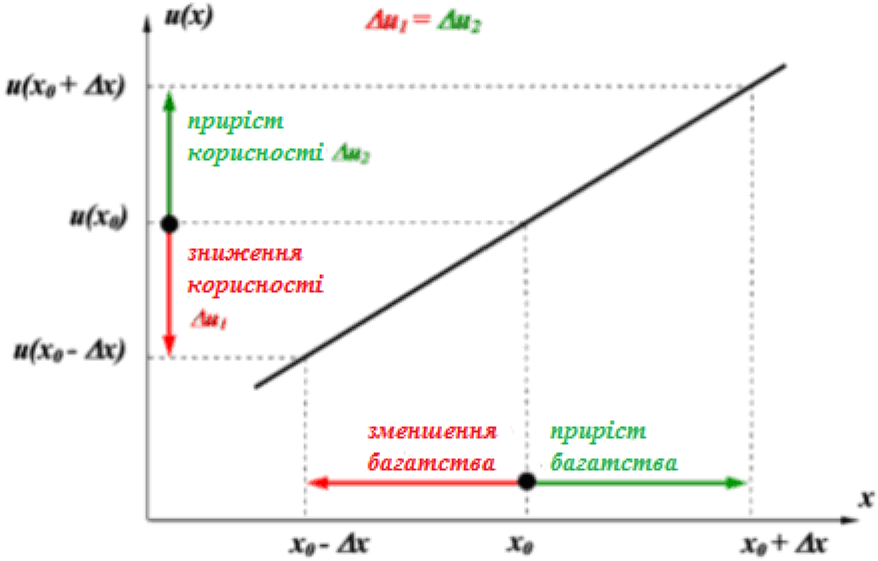


Рис.10.1в. ЛІНІЙНА функція корисності, що відбиває НЕЙТРАЛЬНЕ ставлення до ризику.

Отже, функція корисності в теорії - це зростаюча безперервна функція, опукла вгору для осіб, які не схильні до ризику, опукла вниз для тих, хто любить ризик, і пряма для людей, нейтральних до ризику.

Слід зазначити, що ці типи є "чистими". Люди, які стосуються виключно одного чистого типу, у житті зустрічаються рідко. Залежно від віку, ситуації, настрою, рівня багатства, величини можливих втрат або виграшів та сама людина може демонструвати як "ризикофобну" поведінку, так і схильність до ризику, або "нейтралітет".

Згідно з дослідженнями, основна частина людей в економічному плані більшою чи меншою мірою демонструє *неприйняття ризику*. Тому в економічній літературі значну увагу приділено саме такому типу поведінки.

10.3. Особливості поведінки в умовах ризику

Щоб виявити специфіку ***економічної поведінки в умовах ризику***, ми будемо використовувати модель так званої "простої лотереї" або "простого шансу". У ОПР є шанс опинитися у стані x_1 з ймовірністю $p_1 = p$ та у стані x_2 з ймовірністю $p_2 = (1 - p)$. Інших можливостей, окрім цих двох варіантів, немає. Тому таку лотерею часто називають бінарною. У короткому вигляді "простий шанс" записується так:

$$L = \{x_1, x_2, p\}$$

Очікуваний результат такої лотереї ML можна визначити за загальною формулою для розрахунку математичного сподівання дискретної випадкової величини:

$$ML = \sum_{j=1}^{2} p_j x_j = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p x_1 + (1-p) x_2$$

Очікувана корисність даної лотереї Mu_L розраховується за аналогічною формулою тільки замість реальних значень результатів x_1 і x_2 в неї підставляються значення функції корисності $u(x_1)$ і $u(x_2)$:

Це означає, що на координатній площині очікувана корисність перебуватиме на відрізку, що з’єднає значення функції корисності $u(x_1)$ та $u(x_2)$ (рис. 10.2), причому:

$$\frac{ML - x_1}{x_2 - ML} = \frac{Mu_L - u(x_1)}{u(x_2) - Mu_L} = \frac{p}{1 - p}$$

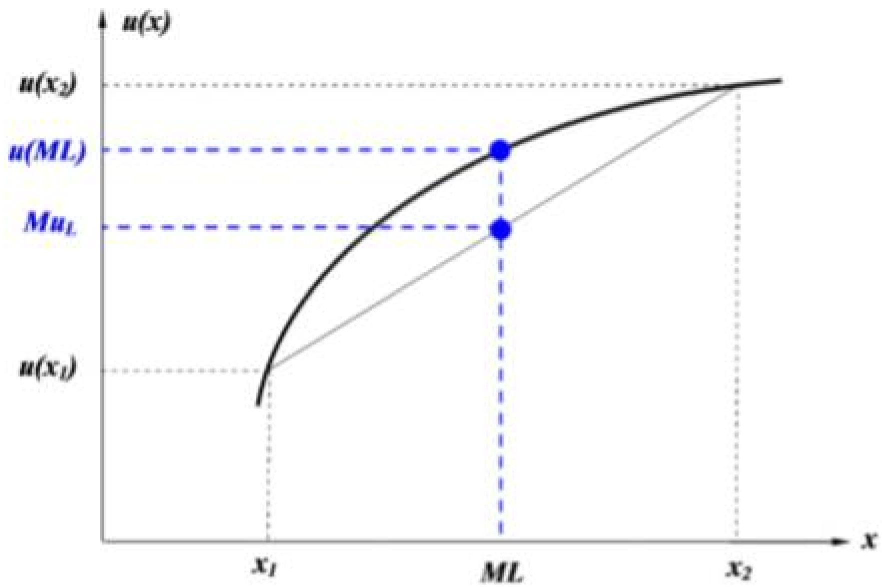


Рис. 10.2. Порівняння ризикової та безризикової альтернатив для ОПР, несхильної до ризику.

Спираючись на графік, спробуємо зрозуміти, як люди, які по-різному відносяться до ризику, відповіли б на два простих питання.

Питання 1. Що краще: гарантовано мати деяку суму грошей або отримати можливість зіграти в лотерею, очікуваний виграш у якій дорівнює цій же сумі?

Варіант із гарантованим володінням грошима називається "***безризикова альтернатива***" (sure alternative). У свою чергу, можливість зіграти в лотерею за аналогією називають "***ризиковою альтернативою***".

З графіка корисності ОПР, не схильного до ризику (рис. 10.2), видно, що очікувана корисність лотереї Mu_L при будь-яких значеннях x_1, x_2 і p буде нижчою за корисність гарантованої суми в розмірі очікуваного виграшу ML:

$$u(ML) > Mu_L$$

Це означає, що обережні люди, які не люблять ризик, віддадуть перевагу отримати гарантовану суму замість того, щоб зіграти в лотерею з таким же очікуваним виграшем. Неважко показати, що особи, схильні до ризику, за подібних умов оберуть лотерею, а для "нейтралу" ризикова та безризикова альтернативи будуть рівноцінні.

Питання 2. Яка гра краща: гра, де можна багато виграти, але й багато програти, або де можливий виграш менший, але програш незначний?

Для відповіді на це питання розглянемо дві прості лотереї $L\{x_1, x_2, p\}$ та $L'\{x'_1, x'_2, p'\}$, такі що:

$$x_1 < x'_1 \text{ та } x'_2 < x_2$$

Лотерея L дає змогу виграти більше, ніж L', але й можливий програш тут більший. Результати лотереї L' не виходять за межі L. Щодо ймовірностей виграшу або програшу жодних припущень не вводимо. Як ми побачимо далі, відповідь на питання, що нас цікавить, в даному випадку від ймовірностей не залежить.

Як уже зазначалося вище, очікувана корисність кожної з цих лотерей лежить на хорді, яка поєднує дві точки на графіку корисності, що відповідають двом можливим результатам. Точне положення очікуваної корисності на цій хорді залежить від можливості виграти або програти.

Проводячи всі можливі хорди будь-яких значень x_1, x_2, x'_1, x'_2 за умови, що $x_1 < x'_1$ і $x'_2<x_2$ (рис.10.3), можна побачити таку закономірність. При опуклому вгору графіку корисності хорда, що описує очікувану корисність другої

лотереї L', завжди вище хорди для L. Це означає, що при заданих межах ОПР, яка не схильна до ризику, завжди вибиратиме альтернативу з меншим розкидом результатів.

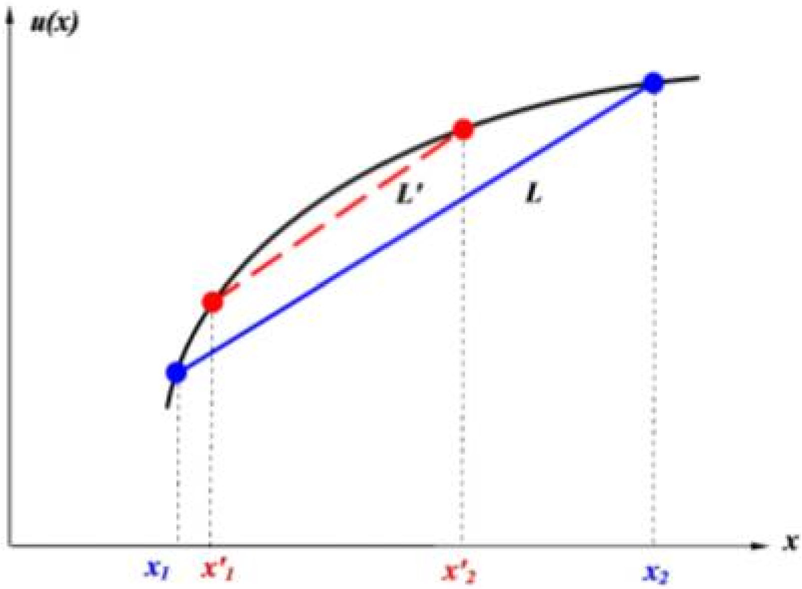


Рис.10.3. Вплив розкиду результатів простої лотереї на очікувану корисність альтернатив ОПР, несхильної до ризику.

Особам, які добре сприймають ризик, а, отже, і менш чутливим до можливих програшів, варіант з широким діапазоном результатів (а, отже, і з більшим виграшем) здається привабливішим.

При нейтральному відношенні до ризику рішення залежатиме не від розкиду результатів, а від очікуваного значення. Тут може бути кращим варіант з широким розкидом, якщо він обіцяє більший очікуваний виграш (і, отже, більш високу очікувану корисність).

10.4. Детермінований еквівалент

Особи, які не схильні до ризику, між гарантованою сумою та лотереєю з таким же очікуваним виграшем виберуть безризикову альтернативу. З цього випливає дуже важливий висновок, що пояснює існування цілої галузі *фінансових* відносин, а також деяких видів діяльності, фінансових продуктів та інструментів.

Людина, яка вважає за краще не ризикувати і мати менше, але гарантовано, *готова платити за можливість уникнути ризику*. "Страх" втратити проявляється і у звичайній господарській діяльності, і під час роботи на фінансових ринках. А якщо хтось готовий платити, завжди знайдеться той, хто захоче на цьому заробляти. Так виникли комерційне страхування, опціони, ф'ючерси, різні види гарантій тощо. Суть цих інструментів з погляду споживача - *передача ризику іншій стороні за певну невипадкову плату*. Такі інструменти будуть надійно працювати лише за умови, що сторона, яка приймає ризик, може його належним чином фінансувати (тобто покрити наслідки можливої реалізації ризику). Розглянемо, як виявлена готовність платити за безризикову альтернативу на графіку функції корисності.

Розглянемо ситуацію із простою лотереєю L з п.2 для ОПР, не схильної до ризику. Очікуваний виграш становить ML, і очікувана корисність Mu_L. На графіку 10.1а ми бачили, що корисність $u(ML)$ гарантованого володіння сумою у розмірі ML для особи, яка не приймає ризик, завжди вища за очікувану корисність Mu_L лотереї з таким же очікуваним виграшем:

$$u(ML) > Mu_L$$

Тобто людина вибере безризикову альтернативу.

Тепер розглянемо ситуацію, коли цій людині пропонують вибрати між гарантованим володінням фіксованою сумою S і лотереєю з очікуваним виграшем ML. Як повинні співвідноситися S і ML, щоб ці дві альтернативи були еквівалентними, і вона не змогла однозначно вибрати найкращу? Іншими словами, скільки ця людина готова заплатити, щоб взяти участь у подібній лотереї?

У межах даної теорії дві альтернативи вважаються еквівалентними, якщо їх очікувані корисності дорівнюють одна другій. Стосовно нашої нагоди повинні бути рівні очікувані корисності лотереї та гарантованої суми.

Очікувана корисність лотереї нам відома. Вона дорівнює Mu_L.

Володіння гарантованою сумою S є невипадковим, тому очікувана корисність цієї альтернативи дорівнює просто корисності цієї суми S.

$$Mu_S = u(S)$$

Тоді, можемо записати умову еквівалентності двох розглянутих альтернатив:

$$u(S) = Mu_L$$

На графіку однаковий рівень корисності задається горизонтальною прямою, яка паралельна осі абсцис і проходить на висоті, що відповідає заданому значенню корисності (рис. 10.4). Проведемо таку лінію на рівні очікуваної корисності лотереї Mu_L. Абсциса точки перетину цієї прямої з графіком функції корисності і буде тією сумою S, при якій альтернативи стануть рівноцінними.

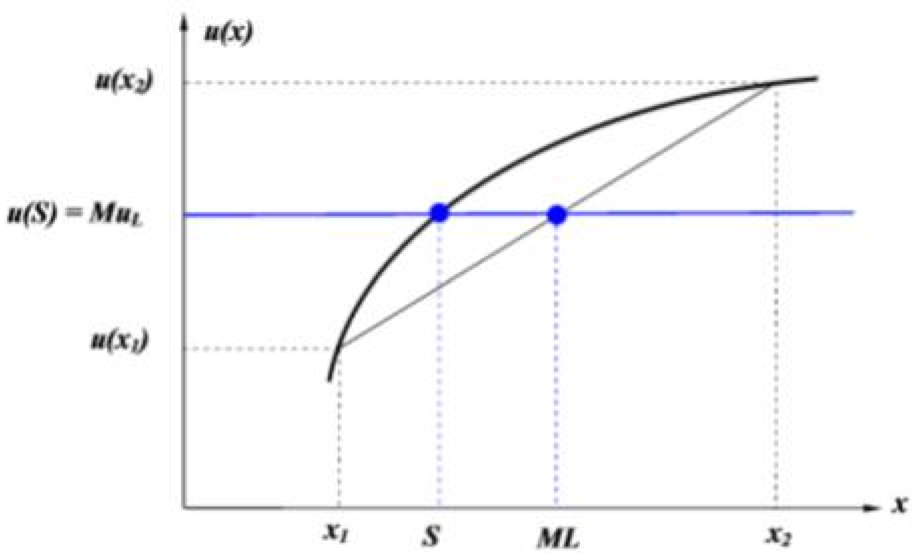


Рис. 10.4. Визначення детермінованого еквівалента.

Величину S називають "***детермінований еквівалент***" лотереї L.

Співвідношення очікуваного виграшу лотереї *ML* та її детермінованого еквівалента *S* може бути індикатором ставлення ОПР до ризику.

У розглянутому нами випадку з опуклим вгору графіком функції корисності детермінований еквівалент завжди менший від очікуваного виграшу:

$$S < ML$$

Це характерно для осіб, які негативно сприймають ризик.

Люди, схильні до ризику, що мають опуклий донизу графік корисності, навпаки, готові заплатити за участь у лотереї більше, ніж об'єктивно очікуваний виграш:

$$S > ML$$

Це можна пояснити тим, що сам факт участі в лотереї для них є певним психологічним благом, що становить додаткову корисність. І за це вони готові доплачувати.

У нейтральних до ризику людей детермінований еквівалент збігається з очікуваним виграшем:

$$S = ML$$

10.5. Побудова функції корисності

Теорія очікуваної корисності дійсно пояснює багато феноменів поведінки людини в ситуації ризику і може використовуватися при прийнятті рішень. Але суттєвою проблемою є те, що для конкретної ОПР функція корисності невідома! Оскільки вона описує ступінь психологічного задоволення благами даної особи, для її побудови неможливо використовувати лише об'єктивні оцінки. У будь-якому разі вона базується на суб'єктивних оцінках, які можуть бути отримані лише шляхом опитувань, анкетування або аналізу поведінки різних людей у подібних ризикових ситуаціях. Але не існує двох абсолютно однакових людей та повністю ідентичних умов. Крім того, вибір у штучно запропонованих при анкетуванні обставин може істотно відрізнятися від рішення, яке ця людина прийме в схожих, але реальних умовах! Тому точна ***побудова функції корисності*** дуже проблематична. Тим не менш, це можна намагатися зробити, і нижче ми розглянемо один із підходів до вирішення цієї задачі.

Функцію корисності можна побудувати за точками. Кожне значення виходить у результаті обробки відповіді ОПР на питання про вибір однієї з двох альтернатив. Одна – ризикова, інша – детермінована. В результаті відповіді необхідно оцінити, за яких параметрів ці дві альтернативи будуть з точки зору ОПР рівноцінні. Тоді, з рівності їх очікуваних корисностей, можна оцінити значення функції корисності для заданого значення багатства. Щоб було зрозуміліше, розглянемо приклад.

Людині пропонується відповісти на наступне запитання анкети:

У Вас є лише 100 тис. грн. і дві можливості...

(*A*) інвестувати їх у пайовий фонд на один рік і отримати через рік з ймовірністю 50/50 або 500 тис. грн., або 50 тис. грн.

(*B*) покласти їх на депозит у банк, і через рік гарантовано отримати з відсотками *S* грн.

Якою має бути величина *S*, щоб альтернативи (А) та (В) були для Вас рівноцінні?

Формально, ОПР, що володіє початковим багатством x_0 = 100 тис. грн., пропонується вибрати з двох альтернатив:

- ризикова *A* є простою лотереєю *A{50, 500, 0.5};*
- безризикова *B* гарантовано обіцяє *S* тис. грн.

Розглянемо альтернативу *A*. Її очікуваний результат може бути розрахований за загальною формулою математичного сподівання (тис. грн.):

$$MA = \sum_{j=1}^{2} p_j x_j = px_1 + (1-p)x_2 = 0.5 \times 500 + 0.5 \times 50 = 275$$

Очікувана корисність альтернативи *A* дорівнює:

$$Mu_A = p\ u(x_1) + (1\text{-}p)\ u(x_2) = 0.5\ u(50) + 0.5\ u(500)$$

Самої функції корисності $u(x)$ ми не знаємо. Але нам відомі деякі її властивості, наприклад те, що вона зростає. Іншою важливою властивістю, що ще не згадувалося, є її "нечутливість" до лінійних перетворень. Нагадаємо, що лінійні перетворення включають можливість додати або відняти постійні значення, а також помножити або розділити на постійну величину, відмінну від нуля. Нехай функція $u(x)$ отримана шляхом лінійних перетворень із функції $g(x)$:

$$u(x) = c_1\ g(x) + c_2\ ,\ де\ c_1,\ c_2 \text{ - } const,\ c_1 \neq 0$$

Тоді завдяки властивості функції корисності $u(x)$ буде описувати ту ж систему переваг, що і $g(x)$. Для порівняння альтернатив важливі не абсолютні значення корисності, а, те, як вони співвідносяться між собою. Якщо до перетворення виконувалася нерівність:

$$g(x_1) > g(x_2),$$

то після лінійних перетворень порядок збережеться, і корисність результату x_1, як і раніше, буде вищою за корисність результату x_2:

$$u(x_1) > u(x_2).$$

Ця властивість дозволяє нам прийняти за нуль значення функції корисності для будь-якого конкретного значення x і встановити будь-який одиничний поділ для вимірювання корисності. Тому, щоб було простіше будувати $u(x),$ приймемо:

$$u(50) = 0$$

$$u(500) = 1$$

Отже, нам відомі дві точки, якими проходить графік шуканої функції корисності $u(x)$: $O_1(50, 0)$ і $O_2(500, 1)$ (рис.10.5а).

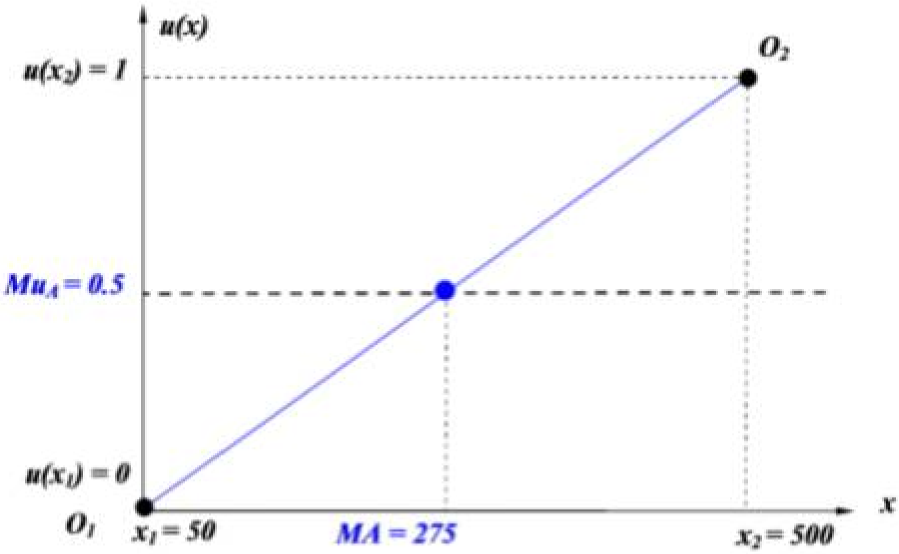


Рис.10.5а. Очікувана корисність ризикової альтернативи А.

Очікувана корисність альтернативи *A* при такому нормуванні функції корисності дорівнюватиме 0.5:

$Mu_A = 0.5\ u(50) + 0.5\ u(500) = 0.5 \times 0 + 0.5 \times 1 = 0.5$

Щоб альтернативи *A* та *B* були рівноцінні, їх очікувані корисності мають бути рівними:

$$Mu_A = Mu_B$$

Очікувана корисність альтернативи *B* дорівнює корисності гарантованої суми *S*, так як вона детермінована:

$$Mu_B = u(S)$$

Тоді

$$u(S) = Mu_A = 0.5$$

Тобто графік *u(x)* має проходити через точку з координатами (S, Mu_A), для нашого випадку (S, 0.5) (рис.10.5б).

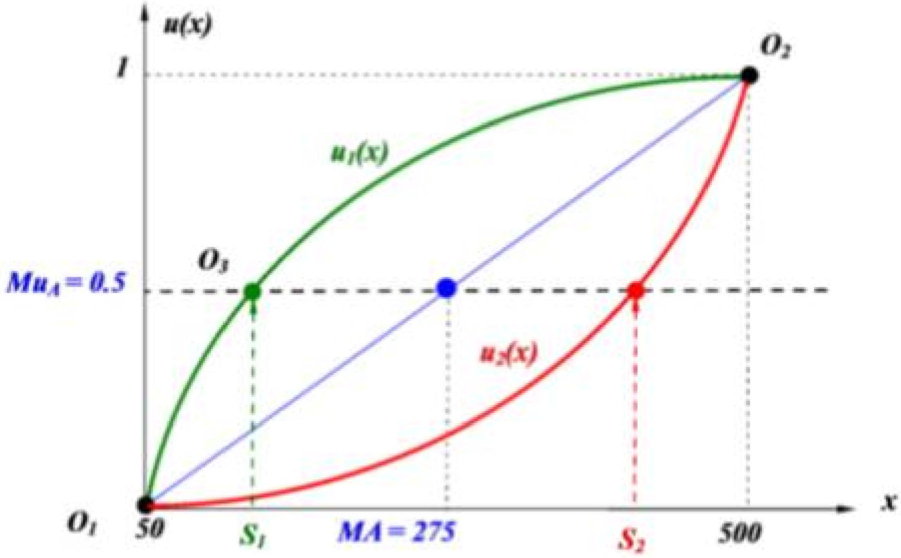


Рис.10.5б. Очікувана корисність безризикової альтернативи *B*.

Залежно від цього, яку суму S назвала ОПР у відповіді на питання анкети, графік може бути опуклим як вгору, і вниз.

Якщо названа ОПР сума S_1 буде меншою від очікуваного результату ризикової альтернативи

$$S_1 < MA,$$

це означає, що людина надає перевагу нехай і меншому, але гарантованому виграшу, що негативно ставиться до ризику, і функція корисності має опуклий вгору графік.

Якщо ж обрана ОПР сума більша за очікуваний виграш,

$$S_2 > MA,$$

ми маємо справу з особою, яка схильна до ризику і готова взяти участь у лотереї. Її приваблює шанс здобути виграш і не дуже лякає можливість втратити частину коштів. Для такої людини функція корисності буде опукла вниз.

У будь-якому випадку ми вже маємо три точки, через які проходить графік *u(x):* $O_1(50,\ 0)$, $O_2(500,\ 1)$, $O_3(S,\ 0.5)$. Ми можемо побудувати його хоча б приблизно (рис.10.5б).
Зазвичай при анкетуванні задають кілька питань з різними альтернативами та/або поєднаннями параметрів x_0, x_1, x_2, p. Це дозволяє будувати графік за більшою кількістю точок, що підвищує його точність. Проте, на жаль, доводиться визнати, що надійність таких оцінок не є високою.

10.6. Функція корисності, наближена до реальної

На практиці люди не обов'язково йдуть одному й тому підходу у різних ситуаціях. Залежно від того, з чим вони стикаються (втрати або виграші), і про які суми йдеться, одна і та сама людина може демонструвати як неприйняття ризику, так і схильність до нього. Тобто вид функції корисності реальної ОПР за різних значень багатства не однаковий. Вся множина можливих рівнів багатств умовно поділяється на кілька інтервалів, на кожному з яких проявляється своє ставлення до ризику та ступінь його неприйняття.

Економісти та психологи досліджували та продовжують досліджувати феномени та парадокси поведінки людей у ситуації ризику. Ця галузь науки розвивається і там, можливо, на нас чекають нові відкриття та пояснення існуючих фактів. Поки що ми наведемо тут лише приблизний вид ***функції корисності реальної людини*** (рис. 10.6) і відзначимо кілька виявлених у процесі вивчення особливостей. Відразу обмовимося, що це "збиральний усереднений образ" ставлення до ризику, складений на основі окремих досліджень, проведених у кількох країнах, на різних групах людей. Тому можна знайти розбіжність із власним ставленням до ризику та запропонувати свої пояснення чи спростування представлених гіпотез.

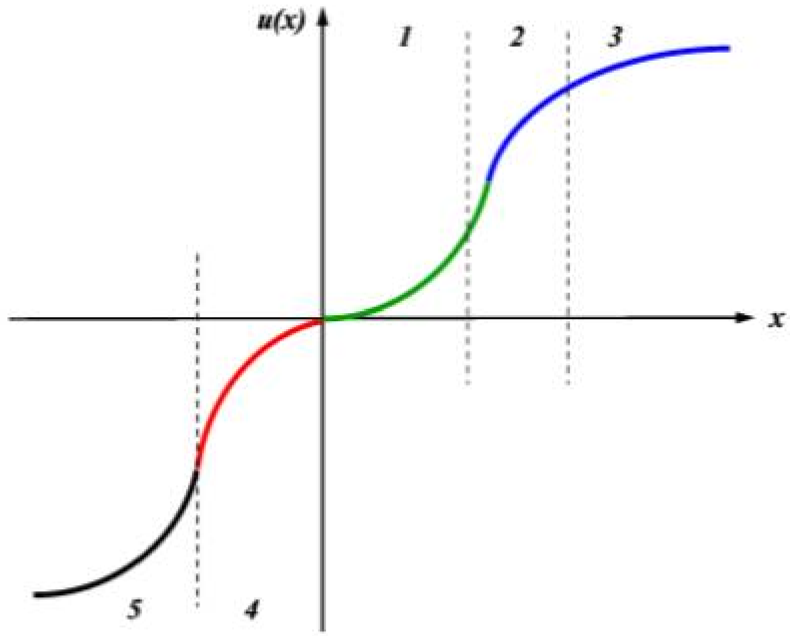


Рис. 10.6. Орієнтовний вид функції корисності реальної ОПР.

На представленому на рис. 10.6 графіку можна умовно виділити кілька діапазонів багатства *x*, де функція корисності *u(x)* веде себе по-різному. Для наочності за нуль приймемо поточний стан (багатство) людини.

Розглянемо спочатку область виграшів ($x>0$). На першому інтервалі (***область 1***), поки можливий прибуток відносно невеликий, люди можуть поводитися як нейтрали або навіть ризикофіли, готові ризикнути, щоб отримати трохи більше, ніж є. Однак у міру зростання можливих виграшів та гарантованих альтернатив (***область 2***) дедалі сильніше виявляється ризикофобний підхід. При виборі між безризиковою альтернативою, що гарантує досить високий дохід, і ще більшим, але випадковим виграшем, підвищується відсоток людей, які вибиратимуть детерміноване багатство. Поступово за дуже високих значень багатства (***область 3***) з'явиться "насичення". Отримання ще однієї тисячі чи мільйона вже не приноситиме стільки задоволення, як раніше, коли стан був дуже обмеженим. Цей ефект відзначено ще Бернуллі.

Тепер подивимося на область втрат ($x < 0$). По-перше, дослідження показують, що реальна людина чутливіша до втрат, ніж до виграшів. Цей ефект називають "неприйняття втрат" ("loss aversion"). Він проявляється по всій області збитків, але переважно характерний щодо невеликих і середніх значень (***область 4***). Однак у міру зростання збитків люди стають все менш чутливими до втрати ще однієї гривні. Тобто в області великих збитків (***область 5***) має місце таке саме "насичення", яке спостерігалося в районі значних багатств, тільки зі зворотним знаком. Завдяки такому "відзеркалювання" ставлення до великих сум, даний феномен отримав назву "ефект відображення" ("reflection effect").

Безумовно, дослідження, проведені на досить великих групах людей, можуть допомогти скласти функцію корисності " усередненої людини ". Їй можна скористатися, прогнозуючи очікувану поведінку потенційних акціонерів, споживачів, виборців тощо. Але вона не завжди застосовна для моделювання рішень конкретної людини.

Наприклад, якщо керівник змушений приймати рішення, яке має задовольнити певного "зовнішнього користувача" (наприклад, власника бізнесу), то йому необхідно мати уявлення не про усереднену функцію корисності, а про функцію корисності саме цієї конкретної людини. ОПР повинна знати, які збитки той вважає неприпустимими, заради яких гарантованих вигод той може відмовитися від ризикованого проекту, що обіцяє великий прибуток, тощо. Тільки тоді ухвалені ОПР рішення будуть адекватно оцінені цим зовнішнім користувачем. Зрозуміло, побудова точної функції корисності іншої особи за подібних умов практично неможлива. Найчастіше доводиться орієнтуватися на інтуїтивне розуміння ситуації та схожість в оцінці ризиків власника бізнесу та призначених ним керівників. Тим не менш, проблеми з побудовою функції корисності та з використанням її для прийняття рішень не виключають її теоретичної цінності.

10.7 Тести для самоконтролю знань

1. Хто ввів поняття функції корисності?

1) Д. Бернуллі*
2) Л. Ейлер
3) Ж. Д'Аламбер

2. При вивчення «петербурзького феномену» припускали

1) при порівнянні альтернатив реальна людина орієнтується на очікуване значення самого виграшу
2) при порівнянні альтернатив реальна людина орієнтується на математичне очікування суб'єктивної "корисності" виграшу*

3. Функція корисності використовується

1) при прийнятті рішень в умовах ризику*
2) при прийнятті рішень в умовах визначеності
3) при прийнятті рішень в умовах невизначеності
4) при прийнятті рішень в умовах конфлікту

4. Виберіть правильні відповіді:

1) функція корисності відбиває міру психологічного задоволення благами*
2) одиницею виміру корисності є "ютил"*
3) аргументом функції корисності виступає кількість благ*
4) в якості аргумента функції корисності використовуються грошові суми виграшів, прибутку чи збитків*

5. Виберіть правильне твердження

1) функція корисності має бути зростаючою і безперервною*
2) функція корисності має бути спадаючою
3) функція корисності має бути нейтральною
4) функція корисності має бути зростаючою
5) функція корисності має бути спадаючою і безперервною

6. Виберіть правильне твердження

$S > ML$

1) Для осіб, схильних до ризику*
2) Для осіб, які негативно сприймають ризик
3) Для осіб, нейтральних до ризику

7. Виберіть правильне твердження

S < *ML*

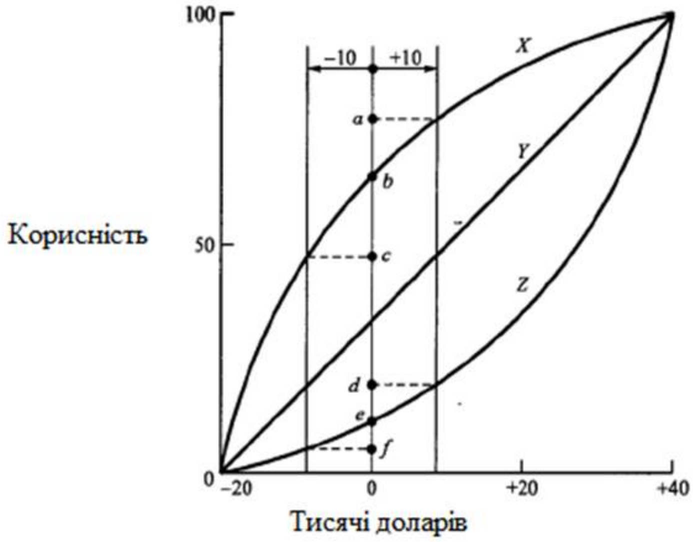
1) Для осіб, схильних до ризику
2) Для осіб, які негативно сприймають ризик*
3) Для осіб, нейтральних до ризику

8. Виберіть правильне твердження

S = *ML*

1) Для осіб, схильних до ризику
2) Для осіб, які негативно сприймають ризик
3) Для осіб, нейтральних до ризику*

9. Хто є ризикофобом?



1) *X**
2) *Y*
3) *Z*

10. Опукла ВГОРУ функція корисності –
Виберіть правильне твердження

1) відображає НЕПРИЙНЯТТЯ ризику*
2) відображає СКЛОННІСТЬ до ризику
3) відображає НЕЙТРАЛЬНЕ ставлення до ризику

ЧАСТИНА 2. ПРАКТИКА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Практичне завдання №1

Властивості бінарних відношень

1.1 Мета:

1) ознайомитися з методикою побудови матриць попарних порівнянь (МПП),
2) дослідити властивості МПП;
3) відновити загальний порядок серед об'єктів з використанням МПП.

1.2 Теоретичні відомості

В реальних ситуаціях часто буває важко або неможливо дати характеристику окремого об'єкта $d \in D$ у вигляді числового еквіваленту. Але якщо розглядати об'єкт не окремо, а в парі з іншим (d_i, d_j), то знаходяться підстави сказати, який з них краще $d_i \succ d_j$, тобто d_i переважає d_j.

Визначити бінарне відношення R означає вказати тим чи іншим способом всі пари об'єктів, для котрих виконується R. Існує три способи визначення бінарних відношень: переліком усіх пар, за допомогою графа, та у вигляді матриць парних порівнянь (МПП).

Елементи МПП можуть визначатись, наприклад так:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & d_i \succ d_j, \\ -1, & d_i \prec d_j, \\ 0, & d_i \cong d_j, \end{cases} \text{ де } d_i, d_j \in D, \tag{1.1}$$

$\succ$ – відношення «краще»,

$\prec$ – відношення «гірше»,

$\cong$ – відношення «однакові».

Наведемо основні властивості бінарних відношень R для об'єктів d_i, $d_j \in D$ на множині D:

1. Рефлексивність. Відношення R називається рефлексивним, якщо кожен об'єкт сам з собою знаходиться у відношенні R, тобто $d_i R d_i$, $\forall d_i \in D$. У

матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі стоять одиниці.

2. Антирефлексивність. Відношення R називається антирефлексивним, якщо воно є вірним (виконується) тільки для елементів, що не співпадають, тобто $d_i \overline{R} d_i$, $\forall d_i, d_j \in D$. У матриці антирефлексивного відношення на головній діагоналі стоять нулі.
3. Симетричність. Відношення R називається симетричним, якщо $d_i R d_j \Rightarrow d_j R d_i, \quad \forall d_i, d_j \in D$, тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_i. Матриця симетричного відношення симетрична.
4. Асиметричність. Відношення R називається асиметричним, якщо $d_i R d_j \Rightarrow d_j \overline{R} d_i, \quad \forall d_i, d_j \in D$, тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j не знаходиться у відношенні R з елементом d_i .
5. Антисиметричність. Відношення R називається антисиметричним, якщо $(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_i) \Rightarrow d_i = d_j, \quad \forall d_i, d_j \in D,$ тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що одночасне виконання відношень d_iRd_j і d_jRd_i неможливо для $d_i \neq d_j$, тобто обидва співвідношення виконуються тоді і тільки тоді, коли d_i *і* d_j - один і той самий об’єкт.
6. Транзитивність. Відношення R називається транзитивним, якщо $(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_z) \Rightarrow d_i R d_z, \quad \forall d_i, d_j, d_z \in D$, тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_z випливає, що елемент d_i знаходиться у тому ж відношенні R з елементом d_z.

Сполучення зі згаданих властивостей дозволяє визначити різні типи відношень об’єктів з множини D. Транзитивність відношень особливо важлива у теорії вибору та прийняття рішень, оскільки ця властивість виражає деякі природні взаємозв'язки між об'єктами. Зрозуміло, що циклічна тріада означає непослідовність в твердженнях експертів. Зауважимо, що чим менше циклічних тріад має МПП тим більш послідовним можна вважати експерта у своїх судженнях. Матриця називається узгодженою, коли в ній повністю відсутні циклічні тріади. Перевірка на транзитивність дозволяє проаналізувати і, у випадку необхідності, скорегувати логіку мислення експерта.

Ґрунтуючись на бінарних властивостях, які визначені для пар об'єктів $\forall d_i, d_j \in D$, можна провести ранжування всіх об'єктів на основі різних методів.

Один з підходів до структурування об'єктів ґрунтується на методі рядкових сум. Метод рядкових сум елементів МПП D полягає у визначенні ваг об'єктів $w_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, де n – загальна кількість об'єктів, з наступним відновленням за вагами об'єктів w_j їхнього порядку в загальному ранжуванні. Об'єкту з максимальним значенням w_j відводиться перше місце в ранжуванні, об'єкту з мінімальним значенням w_j – останнє місце.

1.3 Приклад виконання завдання

Розглянемо задачу прийняття рішення визначення найкращої мови програмування для системного аналітика.

У таблиці 1.1 представлено множину мов програмування, які може застосовувати системний аналітик:

Таблиця 1.1

Мова програмування	Формальна позначка
C#	d_1
C++	d_2
Java	d_3
Java script	d_4
PHP	d_5
Python	d_6

Порівняємо об'єкти множини між собою за ступенем значущості та результати порівнянь представимо відповідною МПП (табл. 1.2), де значення кожної комірки формується умовами (1.1).

- Об'єкт d_1 (C#) має однакову значимість з об'єктом d_2 (C++), тому в комірці d_{12} поставимо «0». Для мене ці мови програмування дуже схожі.
- Об'єкт d_1 (C#) краще по значимості за об'єкт d_3 (Java), тому в комірці d_{13} поставимо «1». Це тому, що в мові C# більш зрозумілий синтаксис, C# працює з файловою системою значно швидше, ніж Java.
- Об'єкт d_1 (C#) краще по значимості за об'єкт d_4 (Javascript), тому в комірці d_{14} поставимо «1».
- Об'єкт d_1 (C#) є краще по значимості за об'єкт d_5 (PHP), тому в комірці d_{15} поставимо «1».
- Об'єкт d_1 (C#) гірше по значимості за об'єкт d_6 (Python), тому в комірці d_{16} поставимо «-1». Це тому, що Python легко читати та вивчати завдяки синтаксису, схожому на англійську. Крім того, виключається використання крапки з комою після кінця оператора та роздільників для початку та кінця блоку.

Добавляємо стовпчик для підрахунку рядкових сум:

Таблиця 1.2.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\sum_{i=1}^{6} d_{ij}$
d_1	0	0	1	1	1	-1	2
d_2	0	0	1	1	0	-1	1
d_3	-1	-1	0	-1	1	-1	-3
d_4	-1	-1	1	0	1	-1	-1
d_5	-1	0	-1	-1	0	-1	-4
d_6	1	1	1	1	1	0	5

Заповнюємо лише верхню трикутну частину матриці, а нижню заповнюємо дзеркально-протилежно.

Методом рядкових сум встановлюємо порядок серед об'єктів і виділяємо найбільш значущий об'єкт. У табл.1.3 його виділено жовтим кольором.

Таблиця 1.3

Порядок	$\sum_{i=1}^{6} d_{ij}$	Мова програмування
d_6	5	Python
d_1	2	C#
d_2	1	C++
d_4	-1	Java script
d_3	-3	Java
d_5	-4	PHP

Порядок також можна представити ранжуванням: $d_6 \succ d_1 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_3 \succ d_5$

Перевіряємо матрицю на узгодженість експертних оцінок, або іншими словами на транзитивність відношень. Для цього перевіряємо послідовно всі можливі комбінації відношень на 3-х об'єктах за означенням транзитивності. Оскільки МПП заповнювалась протилежно-дзеркально, достатньо це зробити лише для верхньої трикутної частини.

Таблиця 1.4.

№	Комбінації 3-х об'єктів	Умова транзитивності	Відношення в таблиці 1.2	Узгодженість
1	d_1, d_2, d_3	$d_1 \cong d_2, d_2 \succ d_3$	Транзитивність не можна перевірити	
2	d_1, d_2, d_4	$d_1 \cong d_2, d_2 \succ d_4$	Транзитивність не можна перевірити	
3	d_1, d_2, d_5	$d_1 \cong d_2, d_2 \cong d_5 \Rightarrow d_1 \cong d_5$	$d_1 \succ d_5$	-
4	d_1, d_2, d_6	$d_1 \cong d_2, d_2 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
5	d_1, d_3, d_4	$d_1 \succ d_3, d_3 \prec d_4$	Транзитивність не можна перевірити	
6	d_1, d_3, d_5	$d_1 \succ d_3, d_3 \succ d_5 \Rightarrow d_1 \succ d_5$	$d_1 \succ d_5$	+
7	d_1, d_3, d_6	$d_1 \succ d_3, d_3 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
8	d_1, d_4, d_5	$d_1 \succ d_4, d_4 \succ d_5 \Rightarrow d_1 \succ d_5$	$d_1 \succ d_5$	+
9	d_1, d_4, d_6	$d_1 \succ d_4, d_4 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
10	d_1, d_5, d_6	$d_1 \succ d_5, d_5 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
11	d_2, d_3, d_4	$d_2 \succ d_3, d_3 \prec d_4$	Транзитивність не можна перевірити	

12	d_2, d_3, d_5	$d_2 \succ d_3, d_3 \succ d_5 \Rightarrow d_2 \succ d_5$	$d_2 \cong d_5$	-
13	d_2, d_3, d_6	$d_2 \succ d_3, d_3 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
14	d_2, d_4, d_5	$d_2 \succ d_4, d_4 \succ d_5 \Rightarrow d_2 \succ d_5$	$d_2 \cong d_5$	-
15	d_2, d_4, d_6	$d_2 \succ d_4, d_4 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
16	d_2, d_5, d_6	$d_2 \cong d_5, d_5 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	
17	d_3, d_4, d_5	$d_3 \prec d_4, d_4 \succ d_5$	Транзитивність не можна перевірити	
18	d_3, d_4, d_6	$d_3 \prec d_4, d_4 \prec d_6 \Rightarrow d_3 \prec d_6$	$d_3 \prec d_6$	+
19	d_3, d_5, d_6	$d_3 \succ d_5, d_5 \prec d_5$	Транзитивність не можна перевірити	
20	d_4, d_5, d_6	$d_4 \succ d_5, d_5 \prec d_6$	Транзитивність не можна перевірити	

Висновки. Перевірка на транзитивність показала що у 3 випадках з 6 можливих для перевірки, транзитивність була порушена. Це означає, що експерт у своїх оцінках був непослідовним.

1.4 Постановка завдання

Згенерувати множину з 5-6-7 об’єктів. Порівняти їх між собою за привабливістю (значущістю, важливістю тощо) методом парних порівнянь. Результати порівнянь зведіть у відповідну МПП. Визначити порядок привабливості та представити у вигляді ранжування. Перевірити матрицю на узгодженість експертних оцінок. Зробити висновки.

Приклади множин: види спорту, марки мобільних телефонів, перелік фірм спортивного взуття, жанри музики, перелік брендів одягу, перелік брендів парфумерії, жанри живопису, перелік предметів, що вивчаються на вашому курсі, перелік заходів, що складають підготовку до спортивних змагань, перелік браузерів, перелік марок мотоциклів, перелік марок автомобілів, перелік соціальних мереж, перелік жанрів кінофільмів, перелік видів танців, перелік музикальних груп

1.5 Порядок виконання завдання

1.5.1 Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

1.5.2 Сформулювати задачу, яка моделюється, з використанням апарату бінарних відношень (скористатись ЗПР, сформульованою у завданні або запропонувати свій варіант).

1.5.3 За попереднім вивченням ситуаційного завдання і вибором індивідуального варіанту вирішити поставлену задачу. Результати порівнянь між об'єктами звести в МПП.

1.5.4 Застосувавши до МПП метод рядкових сум, встановити кращий об'єкт і порядок ранжування.

1.5.5 Перевірити МПП на узгодженість оцінок (перевірка на транзитивність). Зробити висновки.

1.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки відповідно до наведеного прикладу.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

1.7 Контрольні запитання

1) Які властивості бінарних відношень мають особливе значення при аналізі МПП?

2) В яких випадках виникає нетранзитивність елементів матриці бінарних відношень? Яким чином вона перевіряється?

3) Як відновити за МПП порядок?

4) Які бувають типи цілей у ЗПР?

5) Які суб'єкти приймають участь в ПР? Які у них функції?

6) Які є види експертної інформації?

Практичне завдання №2

Експертне оцінювання методом Дельфі

2.1 Мета:

1) Організація експертного оцінювання методом Дельфі.

2) Оволодіння методикою застосування експертних оцінок для ранжування факторів, які впливають на ефективність системи.

3) Використання структурних і функціональних можливостей MS Excel для реалізації відповідних методів.

2.2 Теоретичні відомості

Основні етапи методу Дельфи:

1) уточнення проблем або об'єктів для експертизи;

2) формування групи експертів;

3) розробка анкети для опитування експертів;

4) індивідуальне анкетне опитування експертів;

5) математичне опрацювання результатів опитування;

6) уточнення експертами своїх оцінок.

Для формування стійкої узагальненої оцінки, етапи 4, 5, 6 можуть проводитися 3-4 рази.

Конкретний склад і чисельність групи експертів визначається характером аналізованих проблем, можливістю притягнення до експертизи компетентних спеціалістів. Ступінь компетентності експертів можна визначити за формулою:

$$K_k = \frac{K_з + K_a}{2}, \tag{2.1}$$

де $K_з$ – коефіцієнт ступеня знайомства експерта з проблемою, $0 \le K_з \le 1$;

K_a – коефіцієнт аргументованості рішень експерта, $0 \le K_a \le 1$.

Коефіцієнт ступеня знайомства експерта з проблемою $K_з$ визначається самооцінкою експерта за десятибальною шкалою (табл. 2.1) і множенням оцінки на число 0,1.

Таблиця 2.1

Бали	*Ступінь знайомства експерта з проблемою*
0	Експерт не знайомий з проблемою
1 – 3	Експерт погано знайомий, але проблема входить до кола інтересів
4 – 6	Експерт задовільно знайомий, але практично не займається
7 – 9	Експерт добре знайомий і займається практично
10	Експерт є вузьким спеціалістом з проблеми

Для одержання значення K_a може бути використана шкала аргументованості, приведена в табл.2.2. Експерт відмічає відповідну графу по кожному виду джерел, а потім числа з відзначених граф підсумовуються.

Таблиця 2.2

Джерело аргументів	*Ступінь впливу аргументів*		
	Високий	*Середній*	*Низький*
Теоретичний аналіз	0,3	0,2	0,1
Досвід	0,5	0,4	0,2
Література	0,1	0,08	0,04
Інтуїція	0,05	0,04	0,02

При упорядкуванні анкети необхідно додержуватися таких вимог:

- анкета не повинна містити багато питань; відповіді на питання не повинні займати багато часу;
- відповіді повинні даватися суворо в заданій шкалі оцінок;
- анкета, як правило, повинна бути анонімною.

Доцільно застосовувати 10 або 100 – бальні шкали оцінок із невеличким числом градацій, кожна градація повинна бути однозначно описана. Всі n оцінок, отримані в ході опитування групи з m експертів, зводяться в матрицю:

$$C = (c_{ij}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \tag{2.2}$$

При цьому деякі з оцінок можуть бути відсутніми, якщо експерт утримався від оцінки якогось чинника. Узагальнена оцінка важливості чинника обчислюється за формулою:

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}}{m_j}, \ 1 \le j \le n, \qquad (2.3)$$

де M_j – узагальнена оцінка важливості j-го чинника;

m_j – кількість експертів, що оцінили j-ий чинник, ($m_j \le m$);

c_{ij} – оцінка в балах, дана i-м експертом j-му чиннику .

З урахуванням коефіцієнта компетентності:

$$M_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} K_k c_{ij}}{m_j}, \ 1 \le j \le n, \qquad (2.4)$$

Після того, як усі узагальнені оцінки важливості кожного чинника обраховані можна їх проранжувати. Очевидно, що чим важливіший чинник, тим більше його узагальнена оцінка і тим менший ранг йому відводиться у загальному ранжуванні. На перше місце ставимо критерій з найвищою оцінкою, на друге – з меншою, на останнє – із найменшою оцінкою.

Наостанок, для визначення відносних коефіцієнтів значимості часткових критеріїв, можна використати просту функцію ранжирування:

$$\lambda_j = 2 \cdot \frac{(n+1) - R_j}{n(n+1)}, \ 1 \le j \le n, \qquad (2.5)$$

де R_j – ранг j-го критерію, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

2.3 Приклад виконання завдання

Етап 1. Розробка анкети для опитування експертів.

Можливий варіант анкети:

Шановний експерт ______________________ !

(Ім’я ПРІЗВИЩЕ)

Просимо Вас оцінити ступінь важливості (пріоритетності) таких напрямків дослідження:

(далі відповідно до завдання)

№	Назва напрямку дослідження	Оцінка в балах
1		
2		
3		
…		

Оцінку кожному із запропонованих напрямків просимо виставити по такій 10- бальній шкалі:

0	Напрямок не впливає на дослідження
1 – 2	Напрямок робить слабкий вплив, його варто врахувати в майбутньому
3 – 5	Напрямок впливає, але важно реалізувати
6 – 7	Напрямок має істотній вплив
8 – 10	Напрямок є важливим і актуальним, реалізується в першу чергу

Етап 2. Формування групи експертів та оцінка їх компетентності.

В умовах виконання даного практичного завдання в якості експертів виступають студенти, що об'єднуються по 3-5 чоловіка в одну групу. Таким чином, подальше виконання завдання здійснюється окремо кожною групою студентів.

Кожний експерт, користуючись шкалою оцінки ступеня знайомства (табл. 2.1) і шкалою оцінок аргументованості думок (табл. 2.2), визначає коефіцієнт компетентності. Припустимо, що експерт вважає, що він задовільно знайомий із проблемою, але практично нею не займається, тоді його коефіцієнт ступеня знайомства дорівнює:

$$K_з = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4.$$

Якщо при цьому він вважає, що для нього характерний високий ступінь теоретичного аналізу, досвіду і матеріалів із літератури, а вплив інтуїції має середній ступінь, то його коефіцієнт аргументованості дорівнює:

$$K_a = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}04 = 0{,}94.$$

Тоді значення $K_к$ для цього експерта за (2.1) буде дорівнювати:

$$K_к = \frac{0{,}4 + 0{,}94}{2} = 0{,}67.$$

Зведемо результати оцінки компетентності експертів у табл.2.3:

Таблиця 2.3

№ експерта	*Ступінь знайомства*	*Джерела аргументів*				$K_к$
		Теоретичний аналіз	*Досвід*	*Література*	*Інтуїція*	
1	0,4	0,3	0,5	0,1	0,04	0,67
2	0,6	0,3	0,4	0,08	0,02	0,7
3	0,7	0,1	0,2	0,04	0,05	0,545
4	0,1	0,2	0,4	0,08	0,02	0,4

Етап 3. Математичне опрацювання результатів опитування.

Експерти оцінювали проблему за 6 критеріями. Позначимо їх $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$. Оцінки, отримані в ході опитування 4 експертів, зібрані в таблиці 2.4

Таблиця 2.4

Експертні дані, отримані з анкет						
№ експерта	*Критерії*					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1	8	10	9	8	5	6
2	10	10	10	9	10	6
3	1	4	2	7	3	2
4	4	8	6	3	2	4

Для кожного критерію за формулою (2.4) розрахуємо узагальнену оцінку його важливості з урахуванням компетентності експертів.

Потім проранжуємо: чим вища узагальнена оцінка важливості критерія, тим нижче його ранг.

Далі визначимо відносні коефіцієнти значимості часткових критеріїв за формулою (2.5).

Результати обчислень запишемо у таблицю 2.5.

Таблиця 2.5

	Критерії					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
M_j	3,62625	4,77	4,13	4,16875	3,19635	2,7275
R_j	4	1	3	2	5	6
λ_j	0,142857	0,285714	0,190476	0,238095	0,095238	0,047619

Зробимо перевірку $\sum_{j=1}^{6} \lambda_j = 1$.

Висновок. Отримали результуюче ранжування часткових критеріїв:

$$f_2 \succ f_4 \succ f_3 \succ f_1 \succ f_5 \succ f_6$$

2.4 Варіанти завдання

Варіант 1

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки удосконалення вищої освіти в країні.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі напрямки удосконалення вищої освіти:

1. Поліпшення матеріального забезпечення ВНЗ.
2. Зниження оплати за навчання.
3. Підвищення вимог до абітурієнтів і до оцінки знань студентів.
4. Об'єднання навчання у ВНЗ з роботою на виробництві за фахом.
5. Підвищення заробітної плати викладачам ВНЗ.
6. Підвищення вимог до атестації професорсько-викладацького складу.
7. Притягнення виробничників до читання лекцій і керівництва курсовими і дипломними проєктами.

Варіант 2.

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки дослідження кон'юнктури ринку продукції А.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі напрямки дослідження кон'юнктури ринку продукції:

1. Динаміка виробництва даної продукції і її аналогів усередині країни і за кордоном.
2. Вплив науково-технічного прогресу на споживчі властивості і конструкторсько- технологічні параметри продукції.
3. Динаміка навантаження виробничих потужностей і наявність їх резерву на даному підприємстві й інших підприємствах усередині країни і за кордоном.
4. Динаміка поточних витрат виробництва і потреб у капітальних вкладеннях.
5. Динаміка споживання (попиту) продукції і причини її зміни усередині країни і за кордоном.
6. Динаміка поточних витрат і супутніх капітальних вкладень у споживачів продукції, пов'язаних із споживанням цієї продукції.

7. Тенденції науково-технічного прогресу в галузях – споживачах продукції і вплив їх на споживання (попит).

Варіант 3.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки визначення експертного потенціалу.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні показники експертного потенціалу:

1. високий рівень інтелекту;
2. великий досвід роботи;
3. визнання колег;
4. активна наукова діяльність;
5. наявність серйозних публікацій;
6. престижна освіта;
7. високий особистий статус.

Варіант 4.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки підвищення рівня відповідальності державних органів та прозорості.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні низки заходів для підвищення рівня відповідальності державних органів та прозорості:

1. проведення громадських експертиз діяльності органів виконавчої влади;
2. подання запитів на публічну інформацію до органів державної влади з метою отримання суспільно важливої інформації;
3. оскарження незаконних відмов у доступі до інформації до компетентних органів державної влади та до суду;
4. створення «гарячої лінії» для громадських організацій та представників ЗМІ;
5. моніторинг прозорості діяльності органів державної влади;
6. лобіювання та підтримка прогресивних змін і доповнень до чинних нормативно-правових актів;
7. популяризація демократичних стандартів у сфері доступу до інформації через проведення освітніх заходів та публікації у ЗМІ.

Варіант 5.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки використання ІТ студентами.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати пріоритетні напрямки використання ІТ студентами:

1. для презентації матеріалів, тем на заняттях;
2. для розвитку навичок мислення високого рівня;
3. для пошуку інформації, щоб підготувати завдання;
4. для самостійних навчальних досліджень;
5. для спілкування та розваг;
6. для проведення дозвілля, показу фільмів, перегляду фото тощо.

Варіант 6.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки вдосконалення радіоаматорської сфери діяльності.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи.

1. комп’ютеризація радіопередаючої апаратури;
2. заміщення аналогових видів діяльності цифровими;
3. нові стандарти та розширення діапазону радіоаматорських частот;
4. співпраця зі службами спасіння та пошуку людей, зокрема службою «112»;
5. залучення радіоаматорів до участі у глобальних проектах, наприклад, «Вивчення Місяця»;
6. популяризація радіоаматорства серед молоді шляхом організації радіоаматорських кружків на базі шкіл.

Варіант 7.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки оцінювання фахових якостей претендентів на роботу в офісі.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати пріоритетні напрямки оцінки претендентів:

1. вищий учбовий заклад, який закінчив претендент;
2. володіння комп’ютером;
3. володіння іноземною мовою;
4. водіння автомобілю;
5. стаж роботи;
6. віковий ценз.

Варіант 8.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки для вибору побутової техніки споживачами.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати пріоритетні напрямки вибору техніки:

1. ціна;
2. гнучкість розрахунку;
3. простота експлуатації;
4. дизайн;
5. відмовостійкість;
6. країна-виробник

Варіант 9.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки діяльності дитячих громадських організацій.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати пріоритетні напрямки діяльності дитячих громадських організацій:

1. соціально-правовий захист дітей;
2. самоврядування, формування лідерських навичок;
3. надання додаткових знань;
4. проведення благодійних акцій;
5. соціальна робота;
6. патріотичне виховання.

Варіант 10.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні критерії вибору замовника для розробки інформаційної системи.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати пріоритетні критерії вибору замовника для розробки інформаційної системи:

1. пропозиції замовника щодо вартості роботи;
2. репутація замовника;
3. терміни виконання;
4. країна виконавця;
5. можливості фірми щодо виконання роботи.

Варіант 11.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки оптимізації роботи колл-центру.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі напрямки оптимізації роботи колл-центру:

1. Оновлення архітектури програмного та апаратного забезпечення.

2. Навчання персоналу на спеціальних тренінгах.
3. Використання автоматичної системи інтерактивної взаємодії (IVR) для економії часу.
4. Переведення операторів на online працю.
5. Ведення статистики та бізнес-аналізу.
6. Маршрутизація викликів за їх специфікою.
7. Система заохочень та штрафів для персоналу

Варіант 12.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні за фінансуванням держави напрямки розвитку науки і техніки.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки розвитку науки і техніки:

1. Фундаментальні наукові дослідження.
2. Інформаційні та комунікаційні технології.
3. Енергетика та енергоефективність.
4. Раціональне природокористування.
5. Наука про життя, нові технології профілактики та лікування найпоширеніших захворювань.
6. Нові речовини і матеріали.

Варіант 13.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки оптимізації соціального захисту громадян.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі напрямки оптимізації соціального захисту громадян:

1. Узгодження соціальної політики з політикою зайнятості, фінансово-економічною та фіскальною політикою.
2. Перегляд наявних пільг і соціальних виплат з метою посилення їх адресності й обґрунтованості.
3. Розширення інфраструктури надання соціальних послуг за місцем проживання.
4. Залучення громадськості до обговорення та участі у визначення державних соціальних стандартів.
5. Приведення державних соціальних стандартів у відповідність із міжнародно-правовими актами .
6. Координація та моніторинг надання тих соціальних послуг, які найбільше відповідають потребам населення конкретної території.

Варіант 14.

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки оптимізації бізнес-процесів.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки оптимізації бізнес-процесів:

1. Скорочення витрат, тривалості та кількості помилок у кожному з проаналізованих процесів.
2. Інтегрування працівників та керівників підприємства зі стратегією компанії та ключовими показниками її ефективності.
3. Ефективне впровадження інформаційних технологій.
4. Поліпшення взаємодії між працівниками та підрозділами підприємства.
5. Зростанні інвестиційної привабливості підприємства
6. Ефективний організаційний редизайн.

Варіант 15.

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки вдосконалення інформаційного бізнесу.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки вдосконалення інформаційного бізнесу:

1. Удосконалення механізму правового захисту програмних продуктів як об’єкта інтелектуальної власності.
2. Удосконалення договірних відносин за розроблення та продажу програмних продуктів, наданні інформаційно-обчислювальних послуг.
3. Запобігання розробленню і поширенню програмних зловживань (вірусні програми).
4. Розроблення механізму електронного документообігу та електронної звітності тощо.
5. Формування інформаційної інфраструктури об’єктів різних рівнів і статусу.
6. Розробка методичних основ оцінювання конкурентоспроможності апаратних і програмних засобів.
7. Формування системи інформаційного маркетингу тощо.

Варіант 16.

За допомогою експертного аналізу визначити суттєві прояви групових ефектів під час спільної колективної діяльності колег.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі прояви групових ефектів під час спільної колективної діяльності:

1. Ефект групового мислення.
2. Ефект конформізму, коли коли фіксується наявність конфлікту між думкою індивіда і думкою групи і подолання цього конфлікту на користь групи.
3. Ефект групового егоїзму, коли цілі групи досягаються за рахунок інтересів усієї спільноти та окремих особистостей групи.
4. Ефект маятника, коли позитивні (негативні) події підвищують (знижують) загальний рівень групової продуктивності.
5. Ефект пульсара: підвищення групової активності під впливом різних стимулів, або ж зниження групової активності за відсутності таких.
6. Ефект хвилі: поширення позитивних ідей, цілей тощо, які не суперечать інтересам групи.
7. Ефект «ми» і «вони»: співучасність, емоційна підтримка членів групи, груповий егоїзм.

Варіант 17.

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки удосконалення педагогічного процесу у вищій школі.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки удосконалення педагогічного процесу у вищій школі:

1. Інтеграція науки, освіти і практики.
2. Підвищення науково-теоретичного рівня і зміцнення практичної спрямованості.
3. Вдосконалення підготовки викладачів ВНЗ та їх педагогічної майстерності.
4. Використання сучасних концепцій і методів навчання.
5. Технічне переобладнання педагогічного процесу.
6. Гуманізація та демократизація педагогічного процесу.

Варіант 18.

За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки інформаційної безпеки корпоративних інформаційних систем.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки удосконалення інформаційної безпеки корпоративних інформаційних систем:

1. Контроль використання зйомних носіїв і запуск додатків.
2. Забезпечення безпеки міжмережевої взаємодії.
3. Криптографічний захист інформації.
4. Управління подіями безпеки.
5. Контроль використання Інтернет-ресурсів і фільтрація веб-трафіку.
6. Захист від поштового спаму.

7. Управління доступом до інформаційних ресурсів корпоративних інформаційних систем.

Варіант 19.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні напрямки інноваційної діяльності.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі стратегічні напрямки інноваційної діяльності:

1. Модернізація електростанцій; нові та відновлювальні джерела енергії; новітні ресурсозберігаючі технології.
2. Нанотехнології, мікроелектроніка, інформаційні технології, телекомунікації.
3. Вдосконалення хімічних технологій, розвиток біотехнологій; нові маетріали.
4. Високотехнологічний розвиток сільського господарства і переробної промисловості.
5. Транспортні системи: будівництво і реконструкція.
6. Охорона і оздоровлення людини та навколишнього середовища.
7. Розвиток інноваційної культури суспільства.

Варіант 20.
За допомогою експертного аналізу визначити пріоритетні за фінансуванням держави напрямки розвитку науки і техніки.

Уточнення проблем або об'єктів експертизи. Можна запропонувати такі основні напрямки розвитку науки і техніки:

1. Фундаментальні наукові дослідження.
2. Формування демографічної політики, розвиток людського потенціалу.
3. Інформаційні та комунікаційні технології.
4. Новітні ресурсозберігаючі технології в енергетиці, промисловості та агропромисловому комплексі.
5. Раціональне природокористування.
6. Нові біотехнології, діагностика і методи лікування найпоширеніших захворювань.
7. Нові речовини і матеріали.

2.5 Порядок виконання завдання

2.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

2.5.2. Розробити анкети для експертного опитування з відповідної проблемної ситуації. За експертами залишається право доповнити список можливих напрямків.

2.5.3. Включити в експертне опитування процедуру визначення коефіцієнта компетентності методом самооцінки.

2.5.4. Сформувати групу експертів та провести експертне оцінювання методом Дельфі.

2.5.5. Результати експертного оцінювання звести в таблицю. За результатами експертного оцінювання виявити:

- узагальнену оцінку важливості кожного чинника ***без*** та ***з урахуванням*** коефіцієнта компетентності експерта;
- проранжувати всі чинники за ступенем їх важливості;
- визначити відносні коефіцієнти значимості чинників. Зробити перевірку перед тим як робити висновки.

2.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки відповідно до наведеного прикладу.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

2.7 Контрольні запитання

1) У чому полягає метод експертних оцінок Дельфі?

2) Яким чином можна перевірити значимість інформації, отриманої від експертів?

3) Як розраховується сумарний (результуючий) ранг?

4) Як визначається вага факторів (цілей), визначених експертами?

<u>Практичне завдання №3</u>

Методи багатокритеріальної оптимізації

3.1 Мета:

1) Оволодіння методикою аналізу багатокритеріальних задач на предмет парето-оптимальних (ефективних) рішень.

2) Розв'язок формалізованих задач в умовах багатокритеріальності.

3) Використання структурних і обчислювальних можливостей MS Excel для реалізації відповідних методів.

3.2 Теоретичні відомості

Загальна постановка ЗПР в умовах визначеності описується кортежем (D, Y, P), де D – множна альтернатив для вибору; Y – множина наслідків; P – вирішальне правило (правило оптимальності). Якщо для кожної альтернативи наслідок оцінюється не безпосередньо, а за допомогою заданих на D числових функцій $f_1, f_2, ..., f_m$, які називаються критеріями (показниками корисності чи ефективності, критеріальними функціями, цільовими функціями і т.п.), то ЗПР називається багатокритеріальною.

У задачах прийняття індивідуальних рішень критерії слугують для вираження «інтенсивності» істотних властивостей (ознак) рішень. Наприклад, при порівнянні деяких виробів можуть використовуватися такі критерії, як маса, вартість, дата випуску, зовнішній (товарний) вид і т.п.

За своїм характером критерії поділяються на кількісні і якісні. У більшості випадків кількісні критерії відповідають вимірам об'єктивних (фізичних) властивостей. Критерії, що мають порядкову шкалу, називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати тільки за відношенням "більше", "менше" і "дорівнює" - вони зберігаються при монотонних перетвореннях. Критерій з порядковою шкалою природним чином виникає в тих випадках, коли розв'язки ранжуються. Дуже часто суб'єктивні виміри виконуються в бальних шкалах. Наприклад, експерти можуть оцінювати у балах зовнішній вигляд виробу. Критерії з бальними шкалами займають "проміжне" положення між кількісними і якісними критеріями.

Згідно з методом багатокритеріальної оптимізації за Парето вважається, що альтернатива d_i має переваги порівняно з альтернативою d_j у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща ніж d_j хоча б за одним критерієм. При цьому альтернатива d_i називається домінуючою**,** альтернатива d_j називається домінованою. Для звуження початкової множини альтернатив найбільш універсальною процедурою є виключення із неї усіх домінованих (неефективних) альтернатив. Парето-оптимальність рішення означає, що воно не може бути поліпшено по жодному з критеріїв без погіршення по якомусь іншому критерію.

Універсальний принцип вибору полягає в тому, що вибір слід здійснювати лише для парето оптимальних об'єктів. Практично це означає, що першим етапом розв'язку для будь-якої багатокритеріальної ЗПР є виключення домінованих альтернатив.

Широко відомим підходом є метод розв'язку багатокритеріальних задач, заснований на "згортанні" векторного критерію в одну функцію - узагальнений (чи агрегований) критерій, та подальша його оптимізація на множині альтернатив.

Метод ідеальної точки.

Цей метод, застосовується у випадку, коли у ОПР відсутнє чітке уявлення про перевагу на множині критеріїв. В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого, „оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну однокритеріальну задачу. Від ОПР вимагається інформація про оптимальні (ідеальні) значення критеріїв на множині їх визначення, або ці значення вибираються як max(min) досяжні значення критеріїв на області їх визначення.

Ідеальною називається точка з оптимальними числовими оцінками по всім критеріям $d^{opt} = (d_1^{opt}, d_2^{opt}, ..., d_m^{opt})$, *m* – кількість критеріїв. Правило вибору компромісу у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки в деякій метриці.

Для лінійної метрики знайдемо компромісну оцінку як рішення однокритеріальної задачі на множині всіх альтернатив *D*

$$d^* = \min_{d \in D} \sum_{i=1}^{m} | d_i^{opt} - d_i |, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.1}$$

Компромісну оцінку також можна знайти за наступною флокулою

$$d^* = \min_{d \in D} \max_i | d_i^{opt} - d_i |, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.2}$$

При цьому можуть виникати дві проблеми непорівняльністі критеріїв:

1) різні шкали їх визначення,
2) різний напрямок оптимізації критерію.

Ці проблеми вирішуються процедурою нормалізації критеріїв (їх зводять до безрозмірної шкали [0, 1]), наприклад монотонною функцією:

$$w(d_i^j) = \frac{d_i^{opt} - d_i^j}{d_i^{opt} - d_i^0}, \tag{3.3}$$

де d_i^j - значення параметру *i*, *i* = 1, 2, …, *m*, $d^j \in D$;

d_i^{opt} - найкраще значення параметру *i*, *i* = 1, 2, …, *m*, на множині допустимих об’єктів *D*;

d_i^0 - найгірше значення параметру *i*, *i* = 1, 2, …, *m*, на множині допустимих об’єктів *D*.

Функція $w(d_i^j)$, $d^j \in D$, визначає ступінь відхилень від оптимальних значень для кожного параметра об‘єкта d_i^j, та переводить всі значення параметрів об’єктів до безрозмірного вигляду у інтервалі [0, 1], причому чим менші значення $w(d_i^j)$, тим ближче параметри об‘єкта d_i^j знаходяться до своїх оптимальних значень.

З урахуванням процедури нормалізації (3.3) формули (3.1) та (3.2) перепишуться ($d^j \in D$):

$$d^* = \min_{d \in D} \sum_{i=1}^{m} | w(d_i^j) |, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.4}$$

$$d^* = \min_{d \in D} \max_{i} | w(d_i^j) |, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.5}$$

Якщо ОПР має інформацію про відносну важливість критеріїв

$$\rho_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1, \tag{3.6}$$

то за допомогою згортки можна застосувати узагальнений критерій типу ($d^j \in D$):

$$F = \min_{j} \sum_{i=1}^{m} \rho_i w(d_i^j), \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.7}$$

або

$$F = \min_{j} \max_{i} (\rho_i w(d_i^j)), \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.8}$$

В якості розв'язку вибирається той об'єкт, який оптимізує відповідно критерій (3.7) або (3.8). Процедура призначення критеріям вагових коефіцієнтів може застосовуватись у різних формах – безпосереднє призначення критеріям вагових коефіцієнтів вигляду (3.4), або ранжування критеріїв з їх наступною нормалізацією.

3.3 Приклад виконання завдання

Менеджеру потрібно встановити перевагу на множині претендентів на посаду головного бухгалтера, аналізуючи дані резюме претендентів, що оцінюються критеріями f_1 – очікувана заробітня плата (грн.), f_2 – стаж роботи (роки), f_3 – вік, представленими в табл.3.1:

Таблиця 3.1.

№	ПІБ	f_1	f_2	f_3
1	Бурикін А.О.	21000	5	30
2	Гвінто М.Є.	30000	10	35
3	Іванов Г.І.	16000	3	25
4	Степановський В.Е.	40000	30	50
5	Дьяченко Є.Б.	14000	1	23
6	Калабуха Д.В.	15000	0	20
7	Кіглюк А.П.	30000	25	50
8	Суліган Р.А.	14000	4	30

Спочатку визначимо напрямок оптимізації значень по кожному критерію, вигідний з *позиції менеджера* (табл. 3.2).

Таблиця 3.2.

№	ПІБ	f_1	f_2	f_3
	Напрямок оптимізації	*min*	*max*	*[30, 40]*
1	Бурикін А.О.	21000	5	30
2	Гвінто М.Є.	30000	10	35
3	Іванов Г.І.	16000	3	25
4	Степановський В.Е.	40000	30	50
5	Дьяченко Є.Б.	14000	1	23
6	Калабуха Д.В.	15000	0	20
7	Кіглюк А.П.	30000	25	50
8	Суліган Р.А.	14000	4	30

Далі застосуємо до векторів критеріїв універсальний принцип Парето, порівнюючи їх між собою і відсіюючи доміновані.

Так, наприклад, Дьяченко Є.Б. (14000, 1, 23) за показником *Очікувана зарплата* однаковий з Суліган Р.А. (14000, 4, 30), але за показниками *Стаж роботи* та *Вік* поступається йому. Отже, (14000, 4, 30) ≥ (14000, 1, 23), тобто альтернатива Суліган Р.А. (14000, 4, 30) $\succ$ альтернатива Дьяченко Є.Б. (14000, 1, 23). Альтернатива Дьяченко Є.Б. (14000, 1, 23) є домінованою і її можна виключити з подальшого розгляду.

Проаналізувавши таким чином табл.3.2, отримуємо табл.3.3, де жовтим кольором позначені доміновані претенденти, які з подальшого розгляду вилучаються.

Таблиця 3.3.

№	ПІБ	f_1	f_2	f_3
	Напрямок оптимізації	*min*	*max*	*[30, 40]*
1	Бурикін А.О.	21000	5	30
2	Гвінто М.Є.	30000	10	35
3	Іванов Г.І.	16000	3	25
4	Степановський В.Е.	40000	30	50
5	Дьяченко Є.Б.	14000	1	23
6	Калабуха Д.В.	15000	0	20
7	Кіглюк А.П.	30000	25	50
8	Суліган Р.А.	14000	4	30

Застосуємо до задачі *метод ідеальної точки*. За напрямками оптимізації визначимо: d^{opt} = (14000, 30, [30, 40]), d^0=(40000, 4, 50) та приведемо критерії до нормалізованого вигляду (3.3).

Тоді саму таблицю з результатами обчислень за формулами (3.4) і (3.5) можна представити таким чином:

Таблиця 3.4

№	ПІБ	$w(f_1)$	$w(f_2)$	$w(f_3)$	$\sum_{i=1}^{3}\frac{\lvert d_i^{opt}-d_i^j\rvert}{\lvert d_i^{opt}-d_i^0\rvert}$	$\max_i \lvert\frac{d_i^{opt}-d_i^j}{d_i^{opt}-d_i^0}\rvert$
1	Бурикін А.О.	0,27	0,96	0	1,23	0,96
2	Гвінто М.Є.	0,62	0,77	0	1,38	0,77
3	Степановський В.Е.	1	0	1	2	1
4	Кіглюк А.П.	0,62	0,19	1	1,81	1
5	Суліган Р.А.	0	1	0	1	1

.

Знаходимо мінімальні значення:

Таблиця 3.5

№	ПІБ	$w(f_1)$	$w(f_2)$	$w(f_3)$	$\sum_{i=1}^{3}\frac{\lvert d_i^{opt}-d_i^j\rvert}{\lvert d_i^{opt}-d_i^0\rvert}$	$\max_i \lvert\frac{d_i^{opt}-d_i^j}{d_i^{opt}-d_i^0}\rvert$
1	Бурикін А.О.	0,27	0,96	0	1,23	0,96
2	Гвінто М.Є.	0,62	0,77	0	1,38	0,77
3	Степановський В.Е.	1	0	1	2	1
4	Кіглюк А.П.	0,62	0,19	1	1,81	1
5	Суліган Р.А.	0	1	0	1	1

З таблиці 3.5 бачимо, що отримали різних претендентів на вакантну посаду. За формулою (3.4) – Суліган Р.А., за формулою (3.5) – Гвінто М.Є.

Нехай ОПР визначила важливість критеріїв і дала додаткову інформацію про «ваги» критеріїв: найважливіший для відбору критерій заробітня плата ρ_1 = 0,5, далі – стаж роботи ρ_2 = 0,3, далі – вік претендента ρ_3 = 0,2.

Результати відповідних обчислень представлено в табл.3.6

Таблиця 3.6

№	ПІБ	$w(f_1)$ ρ_1=0,5	$w(f_2)$ ρ_2=0,3	$w(f_3)$ ρ_3=0,2	$\sum_{i=1}^{3}\frac{\mid d_i^{opt}-d_i^j\mid}{\mid d_i^{opt}-d_i^0\mid}$	$\max_i \mid\frac{d_i^{opt}-d_i^j}{d_i^{opt}-d_i^0}\mid$
1	Бурикін А.О.	0,27	0,96	0	0,42	0,28
2	Гвінто М.Є.	0,62	0,77	0	0,54	0,31
3	Степановський В.Е.	1	0	1	0,7	0,5
4	Кіглюк А.П.	0,62	0,19	1	0,57	0,31
5	Суліган Р.А.	0	1	0	0,3	0,3

Знаходимо мінімальні значення:

Таблиця 3.7

№	ПІБ	$w(f_1)$ ρ_1=0,5	$w(f_2)$ ρ_2=0,3	$w(f_3)$ ρ_3=0,2	$\sum_{i=1}^{3}\frac{\mid d_i^{opt}-d_i^j\mid}{\mid d_i^{opt}-d_i^0\mid}$	$\max_i \mid\frac{d_i^{opt}-d_i^j}{d_i^{opt}-d_i^0}\mid$
1	Бурикін А.О.	0,27	0,96	0	0,42	0,28
2	Гвінто М.Є.	0,62	0,77	0	0,54	0,31
3	Степановський В.Е.	1	0	1	0,7	0,5
4	Кіглюк А.П.	0,62	0,19	1	0,57	0,31
5	Суліган Р.А.	0	1	0	0,3	0,3

Як видно з табл.3.7, оцінки кандидатів за формулами (3.7) і (3.8) з урахуванням вагових коефіцієнтів критеріїв дещо підкорегувались. Ми також отримали різних претендентів на вакантну посаду. За формулою (3.7) – Суліган Р.А., за формулою (3.8) – Бурикін А.О.

Висновок. Найліпший кандидат на посаду головного бухгалтера - Суліган Р.А.

3.4 Постановка завдання

Завдання 1. Пошукувачу потрібно встановити перевагу серед 10 потенційних місць роботи A, B, C, … за показниками: зарплата (грн.), відпустка (дні), час поїздки (хв.). Показники зведені в табл.3.8, список показників продовжити до 6-10 варіантів.

Таблиця 3.8

№	*Місце роботи*	*Зарплата, грн*	*Відпустка, дні*	*Час поїздки (хв.)*	…
1	*A*				
2	*B*				
…	…				

Задачу розв'язувати за схемою:

1. Виділення Парето оптимальних об'єктів (місць роботи) та виключення домінованих об'єктів із розгляду.
2. Знаходження кращого місця роботи методом ідеальної точки за формулами (3.1)-(3.2), перетворивши перед цим всі показники до своїх безрозмірних значень за формулою (3.3).
3. Знаходження кращого місця роботи за узагальненим критерієм (3.4)-(3.5), визначивши перед цим вагові коефіцієнти по кожному критерію.

Завдання 2. Потрібно встановити перевагу покупця серед моделей смартфонів (згенерувати 5-7 моделей) за комплексними показниками якості. Це показники: p_1 – техніко-економічні, p_2 – надійність, p_3 – економне використання, p_4 – стійкість до зовнішнього впливу, p_5 – зовнішнє оформлення. Всі оцінки задаються в бальних шкалах. Пропонується 5-бальна шкала. Всі показники зведені в таблицю 3.9 (дані в балах пропонується оцінити самостійно).

Таблиця 3.8

№	Модель	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1						
2						
…						

Задачу розв'язати за наведеною вище схемою. *Показники, що вимірюються в одній шкалі до безрозмірних значень приводити не потрібно.*

3.5 Порядок виконання завдання

3.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

3.5.2. Визначити множину оптимальних рішень за універсальним принципом Парето.

3.5.3. Знайти оптимальні рішення, використовуючи по черзі методи:

- ідеальної точки;
- призначення критеріям вагових коефіцієнтів.

3.5.4. Порівняти результати, отримані за допомогою різних методів. Зробити висновки.

3.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки відповідно до наведеного прикладу.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

3.7 Контрольні запитання

1) Що таке парето-оптимальні об’єкти? Як вони визначаються?

2) В яких випадках застосовується адитивна згортка, а в яких мінімаксна?

3) В яких випадках проводиться процедура нормалізації критеріїв?

4) В чому полягає метод «ідеальної точки»?

<u>Практичне завдання №4</u>

Метод аналізу ієрархій

4.1 Мета:

1) Оволодіння методикою аналізу ієрархічних структур на прикладі розв'язку задачі вибору серед альтернативних варіантів оптимального за заданими критеріями.

2) Використання структурних і обчислювальних можливостей MS Excel для реалізації відповідних методів.

4.2 Теоретичні відомості

Метод аналізу ієрархій (МАІ) − це математичний інструмент системного підходу до складних проблем прийняття рішень, запропонований американським математиком Томасом Сааті. Сутність методу полягає в тому, що він не пропонує особі, що приймає рішень (ОПР), будь-якого «правильного» рішення, а дозволяє в інтерактивному режимі віднайти такий варіант (альтернативу), який щонайкраще узгоджується з розумінням суті проблеми і вимогами до її розв'язку.

Ієрархія – система, в якій рівні розташовані та пронумеровані так, що:

1. нижній рівень містить рейтингові альтернативи;
2. вузли вищих рівнів можуть домінувати тільки над вузлами нижчих рівнів.

Таким чином, в ієрархії визначають шлях однієї спрямованості – від вершини до альтернатив через проміжні рівні, які складаються з вузлів-критеріїв.

Етапи МАІ

Етап 1. Побудова ієрархічної структури (ієрархії) задачі.

Аналіз проблеми прийняття рішень в МАІ починається з побудови ієрархічної структури, яка включає мету, критерії, альтернативи. Кожен елемент ієрархії може представляти різні аспекти задачі, яка розв'язується, - матеріальні і нематеріальні чинники, кількісні параметри та якісні характеристики, об'єктивні дані та суб'єктивні експертні оцінки. У вершині ієрархії знаходиться мета ЗПР. Деяка підмножина критеріїв утворює перший (по важливості) рівень ієрархії, інша підмножина – другий і т. д. На нижньому рівні ієрархії знаходяться безпосередньо альтернативи. (рис. 4.1):

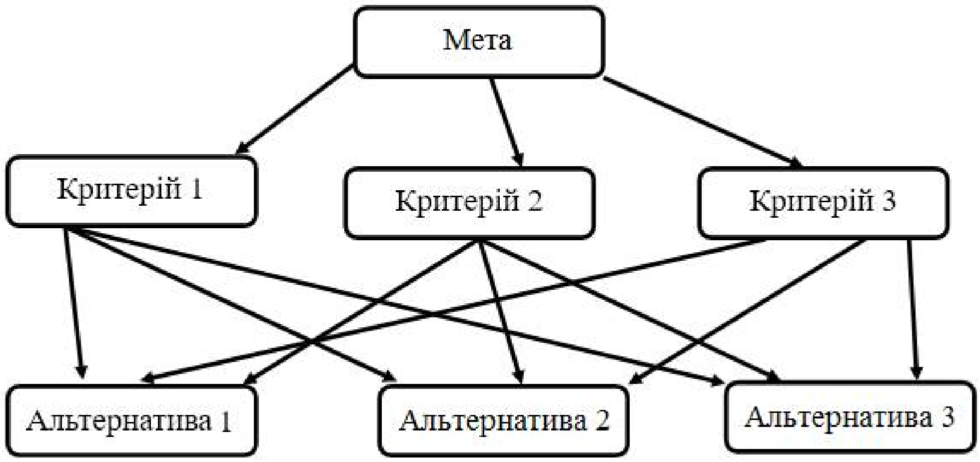


Рис. 4.1. Ієрархія

Етап 2. Визначення пріоритетів всіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь.

Для установлення відносної важливості елементів ієрархії використовується шкала відношень Сааті (табл. 4.1). Дана шкала дозволяє експерту ставити у відповідність ступеням переваги одного порівнюваного об'єкту перед іншим - деяке число.

Шкала відношень (ступеня значимості дій). Таблиця 4.1

Ступінь значимості	*Визначення*	*Пояснення*
1	Однакова значимість	Дві дії вносять однаковий вклад у досягнення мети
3	Слабка значимість	Існують міркування на користь переваги однієї з дій, однак вони не достатньо переконливі
5	Істотна або сильна значимість	Маються надійні дані або логічні судження для того, щоб показати перевагу однієї з дій
7	Очевидна або дуже сильна значимість	Переконливе свідчення на користь однієї дії перед іншою
9	Абсолютна значимість	Незаперечні переконливі свідчення на користь переваги однієї дії перед іншою
2, 4, 6, 8	Проміжні значення між двома сусідніми судженнями	Ситуація, коли необхідно компромісне рішення

Далі за допомогою методу попарних порівнянь будується матриця попарних порівнянь (табл. 4.2), де E_i – альтернативи (для матриці попарного порівння альтернатив) або критерії (для матриці попарного порівняння критеріїв)

Таблиця 4.2

	E_1	E_2	…	E_n
E_1	1	a_{12}	…	a_{1n}
E_2	$1/a_{12}$	1	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
E_n	$1/a_{1n}$	$1/a_{2n}$	…	1

У результаті обробки матриць попарних порівнянь визначається множина векторів пріоритетів критеріїв. Спочатку оцінюються елементи верхнього рівня ієрархії. В останню чергу оцінюються безпосередньо альтернативи

Етап 3. Оцінювання узгодженості (однорідності) суджень експертів.

Узгодженість квадратної додатної обернено-симетричної матриці еквівалента вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} порядку матриці n. Узгодженість суджень експертів оцінюється індексом узгодженості (ІУ) (4.1)

$$ІУ = (\lambda_{max} - n)/(n - 1), \qquad (4.1)$$

або відношенням узгодженості (ВУ) (4.2)

$$ВУ = ІУ / ВІ, \qquad (4.2)$$

Автор методу Сааті обчислив середнє значення випадковий індекс (ВІ) - ***індекс рандомізації*** (Random Consistency Index, RI) залежно від розміру матриці n (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВІ	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В загальному випадку індекс рандомізації можливо наближено знайти за формулою

$$BI = \frac{1{,}98(n-2)}{n}, \tag{4.3}$$

де n – розмір матриці парних порівнянь.

Етап 4. Ієрархічний синтез.

Ієрархічний синтез використовується для зважування власних векторів матриць попарних порівнянь альтернатив вагами критеріїв, що знаходяться в ієрархії, а також для обчислення суми за всіма відповідними зваженими компонентами власних векторів нижчого рівня ієрархії. Обчислення векторів пріоритетів проводиться в напрямку від нижніх рівнів до верхнього з урахуванням конкретних зв'язків між критеріями, що належать різним рівням. Обчислення проводиться шляхом перемножування відповідних векторів і матриць.

4.3 Приклад виконання завдання

Потрібно зробити вибір секретаря з дівчат, які подали резюме. Відбір дівчат відбувається за п'ятьма критеріями: знання діловодства, зовнішній вигляд, знання англійської мови, знання комп'ютера, вміння проводити бесіди телефоном. Співбесіду пройшли п'ять дівчат: Ольга, Олена, Світлана, Галина, Жанна.

Після співбесіди отримали такі описи дівчат:

1. Ольга. Приємна зовнішність. Чудове знання англійської мови. Хороше знання діловодства. Немає навичок роботи на комп'ютері, середнє спілкування по телефону.

2. Олена. Красива, приємна зовнішність, гарне вміння спілкуватися телефоном. Незнання англійської мови, немає навичок роботи на комп'ютері, діловодство знає дуже погано.

3. Світлана. Дуже добре знання діловодства, хороші навички роботи на комп'ютері, досить добре спілкується телефоном. Не дуже приємна зовнішність, посереднє знання англійської.

4. Галина. Досить добре знає діловодство, непогані навички роботи на комп'ютері, телефоном спілкується на високому рівні. Погане знання англійської мови, неприємна зовнішність.

5. Жанна. Приємна зовнішність, непогані навички роботи на комп'ютері, досить добре знання англійської мови. Телефоном спілкується погано, не знає діловодства.

Рішення:

Крок 1. Побудова ієрархії задачі (рис. 2).

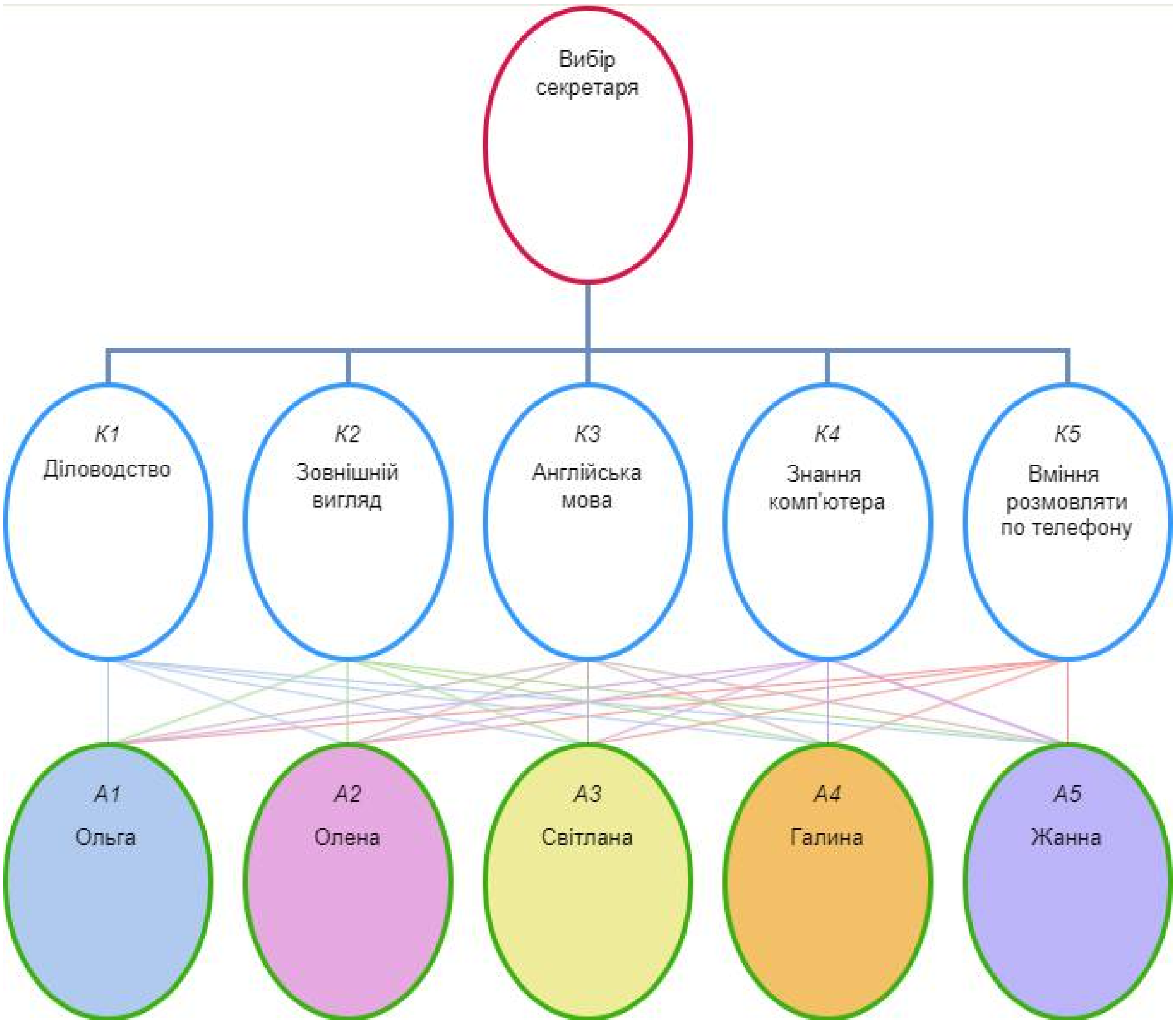


Рис. 2. Ієрархія

де:

К1, К2, …, К5 – критерії Діловодство, Зовнішній вигляд, Англійська мова, Знання комп'ютера, Вміння розмовляти телефоном.

A1, A2, …, A5 – альтернативи секретаря

Крок 2. Визначення пріоритетів всіх елементів ієрархії з використанням методу парних порівнянь. Перевірка узгодженості суджень експертів.

Будуємо матрицю парних порівнянь для критеріїв та розраховуємо оцінки. Для цього будуємо матрицю розмірністю 5х5 (за кількістю критеріїв) і підпишемо рядки та стовпці найменуваннями порівнюваних критеріїв.

Заповнюємо табл.4.4. Для цього попарно порівнюємо критерій з рядка з критерієм зі стовпця по відношенню до мети – вибору секретаря. Значення зі шкали відносної важливості (табл. 4.1) вписуємо в осередки, утворені перетином відповідного рядка та стовпця.

Таблиця 4.4

КРИТЕРІЇ	Зовнішність	Мова	Діловодство	Комп'ютер	Телефон
Зовнішність	1	1/5	1/5	1/6	1/6
Мова	5	1	1/3	1/3	1/3
Діловодство	5	3	1	1/2	2
Комп'ютер	6	3	2	1	2
Телефон	6	3	1/2	1/2	1

Спочатку визначаємо оцінки компонентів власного вектора. Так для критерію "Зовнішність" це буде: (1 х 1/5 х 1/5 х 1/6 х 1/6) ^ (1/5) = 0,25654.

Отримавши суму оцінок власних векторів (= 6,39069), обчислюємо нормалізовані оцінки вектора пріоритету кожного критерію, розділивши значення оцінки власного вектора цієї суми. Для того ж критерію "Зовнішність" маємо: 0,25654 / 6,39069 = 0,04014

Результати заносимо до табл. 4.5.

Таблиця 4.5

КРИТЕРІЇ	Зовнішність	Мова	Діловодство	Комп’ютер	Телефон	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Зовнішність	1	1/5	1/5	1/6	1/6	0,25654	0,04014
Мова	5	1	1/3	1/3	1/3	0,71226	0,11145
Діловодство	5	3	1	1/2	2	1,71877	0,26895
Комп’ютер	6	3	2	1	2	2,35216	0,36806
Телефон	6	3	1/2	1/2	1	1,35096	0,21140
					Сума:	6,39069	

Обчислимо λ_{max} (табл. 4.6):

Таблиця 4.6

Сума по стовпцям	23,00	10,20	4,03	2,50	5,50	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	0,9233	1,1368	1,084	0,92	1,163	Разом (λ_{max}): 5,2268

Порівнюючи нормалізовані оцінки вектора пріоритету можна зробити висновок, що найбільше значення під час виборів секретаря надається критерію " Знання комп'ютера " .

Необхідно перевірити, наскільки судження були несуперечливими при складанні матриці парних порівнянь критеріїв. Для цього необхідно розрахувати відношення узгодженості та індекс узгодженості для цієї матриці.

ВУ = ІУ/ число, що відповідає випадковій узгодженості матриці п'ятого порядку (ВІ = 1,12). Відношення узгодженості має бути меншим за 10.

ІУ = (λ_{max} -n)/(n-1)

ІУ = (5,2268-5) / (5-1) = 0,0567

ВУ = 0,0567/1,12 = 5,06%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби.

Висновок: Комп’ютер $\succ$ Діловодство $\succ$ Телефон $\succ$ Мова $\succ$ Зовнішність.

Крок 3.

Будуємо матрицю парних порівнянь для альтернатив (дівчат) за кожним критерієм та розраховуємо оцінки. Для цього будуємо матриці розмірністю 5x5 (за кількістю альтернатив) і підпишемо рядки та стовпці найменуваннями альтернатив.

Попарно порівнюємо альтернативу рядка з альтернативою зі стовпця за кожним критерієм окремо. Значення зі шкали відносної важливості (табл. 4.1) вписуємо в осередки, утворені перетином відповідного рядка та стовпця.

Потім визначаємо оцінки компонент власного вектора кожної матриці. Отримавши суму оцінок власних векторів, обчислюємо нормалізовані оцінки пріоритету вектора для кожної альтернативи за кожним критерієм.

Потім для кожної матриці розраховуємо відношення узгодженості та індекс узгодженості. Розрахунки наведені у табл. 4.7 – табл. 4.16.

1. Критерій «Зовнішність»

Таблиця 4.7

	Ольга	Олена	Світлана	Галина	Жанна	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Ольга	1	1/5	5	6	1/4	1,084472	0,150519
Олена	5	1	6	7	2	3,200869	0,444264
Світлана	1/5	1/6	1	3	1/5	0,457305	0,063472
Галина	1/6	1/7	1/3	1	1/5	0,275507	0,038239
Жанна	4	1/2	5	5	1	2,186724	0,303506
Разом						7,204876	

Розрахуємо λ_{max}:

Таблиця 4.8

Сума по стовпцям	9,3667	2,0095	17,3333	22,0000	3,6500	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	1,409863	0,89276	1,100174	0,841256	1,107797	Разом (λ_{max}): 5,35185

ІУ = (5,35485-5)/(5-1) = 0,0879

ВУ = 0,0879/1,12 = 7,85%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби.

Висновок за критерієм «Зовнішність»: Олена $\succ$ Жанна $\succ$ Ольга $\succ$ Світлана $\succ$ Галина

2. Критерій «Знання мови»

Таблиця 4.9

	Ольга	Олена	Світлана	Галина	Жанна	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Ольга	1	9	7	5	3	3,936283	0,509802
Олена	1/9	1	1/3	1/5	1/7	0,253538	0,032837
Світлана	1/7	3	1	1/3	1/5	0,491119	0,063607
Галина	1/5	5	3	1	1/3	1,000000	0,129514
Жанна	1/3	7	5	3	1	2,040257	0,264241
Разом						7,721196	

Розрахуємо Lmax:

Таблиця 4.10

Сума по стовпцям	1,7873	25,0302	16,3603	9,5603	4,6729	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	0,91117	0,8219	1,04062	1,23819	1,2348	Разом (λ_{max}): 5,24665

ІУ = (5,24665-5)/(5-1) = 0,0617

ВУ =0,0617 /1,12 = 5,51%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби

Висновок за критерієм «Знання мови»: Жанна $\succ$Галина $\succ$ Ольга $\succ$ Олена $\succ$Світлана

3. Критерій «Діловодство»

Таблиця 4.11

	Ольга	Олена	Світлана	Галина	Жанна	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Ольга	1	5	1/3	3	7	2,032079	0,265887
Олена	1/5	1	1/7	1/4	4	0,491119	0,064260
Світлана	3	7	1	4	9	3,772049	0,493552
Галина	1/3	4	1/4	1	5	1,107566	0,144919
Жанна	1/7	1/4	1/9	1/5	1	0,239842	0,031382
Разом						7,642656	

Розрахуємо λ_{max}:

Таблиця 4.12

Сума по стовпцям	4,7065	17,2500	1,8340	8,4500	26,0000	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	1,2514	1,10849	0,9052	1,22457	0,8159	Разом (λ_{max}): 5,30554

ІУ = (5,30554-5)/(5-1) = 0,07639

ВУ =0,07639/1,12 = 6,82%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби

Висновок за критерієм «Діловодство»: Світлана $\succ$ Ольга $\succ$ Галина $\succ$ Олена $\succ$ Жанна

4. Критерій «Знання комп'ютеру»

Таблиця 4.13

	Ольга	Олена	Світлана	Галина	Жанна	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Ольга	1	1/3	1/9	1/7	1/8	0,230790	0,029162
Олена	3	1	1/7	1/4	1/5	0,464592	0,058705
Світлана	9	7	1	5	4	4,169405	0,526838
Галина	7	4	1/5	1	1/2	1,228660	0,155251
Жанна	8	5	1/4	2	1	1,820564	0,230043
Разом						7,914011	

Розрахуємо Lmax:

Таблиця 4.14

Сума по стовпцям	28,0303	17,3300	1,7040	8,3929	5,8250	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	0,8174	1,0174	0,8977	1,3030	1,3400	Разом (λ_{max}): 5,3755

ІС = (5,3755-5)/(5-1) = 0,0939

ВУ =0,0939/1,12 = 8,38%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби

Висновок за критерієм «Знання комп'ютеру»: Світлана $\succ$ Жанна $\succ$ Галина $\succ$ Олена $\succ$ Ольга

5. Критерій «Вміння вести співбесіду по телефону»

Таблиця 4.15

	Ольга	Олена	Світлана	Галина	Жанна	Оцінки компонент власного вектора	Нормалізовані оцінки вектора пріоритету
Ольга	1	1/4	1/2	1/5	3	0,595679	0,084998
Олена	4	1	2	1/3	6	1,737605	0,247942
Світлана	2	1/2	1	1/4	5	1,045640	0,149204
Галина	5	3	4	1	7	3,353689	0,478543
Жанна	1/3	1/6	1/5	1/7	1	0,275507	0,039312
Разом						7,008119	

Розрахуємо λ_{max}:

Таблиця 4.16

Додаток по стовпцям	12,3333	4,9470	7,7000	1,9229	22,0000	
Добуток додатку по стовпцям і нормалізованої оцінки вектора пріоритету	1,0483	1,2266	1,1489	0,9202	0,8649	Разом (λ_{max}): 5,209

ІУ = (5,209-5)/(5-1) = 0,052

ВУ =0,052/1,12 = 4,66%

Величина ВУ < 10% означає, що переглядати свої судження немає потреби

Висновок за критерієм «Вміння вести співбесіду по телефону»: Галина $\succ$ Олена $\succ$ Світлана $\succ$ Ольга $\succ$ Жанна

Крок 4. Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів.

Підраховуємо значення глобального пріоритету для кожної з альтернатив як суму добутків значення вектора пріоритету для критерію і значення вектора локального пріоритету цієї альтернативи щодо даного критерію, тобто для альтернативи Ольга це буде:

0,040142 * 0,150519 + 0,111453* 0,509802+ 0,268950* 0,265887+ 0,368060* 0,029162+ 0,211395* 0,084998 = 0,163073

Результати заносимо в табл. 4.17.

Таблиця 4.17

Альтернативи	Критерії					Глобальні пріоритети
	Зовнішність	Мова	Діловодство	Комп'ютер	Телефон	
	Чисельне значення вектора пріоритету					
	0,040142	0,111453	0,268950	0,368060	0,211395	
Ольга	0,150519	0,509802	0,265887	0,029162	0,084998	0,163073
Олена	0,444264	0,032837	0,064260	0,058705	0,247942	0,112797
Світлана	0,063472	0,063607	0,493552	0,526838	0,149204	0,367827
Галина	0,038239	0,129514	0,144919	0,155251	0,478543	0,213249
Жанна	0,303506	0,264241	0,031382	0,230043	0,039312	0,143054

Висновок: Світлана $\succ$Галина $\succ$ Ольга $\succ$ Жанна $\succ$ Олена. Результати обчислень показали, що потрібно вибрати Світлану (альтернатива № 3).

4.4 Постановка завдання

Виберіть тему дослідження за своїм варіантом.
Зберіть описовий матеріал на цю тему і наведіть словесний опис досліджуваних варіантів вашого об'єкта дослідження.
Здійснити опис, оцінку та вибір найкращого об'єкта, використовуючи всі етапи методу аналізу ієрархій. На дереві ієрархії вказати нормалізовані оцінки вектора пріоритету для критеріїв та альтернатив за кожним з критеріїв

Варіанти завдань для виконання

Варіант 1.
Досліднику потрібно оцінити кваліфікацію чотирьох експертів (A, B, C, D) за критеріями:

1. професійний рівень;
2. незалежність;
3. порядність.

Варіант 2.
Фірма приймає рішення щодо будівництва своєї філії в одній з трьох країн (A, B, C). При цьому до уваги беруться такі критерії:

1. дешева робоча сила;
2. незначне втручання держави;

3. надійність транспортних комунікацій;
4. стабільність валюти країни-господаря.

Варіант 3.

Для відновлення комп'ютерного парку корпорації необхідно обрати один із трьох типів комп'ютерів (A, B, C), враховуючи такі аспекти:

1. технічний;
2. вартісний;
3. ергономічний;
4. супровід.

Варіант 4.

Для розподілу енергії для кількох великих споживачів необхідно обрати один із типів споживачів (Побутове споживання, Транспорт, Промисловість, Сільське господарство). Критеріями, стосовно яких оцінюють споживача, є:

1. внесок у розвиток економіки,
2. внесок у якість довкілля
3. внесок у національну безпеку.

Варіант 5.

Фірмі необхідно обрати керівника проекту з чотирьох претендентів (A, B, C, D). Урахувати такі критерії оцінювання:

1. вік;
2. досвід;
3. освіта;
4. харизма.

Варіант 6.

Визначити найкращу зі шкіл (A, B, C) за ознаками:

1. навчання
2. друзі
3. шкільне життя
4. професійна підготовка
5. підготовка до вступу в університет
6. навчання музиці

Варіант 7.

Для подорожі пропонуються три види транспорту: залізничний (A), автомобільний (B) і авіа (C). Клієнт керується такими критеріями вибору:

1. час у дорозі;
2. комфорт;
3. безпека;
4. вартість проїзду.

Варіант 8.

Громадська організація шукає лідера серед трьох претендентів (A, B, C) за ознаками:

1. комунікабельність;
2. емоційна стійкість;
3. енергійність;
4. соціальна зрілість;
5. оптимізм.

Варіант 9.

Серед чотирьох марок автомобілів(A, B, C, D) обрати один за критеріями:

1. комфортність;
2. вартість;
3. надійність;
4. економія пального.

Варіант 10.

Корпорація має намір створити дочірнє підприємство в одній з чотирьох країн (A, B, C, D). Вибрати країну за такими критеріями:

1. вартість робочої сили;
2. політична стабільність країни;
3. прозорість ринку.

Варіант 11.

На продаж виставлено три *Інтернет*-магазити (A, B, C). Потрібно вибрати один з них за критеріями:

1. вартість;
2. умови придбання;
3. супровід розробника;
4. інтерфейс користувача;
5. функції, що надаються.

Варіант 12.

Молодому фахівцю запропоновано роботу у трьох компаніях (A, B, C). Для оцінки альтернатив він керувався такими критеріями:

1. заробітна плата;
2. умови кар’єрного зросту;
3. наявність закордонних відряджень;
4. час, витрачений на поїздку на роботу.

Варіант 13.

Потенційний покупець обирає можливість купівлі товару між двома варіантами: в *Інтернет*-магазині (A), або у звичайному (B). В якості критеріїв оцінювання варіантів обрано такі:

1. вартість товару;
2. економія часу на придбання;

3. гарантії якості;
4. кількість асортименту.

Варіант 14.

Фірма, що спеціалізується на наданні послуг з питань бізнесу, має намір відкрити свій філіал у одному з трьох місць (A, B, C). Критерії вибору міста:

1. кількість бізнесових структур у місті;
2. наявність промислових об'єктів;
3. прозорість ринку;
4. наявність пропозицій щодо оренди офісів.

Варіант 15.

Підприємець обирає банк для одержання кредиту серед трьох можливих (A, B, C). Критерії вибору банку такі:

1. репутація банку;
2. відсотки по кредиту;
3. термін повернення кредиту;
4. можливості по достроковому поверненню кредиту;
5. пропозиції банку щодо застави.

Варіант 16.

Для розвитку бізнесу фірма має намір орендувати (A) або придбати (B) додаткові площі. Критеріями вибору є:

1. вартість одного квадратного метру;
2. територіальне розташування;
3. умови придбання;
4. репутація власника.

Варіант 17.

ВНЗ подає заявку на молодого спеціаліста. Обрання одного з чотирьох можливих претендентів (A, B, C, D) відбувається за критеріями:

1. успіхи у навчанні;
2. місце постійного проживання;
3. організаційні здібності;
4. тема магістерської роботи

Варіант 18.

Підприємець наймає фахівця для роботи в офісі серед трьох претендентів (A, B, C) за критеріями:

1. ВНЗ, який закінчив претендент;
2. володіння комп'ютером;
3. володіння іноземною мовою;
4. стаж роботи;
5. віковий ценз.

Варіант 19.

Фірма прагне отримати замовлення з розробки інформаційної системи і проводить відбір одного з трьох замовників (A, B, C). Критерії вибору замовника такі:

1. пропозиції замовника щодо вартості роботи;
2. репутація замовника;
3. терміни виконання;
4. країна виконавця;
5. можливості фірми щодо виконання роботи.

Варіант 20.

Сім'я бажає змінити місце проживання і має три альтернативи (A, B, C) . Критерії вибору сім'ї такі:

1. кліматичні умови;
2. транспортне забезпечення;
3. заклади культури;
4. дитячі заклади;
5. спортивні установи.

4.5 Порядок виконання завдання

4.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

4.5.2. За індивідуальним варіантом побудувати модель структури ієрархій. Представити ієрархію у вигляді відповідної схеми (рисунку).

4.5.3. Заповнити матрицю критеріїв. Розрахувати для матриць вектори пріоритетів. Виконати узгодження суджень експертів.

4.5.4. Заповнити матрицю альтернатив для кожного критерію. Розрахувати для матриць вектори пріоритетів. Виконати узгодження суджень експертів.

4.5.5. Визначити глобальні пріоритети.

4.5.6 Виконати аналіз отриманих результатів щодо вибору альтернатив.

4.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки відповідно до наведеного прикладу.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

4.7 Контрольні запитання

1) Яка основна ідея методу аналізу ієрархій?

2) Яким чином формується МПП?

3) В чому особливість шкали порівнянь, яка застосовується в МАІ?

4) За якою формулою визначаються локальні критерії?

5) За якою формулою визначаються глобальні критерії?

6) За якими ознаки відбувається остаточний вибір альтернатив?

<u>Практичне завдання №5</u>

Прийняття рішень в умовах ризику

5.1 Мета:

1) Ознайомитись з технологією побудови дерева рішень.

2) Проаналізувати процес прийняття рішень в умовах ризику.

3) Отримати навички пошуку раціональних рішень в умовах ризику з використанням пакета MS Excel

5.2 Теоретичні відомості

В реальних умовах управління процес прийняття рішень має ланцюговий характер, тобто, коли результат одного рішення змушує приймати наступне і т.д. Цю послідовність зображають за допомогою метода графів при побудові дерева рішень. Дерево рішень – це представлення задачі у вигляді діаграми, що відображає варіанти дій, які можуть бути здійснені в кожній конкретної ситуації, а також можливі результати кожної дії. Такий підхід особливо корисний, коли необхідно прийняти низку послідовних рішень та (або) коли на кожному етапі процесу прийняття рішення можуть виникати численні результати.

Наприклад, якщо розглядається питання, чи варто розширювати бізнес, рішення може залежати більш ніж від однієї змінної. Може існувати невизначеність як щодо обсягу продажів, так і величини витрат. Більше того, значення деяких змінних може залежати від значення інших змінних: наприклад, якщо буде продано 100 000 одиниць продукту, собівартість одиниці продукту становитиме $4, але якщо буде продано 120 000 одиниць, собівартість одиниці знизиться до $3.80. Таким чином, можливі різні наслідки ситуації, при цьому деякі з них будуть залежатиме від попередніх результатів.

Розв'язання задачі за допомогою дерева рішень здійснюється у два етапи. Перший етап включає побудову дерева рішень зліва направо із зазначенням всіх можливих результатів та їх ймовірностей. Другий етап включає оцінку та формулювання рекомендацій. Прийняття рішення здійснюється шляхом послідовного розрахунку очікуваних значень результатів в зворотньому напрямку.

Перший етап. Побудова дерева рішень.

Дерево рішень завжди слід будувати зліва направо з використанням «рішень» та «виходів» («результатів рішень»). Точки прийняття рішень є варіантами альтернативних дій, тобто можливі вибори. Ви приймаєте рішення піти або цим, або іншим шляхом. Виходи (результати рішень) від вас не залежать. Вони залежать від зовнішнього середовища, наприклад, від клієнтів, постачальників або стану економіки загалом. Як із точок прийняття рішень, так і з точок результатів рішень виходять «гілки» дерева. Якщо існує, наприклад, два можливих варіанта дій, з точки прийняття рішення виходитимуть дві гілки, і якщо існує два можливих результати (наприклад, хороший і поганий), то з точки результату теж виходитимуть дві гілки. Оскільки дерево рішень є інструментом оцінки різних варіантів дій, то всі дерева рішень повинні починатися з точки прийняття рішення, яка графічно надається квадратом.

Приклад простого дерева рішень показано на рис. 5.1. З рисунка видно, що ОПР може вибрати з двох варіантів, оскільки з точки прийняття рішення виходить дві гілки. Результат одного з варіантів дій, представленого верхньою гілкою, точно відомий, оскільки на цій гілці немає жодних точок можливих наслідків. Але на нижній гілці є коло, яке показує, що в результаті даного рішення можливі два результати, тому з нього виходять дві гілки. На кожній з цих двох гілок теж є по колу, з яких, у свою чергу, також виходять по дві гілки. Це означає, що для кожного зі згаданих можливих результатів є два варіанти розвитку ситуації, та кожен із варіантів має свій результат.

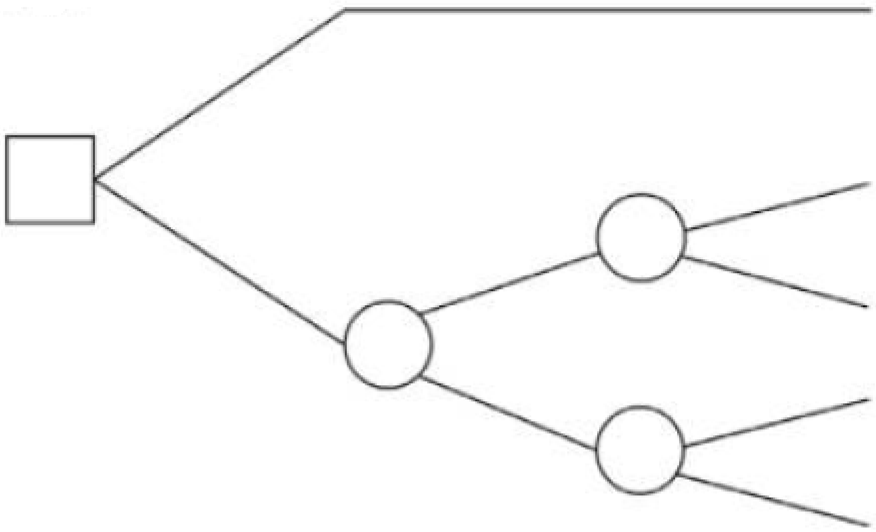


Рисунок. 5.1

Після побудови основи дерева необхідно вказати фінансові значення результатів та їх ймовірності. Важливо пам'ятати, що ймовірності, зазначені для гілок, що виходять з однієї точки, у сумі повинні давати 100%, інакше це означатиме, що ви не вказали на діаграмі який небудь результат, або припустилися помилки в розрахунках.

Після побудови дерева рішень необхідно оцінити рішення.

Другий етап. Оцінка рішення

Дерево рішень оцінюється праворуч наліво, тобто у напрямку, зворотному тому, який використовувався для побудови дерева рішень. Для того щоб здійснити оцінку, ви повинні зробити наступні кроки:

1. Підпишіть усі точки прийняття рішень та наслідків, тобто всі квадрати та кола. Почніть з тих, які розташовані в правій частині діаграми, зверху вниз, а потім переміщайтеся вліво до самого лівого краю діаграми.
2. Послідовно розрахуйте очікувані значення всіх результатів, рухаючись праворуч наліво, використовуючи фінансові показники результатів та їх ймовірністі.

Нарешті виберіть варіант, який забезпечує максимальне очікуване значення результату і зробіть висновки.

5.3 Приклади виконання завдання

Приклад 5.3.1. Компанія приймає рішення, чи варто розробляти та запускати новий продукт. Очікується, що витрати на розробку становитимуть $400 000, причому ймовірність того, продукт виявиться успішним, становить 70%, а ймовірність невдачі, відповідно, 30%. В таблиці 5.1 наведено оцінку прибутку від продажу продукту, залежно від рівня попиту – високого, середнього чи низького, а також відповідні кожному рівню ймовірності.

Таблиця 5.1

Попит	Ймовірність	Прибуток
Високий	0,2	$500,000 на рік, протягом 2-х років
Середній	0,5	$400,000 на рік, протягом 2-х років
Низький	0,3	$300,000 на рік, протягом 2-х років

У разі невдачі є 60% ймовірність, що результати розробки можна буде продати за $50,000, однак існує 40% ймовірність, що продати ці результати буде неможливо.

Рішення.

Базове дерево рішень представлене на рис. 5.2:

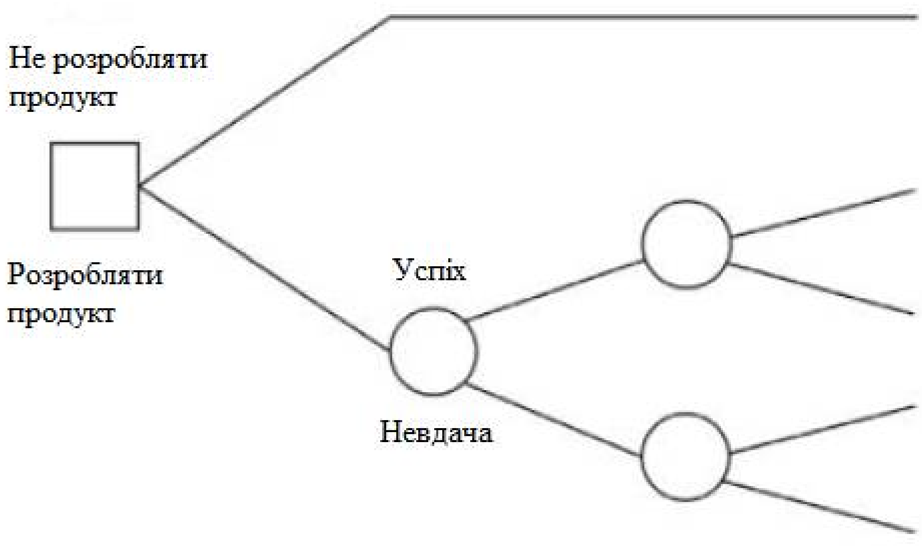


Рисунок 5.2

Далі необхідно вказати значення прибутку, не забуваючи про те, що прибуток у разі успішного запуску буде генеруватися протягом двох років, а також їх ймовірності (рис. 5.3).

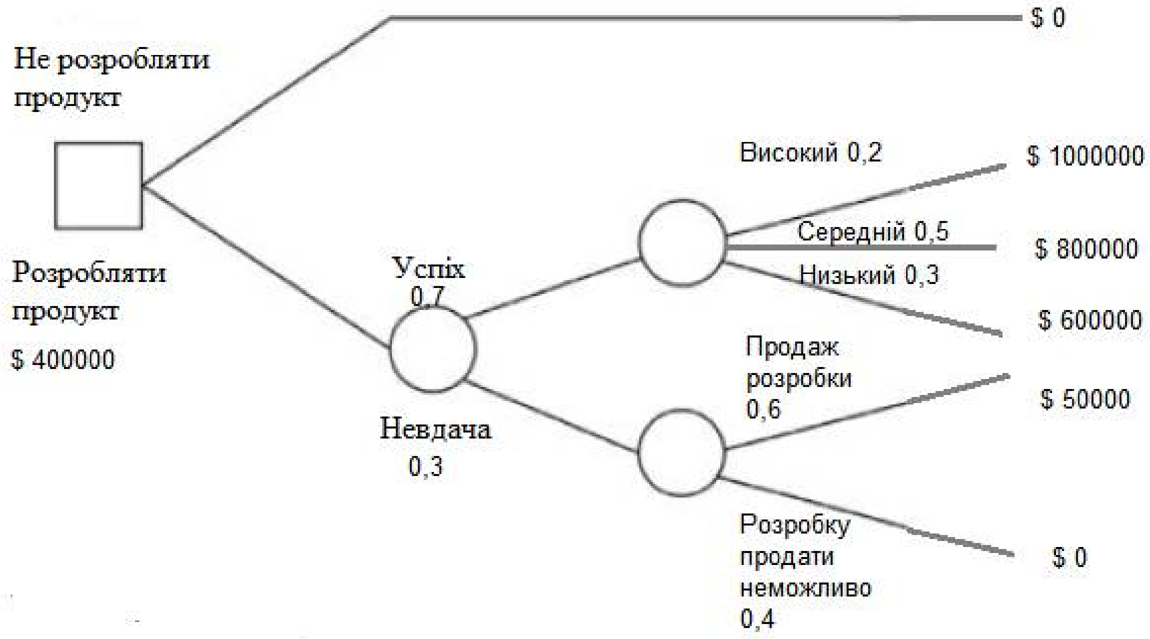


Рисунок 5.3

Тепер необхідно підписати точки прийняття рішень та результатів, просуваючись справа наліво по дереву рішень (рис. 5.4).

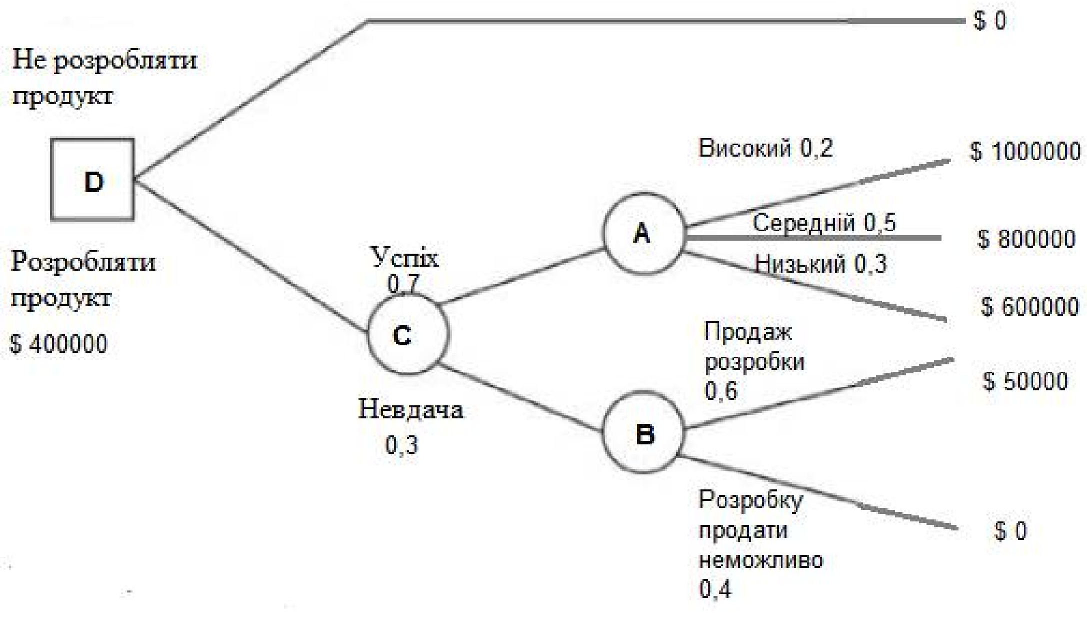


Рисунок 5.4

Після цього потрібно розрахувати очікувані значення (ОЗ) кожного результату, помноживши показники прибутку на відповідні ймовірності. Очікуване значення розраховується для точки результатів А, а потім для точки результатів В, після чого можна розрахувати очікуване значення в точці C, помноживши очікувані значення в точках A та B на відповідні ймовірності.

ОЗ в A = (0,2 × \$1000000) + (0,5 × \$800000) + (0,3 × \$600000) = \$780000.

ОЗ у B = (0,6 × \$50000) + (0,4 × \$0) = \$30000.

ОЗ у C = (0,7 × \$780000) + (0,3 × \$30000) = \$555000

Очікувані значення можна вказати на діаграмі (рис. 5.5).

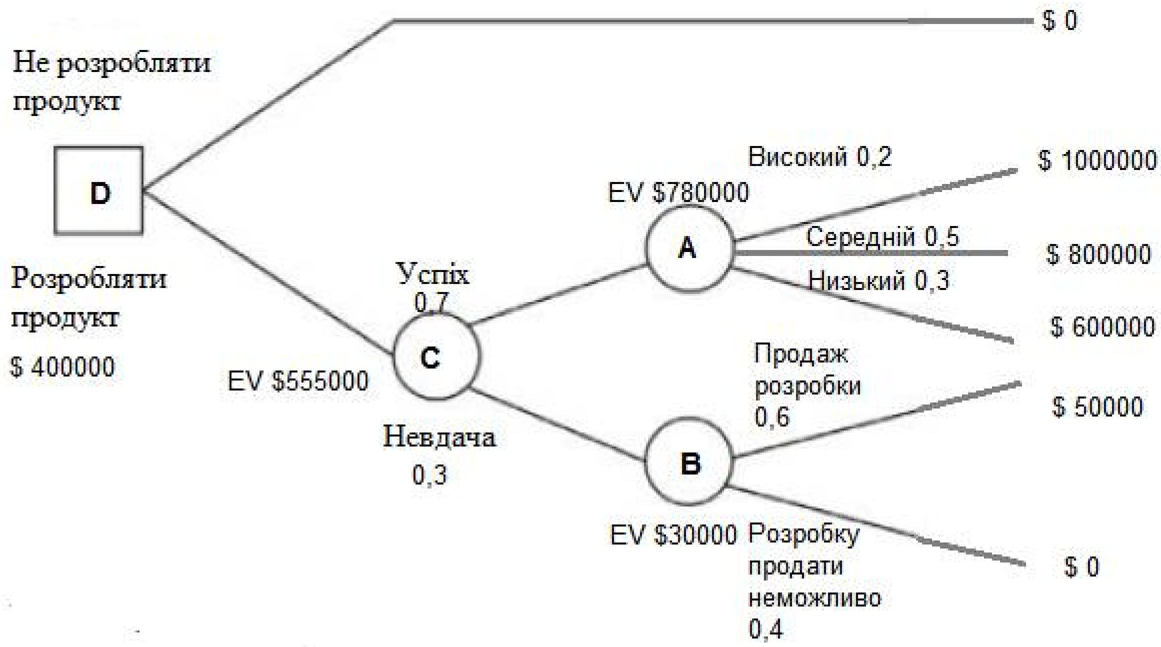


Рисунок 5.5

Після виконання розрахунків можна рухатися далі вліво до точки прийняття рішень D. Для прийняття рішення у точці D потрібно порівняти очікуване значення верхньої гілки дерева (яка, враховуючи відсутність точок наслідків, має єдиний результат, ймовірність якого дорівнює 100%) з очікуваним значенням нижньої гілки, за вирахуванням відповідних витрат. Таким чином, у точці прийняття рішень D потрібно порівняти очікуване значення відмови від розробки продукту, що дорівнює \$0, з очікуваним значенням рішення розробляти продукт яке за вирахуванням витрат у розмірі \$400000, становитиме \$155000.

І, нарешті, я перекреслюю двома паралельними лініями ту гілку чи гілки, які вказують на альтернативу, від якої потібно відмовитися (у даному випадку такою гілкою буде "Не розробляти продукт") – рис. 5.6.

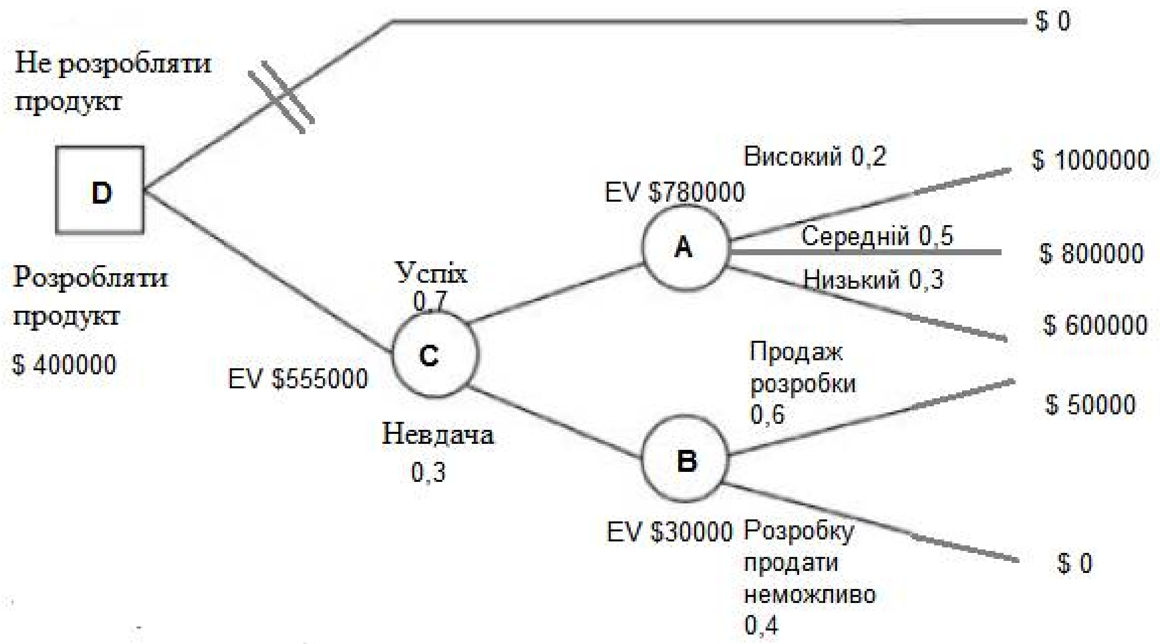


Рисунок 5.6

Висновок. Розробляти продукт, оскільки очікуване значення прибутку у цьому разі складе $155000.

Часто існує кілька способів зображення дерева рішень. В нашій задачі, власне, є п'ять результатів рішення розпочати розробку товару:

1. Продукт буде успішним та забезпечить високий прибуток у розмірі $1000000.
2. Продукт буде успішним і забезпечить середній прибуток у розмірі $800000.
3. Продукт буде успішним та забезпечить невеликий прибуток у розмірі $600000.
4. Продукт буде невдалим, але результати розробки будуть продані за $50000.
5. Продукт буде невдалим і не принесе ніякого доходу.

Таким чином, замість дерева рішень, у якому з точки C виходить дві гілки, кожна з яких має ще кілька гілок, можна намалювати інше дерево (рис. 5.7):

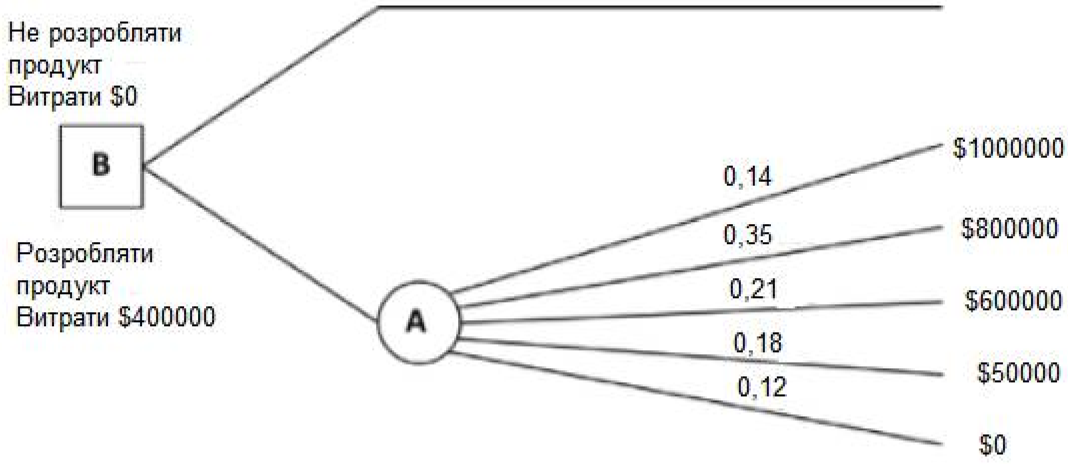


Рисунок 5.7

Тепер ви можете бачити, що ймовірності для гілок дерева, що виходять з точки результатів А змінилися. Це сталося тому, що в цьому випадку вказані сумісні ймовірності, які є комбінацією ймовірності успіху чи невдачі (0,7 та 0,3) з ймовірністю високого, низького або середнього прибутку (0.2, 0,5 та 0,3 відповідно). Сумісні ймовірності розраховуються шляхом множення двох ймовірностей, що відповідають кожному результату:

Успіх та високий прибуток: $0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$

Успіх та середній прибуток: $0{,}7 \times 0.5 = 0{,}35$

Успіх та невисокий прибуток: $0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$

Невдача та продаж результатів розробки: $0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$

Невдача та відсутність доходу від продажу результатів розробки: $0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

Сума всіх сумісних ймовірностей повинна дорівнювати 1, якщо це не так, ви зробили помилку у розрахунках.

Зробимо підрахунки:

$0{,}14 \times \$1000000 = \$140000$

$0{,}35 \times \$800000 = \$280000$

$0{,}21 \times \$600000 = \$126000$

$0{,}18 \times \$50000 = \$9000$

$0{,}12 \times \$0 = \$0$

($140000 + $280000 + $126000 + $9000 + $0) - $400000 = $155000

Висновок. Результат отримали такий самий.

Приклад 5.3.2. Для фінансування проекту підприємцю потрібно зайняти терміном на один рік 15000 дол. Банк може позичити йому ці гроші під 15% річних або вкласти в справу зі 100%-м поверненням суми, але під 9% річних. З минулого досвіду банкіру відомо, що 4% таких клієнтів позику не повертають. Що робити? Давати йому позику чи ні?

Рішення.

Максимізуємо чистий прибуток, що очікується наприкінці року, що являє собою різницю суми, яку отримано наприкінці року, і інвестованої з початку справи.

Таким чином, якщо позика була видана і повернута, то

Чистий прибутк (ЧП) = ((15000 + 15% від 15000) – 15000) = 2250 дол.

Якщо гроші вкладено в справу, то

ЧП = 15000 × 0,09 = 1350 дол.

Якщо банк вирішує видати позику, то максимальний очікуваний ЧП дорівнює

ЧП = 2250 × 0,96 + (-155000) × 0,04 = 1560 дол.

Результат оформимо у вигляді таблиці прибутків (табл. 5.2)

Чистий прибуток наприкінці року. Таблиця 5.2

Можливі наслідки	Можливі рішення		Ймовірність
	Видавати позику	Не видавати позику	
Клієнт позику повертає	2250	1350	0,96
Клієнт позику не повертає	-15000	1350	0,04
Очікуваний чистий прибутк	1560	1350	

Дерево рішення (рис. 5.8)

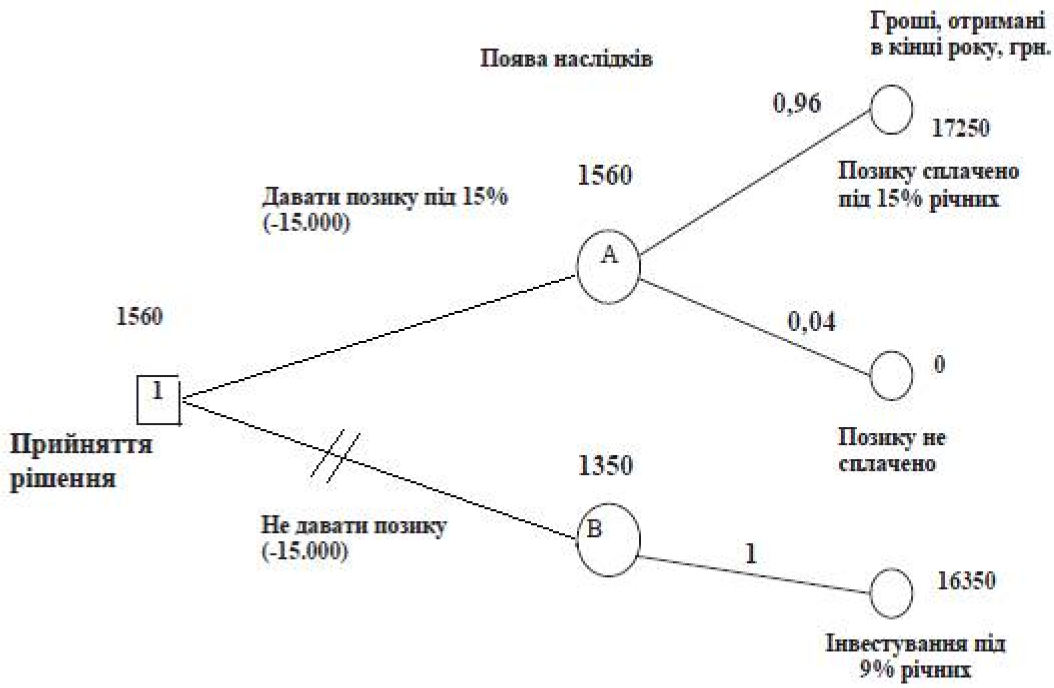


Рисунок 5.8

Очікуваний чистий прибуток у колах А і В обчислюється таким чном:

А: (17250 × 0,96 + 0 × 0,04) – 15000 = 1560 дол.

В: (16350 × 1 – 15000) = 1350 дол.

Висновок: Оскільки очікуваний чистий прибуток більший у випадку А, то приймається рішення видати позику.

Аналіз чутливості. Рішення, прийняті за допомогою дерева рішень, залежать від ймовірності результатів. Чутливість рішення визначається розміром змін ймовірності. Вибираючи рішення, ми повинні знати, наскільки воно залежить від змін ймовірностей, і, отже, наскільки можна покладатися на цей вибір.

Проаналізуємо чутливість прикладі 2. Очікувані чисті доходи в «вузлах» А і В досить близькі: 1560 і 1350 дол. Вибір рішення залежить від значення ймовірностей. Аналіз чутливості дозволяє нам обчислити «розкид» ймовірностей, які змінюють наш вибір.

Позначимо ймовірність «неповернення» позики через p.

Тоді варіант А дає чистий дохід

$17250 \times (1 - p) + 0 \times p - 15000 = 17250 - 17250 \times p.$

Варіант В дає чистий дохід 1350 дол.

Врівноваження цих результатів дає:

$2250 - 17250 \times p = 1350 \Rightarrow p = 900/17250 = 0{,}052$.

Оскільки результат $p \approx 0{,}05$ виявився близький до $p \approx 0{,}04$, це показує, що вибір рішення дуже чутливий до розрахунків величини ймовірності, і найменша помилка може призвести до зміни вибору. Що показує важливість аналізу чутливості в процесі прийняття рішень.

5.4 Постановка завдання

Вирішити ситуаційні завдання поставленої задачі.

Варіант 1. Вас запросили на телевізійну гру «Колесо фортуни». Колесо управляється за допомогою двох кнопок, які надають йому сильне (В) або слабке (Н) обертання. Саме колесо розділене на рівні області - білу (Б) і чорну (Ч). Вам повідомили, що у білій області колесо зупиняється з імовірністю 0,3, а в чорній 0,7. Плата, яку ви отримуєте за гру, дорівнює (в дол.)

	Б	Ч
Н	800	200
В	-2500	1000

Побудувати дерево рішень. Яке очікуване значення прибутку?

Варіант 2. Фермер може вирощувати або кукурудзу, або соєві боби. Ймовірність того, що ціни на майбутній урожай цих культур підвищаться, залишаться на тому ж рівні або знизяться, дорівнює відповідно 0,25, 0,30 і 0,45. Якщо ціни зростуть, урожай кукурудзи дасть 30 000 дол. чистого доходу, а урожай соєвих бобів - 10 000 дол. Якщо ціни залишаться незмінними, фермер лише покриє витрати. Але якщо ціни стануть нижчими, урожай кукурудзи і соєвих бобів призведе до втрат в 35 000 і 5000 дол. відповідно. Побудуйте дерево рішень. Яку культуру слід вирощувати фермеру? Яке очікуване значення його прибутку?

Варіант 3. Фірма планує відкрити нове підприємство в Одесі. В даний час є можливість побудувати або велике підприємство, або невелике, яке через два роки можна буде розширити за умови високого попиту на продукцію, що випускається. Розглядається задача прийняття рішень на десятирічний період. Фірма оцінює, що впродовж цих 10 років ймовірність високого і низького попиту на вироблену продукцію буде дорівнює 0,75 і 0,25 відповідно. Вартість негайного будівництва великого підприємства дорівнює 5 млн. дол., а невеликого - 1 млн. дол.

Розширення малого підприємства через два роки обійдеться фірмі в 4,2 млн. дол. Прибуток, що отримується від функціонування виробничих потужностей протягом 10 років, наводиться в наступній таблиці.

Альтернатива	Очікуваний дохід за рік (тис. дол.)	
	Високий попит	Низький попит
Велике підприємство зараз	1000	300
Невелике підприємство зараз	250	200
Розширене підприємство через 2 роки	900	200

Побудуйте відповідне дерево рішень, беручи до уваги, що через два роки фірма може або розширити невелике підприємство, або не розширювати його. Сформулюйте стратегію будівництва для фірми на запланований 10-річний період. (Для простоти не беріть до уваги можливу інфляцію.)

Варіант 4. Припустимо, у вас є можливість вкласти гроші в три інвестиційних фонди відкритого типу: простий, спеціальний (що забезпечує максимальний довгостроковий прибуток від акцій дрібних компаній) і глобальний. Прибуток від інвестиції може змінитися в залежності від умов ринку. Існує 10%-ва ймовірність, що ситуація на ринку цінних паперів погіршиться, 50%-ва - що ринок залишиться помірним і 40%-ва - що ринок буде зростати. Наступна таблиця містить значення відсотків прибутку від суми інвестиції при трьох можливостях розвитку ринку.

Альтернатива (фонди)	Відсоток прибутку від інвестиції,%		
	Погіршується ринок	Помірний ринок	Зростаючий ринок
Простий	+5	+7	+8
Спеціальний	-10	+5	+30
Глобальний	+2	+7	+20

Побудуйте дерево рішень. Який фонд відкритого типу вам слід вибрати? Який відсоток прибутку при цьому очікується?

Варіант 5. Припустимо, у вас є можливість вкласти гроші або в 7,5%-і облігації, які продаються за номінальною ціною, або в спеціальний фонд, який виплачує лише 1% дивідендів. Якщо існує ймовірність інфляції, відсоткова ставка зросте до 8%, і в цьому випадку номінальна вартість облігацій збільшиться на 10%, а ціна акцій фонду - на 20%. Якщо прогнозується спад, то процентна ставка знизиться до 6%. При цих умовах очікується, що номінальна вартість облігацій підніметься на 5%, а ціна акцій фонду збільшиться на 20%. Якщо стан економіки залишиться незмінним, ціна акцій фонду збільшиться на 8%, а номінальна вартість облігацій не зміниться. Економісти оцінюють в 20% шанси настання інфляції і в 15% - що наступить спаду. Ваше рішення щодо інвестицій приймається з урахуванням економічних умов наступного року.

Побудуйте дерево рішень задачі. Чи будете ви купувати акції фонду або облігації? Який прибуток при цьому очікується?

Варіант 6. Видавець звернувся до відділу маркетингу, щоб з'ясувати передбачуваний попит на книгу. Дослідження відділу маркетингу показали:

Попит на книгу в найближчі три роки, кількість екз.	2000	3000	4000	5000
Ймовірність	0,1	0,5	0,2	0,2

Прибуток від продажу становить 90 грн за книгу. Якщо книга не продається, збитки становлять 40 грн за штуку. Якщо видавець не задовольняє попит, збитки за незадоволений попит складуть 10 грн (для підтримки репутації фірми і майбутнього попиту).

Визначте, скільки має бути видано книг в розрахунку на трирічний період. Побудуйте дерево рішення.

Варіант 7. Фірма планує виробництво нової продукції швидкого харчування в національному масштабі. Дослідницький відділ переконаний у великому успіху нової продукції і хоче впровадити її негайно, без рекламної кампанії на ринках збуту фірми. Відділ маркетингу стан речей оцінює інакше і пропонує провести інтенсивну рекламну кампанію. Така кампанія обійдеться в 100 тис. дол., а в разі успіху принесе 950 тис. дол. річного доходу. У разі провалу рекламної кампанії (ймовірність цього становить 30%) річний дохід оцінюється лише в 200 тис. дол. Якщо рекламна кампанія не проводиться зовсім, річний дохід оцінюється в 400 тис. дол. за умови, що покупцям сподобається нова продукція (ймовірність цього дорівнює 0,8), і в 200 тис. дол. з імовірністю 0,2, якщо покупці залишаться байдужими до нової продукції.

Побудуйте відповідне дерево рішень. Як повинна вчинити фірма у зв'язку з виробництвом нової продукції?

Варіант 8. Невелика хімічна фірма «Hetros Hetrosone Ltd» випускає дорогий промисловий розчинник «Hetrosone», який швидко псується. Тому запаси «Hetrosone» не можна тримати більше, ніж один місяць. Обсяги випуску продукції плануються на початку кожного місяця, і під ці плани закуповується необхідну сировину. Продажна ціна «Hetrosone» - 2400 ф. ст. за 1 т, виробничі витрати - 1500 ф. ст. за 1 т.

Аналізуючи попит за останні кілька місяців, менеджер зі збуту встановив, що попит коливається між 10 і 20 т на місяць. Для того щоб спростити аналіз попиту, він поділив його на три типи - «низький» (10 т), «середній» (15 т) і «високий» (20 т) з відповідними ймовірностями:

Попит, т	Ймовірність
10	0,3
15	0,6
20	0,1

1. Враховуючи рівні попиту, складіть «дерево» рішень, що охоплює всі можливості, що відкриваються перед компанією, а також їх наслідки.
2. Припустимо, рівні попиту не змінюються. Який обсяг виробництва ви б могли порадити, щоб максимізувати прибуток в довгостроковій перспективі?

Варіант 9. Пекарня пече хліб на продаж магазинам. Собівартість однієї булки становить 30 грн, її продають за 40 грн. У таблиці наведено дані про попит за останні 50 днів:

Попит на день, тис. шт.	10	12	14	16	18
Число днів	5	10	15	15	5

Якщо булка спечена, але не продана, то збитки складуть 20 грн за штуку. Визначте, скільки булок потрібно випікати в день. Побудуйте дерево рішень.

Варіант 10. Фірма виробляє партії продукції з 0,8, 1, 1,2 і 1,4% бракованих виробів з ймовірностями 0,4, 0,3, 0,25 і 0,05 відповідно. Три споживача А, В і С уклали контракт на отримання партій виробів з відсотком неякісних виробів не вище 0,8, 1,2 і 1,4% відповідно. Фірма штрафується в сумі 1000 дол. за кожен пункт відсотка (одна десята відсотка) у випадку, якщо відсоток неякісних виробів вище зазначеного. Навпаки, поставка партій виробів з меншим відсотком бракованих виробів, ніж обумовлено в контракті, приносить фірмі прибуток в 500 дол. за кожен пункт відсотка. Передбачається, що партії виробів перед відправкою не перевіряються.

Побудуйте відповідне дерево рішень.

Який із споживачів повинен мати найвищий пріоритет при отриманні замовлення?

Варіант 11. Щоденний попит на булочки в продовольчому магазині задається наступним розподілом ймовірностей.

n	100	150	200	250	300
p_n	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

Магазин купує булочку по 0,55 гр. од, а продає по 1,20 гр. од. Якщо булочка не продана в той же день, то до кінця дня вона може бути реалізована за 0,25 гр. од. Величина запасу булочок може приймати одне з можливих значень попиту, що перераховані вище.
Побудуйте відповідне дерево рішень. Скільки булочок необхідно замовляти щодня?

Варіант 12. Компанія «Brownhill Manufacturing Company» збирається виробляти новий товар, для чого потрібно буде побудувати новий завод. Після розгляду декількох варіантів були залишені три основні.
А. Побудувати завод вартістю 600 000 гр.од. При цьому варіанті можливі: великий попит з імовірністю 0,7 і низький попит з імовірністю 0,3. Якщо попит буде великим, то очікується річний дохід в розмірі 250 000 гр. од. протягом наступних п'яти років; якщо попит низький, то щорічні збитки через великі капіталовкладення складуть 50000 гр. од.
Б. Побудувати маленький завод вартістю 350 000 гр. од. Тут також можливі великий попит з імовірністю 0,7 і низький попит з імовірністю 0,3. У разі великого попиту щорічний дохід протягом п'яти років складе 150 000 гр. од. , при низькому попиті - 25000 гр. од.
В. Відразу завод не будувати, а відкласти вирішення цього питання на один рік для збору додаткової інформації, яка може бути позитивною або негативною з ймовірностями 0,8 і 0,2 відповідно. Через рік, якщо інформація виявиться позитивною, можна побудувати великий або маленький завод за вказаними вище цінами. Керівництво компанії може вирішити взагалі ніякого заводу не будувати, якщо інформація буде негативною. Незалежно від типу заводу ймовірності великого та низького попиту змінюються на 0,9 і 0,1 відповідно, якщо буде отримана позитивна інформація. Доходи на наступні чотири роки залишаються такими ж, якими вони були у варіантах А і Б.
Всі витрати виражені в поточній вартості і не повинні дисконтуватися.
1. Намалюйте «дерево», що охоплює всі можливості, що відкриваються перед компанією.
2. Визначте найбільш ефективну послідовність дій керівництва фірми, ґрунтуючись на очікуваних доходах кожного варіанта.

5.5 Порядок виконання завдання

5.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

5.5.2. За індивідуальним варіантом побудувати дерево рішень, що охоплює всі можливі варіанти розвитку подій з використанням умовних позначок.

5.5.3. Визначити, яке рішення слід прийняти за умов індивідуального варіанту ситуаційного завдання, оптимальний шлях рішення.

4.5.4. Установити, чи має рекомендоване рішення запас чутливості.

4.5.5. Визначити глобальні пріоритети.

4.5.6 Виконати аналіз отриманих результатів щодо вибору альтернатив.

5.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

5.7 Контрольні запитання

1) За яких умов користуються методикою – дерево рішень?

2) Назовіть складові структури дерева рішень.

3) Назвіть правила побудови дерева рішень.

4) Назвіть правила розрахунку дерева рішень.

5) Чи може ОПР вплинути на появу результату рішення?

6) У якому випадку можлива зміна попереднього рішення?

7) Що таке чутливість рішення?

8) В яких випадках враховується чутливість рішень при їх оптимізації?

Практичне завдання №6

Прийняття рішень в умовах невизначеності

6.1 Мета:

1) Навчитися визначати мету рішення проблеми, можливі варіанти рішень, визначити найкращу альтернативу в умовах невизначеності.

2) Отримати навички пошуку раціональних рішень в умовах невизначеності з використанням пакета MS Excel та мови програмування Python.

6.2 Теоретичні відомості

Невизначеність є типовою властивістю практичних задач системного аналізу, що обумовлене розмаїттям цілей, властивостей і особливостей складних систем. Відмінність між прийняттям рішень в умовах ризику та невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності ймовірнісний розподіл, що відповідає станам s_j, $j = 1, 2, ..., n$, або невідомий, або не може бути визначено.

Таблиця 6.1

Матриця вартостей				
	s_1	s_2	…	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	…	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	…	$v(a_2, s_n)$
...	…	…	…	…
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	…	$v(a_m, s_n)$

Ця нестача інформації зумовила розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, пов'язаної з прийняттям рішень:

1. Критерій Лапласа.
2. Критерій Ваальда.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються за рівнем консерватизму, який виявляє особа, що приймає рішення, перед невизначеністю.

Критерій Лапласа

Критерій Лапласа спирається на принцип недостатньої підстави, який свідчить, що оскільки розподіл ймовірностей станів $P(s_i)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується *оптимістичне припущення,* що ймовірності усіх станів природи рівні між собою, тобто $P\{s_1\} = P\{s_2\} = ... = P\{s_n\} = 1/n$. Якщо при цьому $v(a_i, s_j)$ представляє отримуваний прибуток, то найкраща альтернатива вибирається з умови (6.1)

$$\max_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m \qquad (6.1)$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє витрати особи, яка приймає рішення, то найкращу альтернативу вибираємо з умови (6.2)

$$\min_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m \qquad (6.2)$$

При досить великій кількості реалізацій середнє значення корисностей альтернативи наближається до математичного сподівання корисностей її наслідків.

Критерій Ваальда (Максимінний критерій)

Максимінний критерій заснований на *консервативній обережній* поведінці особи, яка приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших.

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє отримуваний прибуток, то відповідно до максимінного критерію в якості оптимального вибирається рішення (альтернатива), що забезпечує (6.3)

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \qquad (6.3)$$

Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик.

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ становить втрати, то використовується мінімаксний критерій, що визначається співвідношенням (6.4)

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \qquad (6.4)$$

Критерій Севіджа

Критерій Севіджа прагне пом'якшити консерватизм критерію Ваальда шляхом заміни матриці платежів (виграшів або програшів) $v(a_i, s_j)$ матрицею втрат $r(a_i, s_j)$, яка визначається в такий спосіб (6.5).

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & v - \textit{дохід}, \\ v(a_i, s_j) - \min\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\}, & v - \textit{втрати}. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації максимально можливих втрат (6.6):

$$\min_{a_i}\max_{s_j} r(a_i, s_j),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \qquad (6.6)$$

Критерій Гурвіца

Цей критерій охоплює низку різних підходів до прийняття рішень - від найбільш оптимістичного до крайнього песимістичного (консервативного). Нехай $\alpha \in [0,\ 1]$ - ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику, величини $v(a_i, s_j)$ представляють доходи. Тоді рішенню, обраному за критерієм Гурвіца, відповідає (6.7)

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \qquad (6.7)$$

Параметр α – показник оптимізму. Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає **консервативним**, оскільки його застосування еквівалентне застосуванню звичайного мінімаксного критерію. Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає *надто оптимістичним*, бо розраховує на найкращі з найкращих умов.

Можна конкретизувати рівень оптимізму (або песимізму) належним вибором величини α з інтервалу [0, 1]. За відсутності яскраво вираженої схильності до оптимізму чи песимізму вибір $\alpha = 0{,}5$ є найбільш розумним.

Якщо величини $v(a_i, s_j)$ представляють втрати, то критерій набуває наступного вигляду (6.8):

$$\min_{a_i}\left\{\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \tag{6.7}$$

6.3 Приклад виконання завдання

Національна школа виживання підбирає місце для будівництва літнього табору в центрі Аляски для тренування людей на виживання в умовах дикої природи. Школа вважає, що кількість учасників збору може бути 200, 250, 300 чи 350 осіб. Вартість літнього табору буде *мінімальною,* оскільки він будується для задоволення лише певних невеликих потреб. Відхилення у бік зменшення чи збільшення щодо ідеальних рівнів потреб спричиняють додаткові витрати, зумовлені будівництвом надлишкових (невикористованих) потужностей або втратою можливості отримати прибуток у разі, коли деякі потреби не задовольняються. Нехай змінні a_1 - a_4 є можливими розмірами табору (на 200, 250, 300 або 350 осіб), а змінні s_1 - s_4 - відповідна кількість учасників збору. Таблиця 6.2 містить матрицю цін (у тисячах доларів), що відноситься до описаної ситуації.

Матриця вартостей. Таблиця 6.2

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Рішення.

Описана ситуація аналізується з погляду чотирьох розглянутих вище критеріїв.

Критерій Лапласа При заданих ймовірностях $P\{s_1\} = 1/4$, $j = 1, 2, 3, 4$, очікувані значення витрат різних можливих рішень обчислюються в такий спосіб.

$M\{a_1\} = (1/4)(5 + 10 + 18 + 25) = 14\ 500$,

$M\{a_2\} = (1/4)(8 + 7 + 12 + 23) = 12\ 500$,

$M\{a_3\} = (1/4)(21 + 18 + 12 + 21) = 18\ 000$,

$M\{a_4\}$ = (1/4)(30 + 22 + 19 + 15) = 21 500.

min (14 500, 12 500, 18 000, 21 500) = 12 500, найкраща альтернатива - a_2

Критерій Ваальда. Цей критерій використовує вхідну матрицю вартостей (табл. 6.3).

Матриця вартостей. Таблиця 6.3

	s_1	s_2	s_3	s_4	*max рядків*
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	21
a_4	30	22	19	15	30

min (25, 23, 21, 30) = 21, найкраща альтернатива – a_3

Критерій Севіджа. Матриця втрат визначається за допомогою віднімання чисел 5, 7, 12 і 15 елементів стовпців від першого до четвертого відповідно (табл. 6.4).

Матриця втрат. Таблиця 6.4

	s_1	s_2	s_3	s_4	*max рядків*
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	8
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

min (10, 8, 16, 25) = 8, найкраща альтернатива – a_2

Критерій Гурвіца. Результати обчислень містяться у таблиці 6.5.

Матриця втрат. Таблиця 6.4

Альтернатива	Мінімум рядків	Максимум рядків	α (мінімум рядка) + (1-α)(максимум рядка)
a_1	5	25	25 - 20α
a_2	7	23	23 - 16α
a_3	12	21	21 - 9α
a_4	15	30	30 - 15α

Використовуючи потрібне значення для α, можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при α = 0,5 оптимальними є альтернатива a_1 або альтернатива a_2, тоді як при α = 0,25 оптимальним є рішення a_3.

6.4 Постановка завдання

Вирішити ситуаційні завдання поставленої задачі.

Варіант 1. Петров — старанний студент, який зазвичай отримує хороші оцінки завдяки тому, що має можливість повторити матеріал у ніч перед екзаменом. Перед завтрашнім екзаменом Петров зіштовхнувся із невеликою проблемою. Його однокурсники організували на всю ніч вечірку, в якій він хоче брати участь. Петров має три альтернативи:
a_1 - брати участь у вечірці всю ніч,
a_2 - половину ночі брати участь у вечірці, а половину - вчитися,
a_3 - вчитися всю ніч.

Професор, який приймає завтрашній екзамен, непередбачуваний, і екзамен може бути легким (s_1), середнім (s_2) або важким (s_3). Залежно від складності екзамену та часу, витраченого Петровим на повторення, можна очікувати такі екзаменаційні бали.

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

Порекомендуйте Петрову, який вибір він має зробити (ґрунтуючись на кожному з чотирьох критеріїв прийняття рішень за умов невизначеності).

Варіант 2. У наближенні посівного сезону фермер Іванов має чотири альтернативи: a_1 - вирощувати кукурудзу, a_2 - вирощувати пшеницю, a_3 - вирощувати соєві боби, a_4 – використовувати землю під пасовища.

Платежі, пов'язані із зазначеними можливостями, залежать від кількості опадів, які умовно можна поділити на чотири категорії: s_1 - сильні опади, s_2 - помірні опади, s_3 - незначні опади, s_4 - засушливий сезон.

латіжна матриця (у тис. дол.) оцінюється в такий спосіб.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Що має посіяти фермер Іванов (ґрунтуючись на кожному з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності)?

Варіант 3 Петров — старанний студент, який зазвичай отримує хороші оцінки завдяки тому, що має можливість повторити матеріал у ніч перед екзаменом. Перед завтрашнім екзаменом Петров зіштовхнувся із невеликою проблемою. Його однокурсники організували на всю ніч вечірку, в якій він хоче брати участь. Петров має три альтернативи: a_1 - брати участь у вечірці всю ніч, a_2 - половину ночі брати участь у вечірці, а половину - вчитися, a_3 - вчитися всю ніч.

Професор, який приймає завтрашній екзамен, непередбачуваний, і екзамен може бути легким (s_1), середнім (s_2) або важким (s_3). Залежно від складності екзамену та часу, витраченого Петровим на повторення, можна очікувати такі екзаменаційні бали.

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

Припустимо, що Петров зацікавлений у оцінці у літерному вираженні, яку він хоче одержати на екзамені. Літерним оцінкам від A до D, які означають ступінь складання екзамену, відповідають 90, 80, 70 та 60 балів. Інакше, при числі балів нижче 60, студент отримує оцінку F, яка свідчить про те, що екзамен не складено. Порекомендуйте Петрову, який вибір він має зробити (ґрунтуючись на кожному з чотирьох критеріїв прийняття рішень за умов невизначеності).

Варіант 4. Один з N верстатів має бути обраний для виготовлення Q одиниць певної продукції. Мінімальна та максимальна потреба у продукції дорівнює Q_1 і Q_2 відповідно. Виробничі витрати TC_i на виготовлення Q одиниць продукції на верстаті i включають фіксовані витрати K_i та питомі витрати c_i на виробництво одиниці продукції та виражаються формулою $TC_i = K_i + c_i*Q$. Розв'яжіть задачу за допомогою кожного з чотирьох критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності при наступних даних, припускаючи, що $1000 \le Q \le 4000$.

Верстат i	K_i (\$)	c_i (\$)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

Варіант 5. Сільськогосподарське підприємство може реалізувати деяку продукцію: a_1 - відразу після збирання; a_2 – у зимові місяці; a_3 – у весняні

місяці. Прибуток залежить від ціни реалізації в даний період часу, витрат на зберігання та можливих втрат. Розмір прибутку, розрахований для різних станів-співвідношень доходу та витрат (s_1, s_2 та s_3), протягом усього періоду реалізації представлений у вигляді матриці (млн. грн.)

	s_1	s_2	s_3
a_1	5	-5	8
a_2	-2	7	6
a_3	-10	15	-1

Визначити найбільш вигідну стратегію за всіма критеріями (критерій Лапласа, максимінний критерій Вальда, критерій мінімаксного ризику Севіджа, критерій песимізму-оптимізму Гурвіца, α: 0.5; 0.7).

Варіант 6. На підприємстві вирішується питання щодо створення ремонтної бригади. Ґрунтуючись на застосуванні критеріїв Вальда, Лапласа, Севіджа та Гурвіца ($\alpha = 0.5$), визначити найбільш доцільне число членів бригади. Вхідні дані зведені у таблиці, в комірках якої занесені доходи за різних варіантах (стратегіях). Під стратегією розуміється x - число членів бригади і R - кількість верстатів, які потребують ремонту.

x**R	**40**	**30**	**20**	**10**
5	50	100	180	250
4	80	70	80	230
3	210	180	120	210
2	300	220	190	150

Приблизний варіант відповіді: Таким чином, за цих умов раціональним рішенням буде x=3, R=10, $\min u_{xR} = 210$.

Варіант 7. Лісозаготівельне підприємство має зв'язки з чотирма споживачами. Розмір поставок визначений, але можливі відхилення у той чи інший бік, які призводять до втрат прибутку по причині перевищення попиту чи через неповного його задоволення. Можливі втрати через неточності попиту зведені в таблицю (в ум. од.). Застосувати послідовно критерії Лапласа, Вальда, Севіджа і Гурвіца (ваговий множник 0,5) і порівняти отримані результати.

	Споживачі				
		C_1	C_2	C_3	C_4
Рівні попиту	a_1	5	10	18	25
	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	25

Варіант 8. Підприємству потрібно придбати верстат для виготовлення виробів, розмір яких може набувати будь-якого значення в діапазоні $d_{\min} < d < d_{\max}$. Виробничі витрати для верстата i задаються формулою:

$$C_i = k_i + c_i * d,$$

де

k_i – постійна величина;

c_i – вартість виготовлення одиниці продукції для верстата i.

Вирішити задачу у загальному вигляді з використанням критеріїв Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца (ваговий множник 0,8).

Варіант 9. Допоможіть фірмі вибрати ринок для реалізації своїх товарів залежно від ступеня конкуренції та політичної обстановки з використанням критеріїв Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца (ваговий множник 0,7; 0,2)

Можливі значення прибутку (тис. гр. од.) для трьох товарних ринків				
Можливі нові товарні ринки	Політична обстановка			
	стабільна	стабільна	нестабільна	нестабільна
	Ступінь конкуренції			
	слабкий, Z_1	сильний, Z_2	слабкий, Z_3	сильний, Z_4
Ринок, A_1	530	460	240	220
Ринок, A_2	490	390	300	270
Ринок, A_3	575	420	260	190

Варіант 10. Підприємство готується до переходу нові види продукції, при цьому можливі чотири рішення P_1, P_2, P_3, P_4, кожному з яких відповідає певний вид випуску або його поєднання. Результати прийнятих рішень істотно залежать від обстановки, яка значною мірою не визначена. Нехай варіанти обстановки характеризує структура попиту на нову продукцію, яка може бути трьох типів: O_1, O_2, O_3. Виграш, що характеризує відносну величину результату (доходи, прибуток і т.п.), відповідний кожній парі поєднань рішень P та обстановки O, представлений в таблиці.

Таблиця. Ефективність випуску нових видів продукції

Варіанти рішень, P_i	Варіанти умов обстановки, O_j		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,25	0,35	0,40
P_2	0,75	0,20	0,30
P_3	0,35	0,82	0,10
P_4	0,80	0,20	0,35

Варіант 11. Директор торгової фірми по продажу телевізорів вирішив відкрити представництво в обласному центрі. Він має альтернативи або відкрити власний магазин в окремому приміщенні, або організувати співпрацю з місцевими торгівельними центрами. Всього можна виділити 5 альтернатив рішення: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Успіх торгової фірми залежить від того, яка складеться ситуація на ринку послуг. Експерти виділяють 4 можливих варіанта розвитку ситуації s_1, s_2, s_3, s_4. Прибуток фірми для кожної альтернативи при кожній ситуації надано в платіжній матриці в млн. грн./рік.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	8	12	14	5
a_2	9	10	11	10
a_3	2	4	9	22
a_4	12	14	10	1
a_5	15	6	7	14

Визначити найбільш вигідну альтернативу за всіма критеріями (критерій Лапласа, максимінний критерій Вальда, критерій песимізму-оптимізму Гурвіца, критерій мінімаксного ризику Севіджа).

Варіант 12. Нафтова компанія збирається будувати нафтову вишку. Існують 4 проєкти A, B, C і D. Витрати на будову (млн. грн.) залежать від того, які погодні умови будуть в період будування. Можливі 5 варіантів погоди: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Вибрати оптимальний проєкт для будівництва за критеріями Лапласа, Вальда, Севіджа і Гурвіца при $\alpha = 0,6$.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	7	12	8	10	5
a_2	9	10	7	8	9
a_3	6	8	15	9	7
a_4	9	10	8	11	7

Варіант 13. Директор фінансової компанії проводить ризиковану фінансову операцію. Страхова компанія пропонує застрахувати угоду і пропонує 4 варіанти страхування: a_1, a_2, a_3, a_4. Компенсація відшкодувань для кожного варіанту залежить від того, який страховий випадок стався. Існує 5 видів страхових випадків: s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Компенсації (тис. ум. од.) для кожного виду страхування при кожному страховому випадку складають платіжну матрицю:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	43	22	42	49	45
a_2	41	37	40	38	42
a_3	39	48	47	42	36
a_4	37	29	32	58	41

Вибрати найкращу альтернативу за критеріями Лапласа, Вальда, Севіджа і Гурвіца при $\alpha = 0,4$.

Варіант 14. Фермер, маючи в орендуванні великі площі під посів кукурудзи, помітив, що вологості ґрунту в сезон дозрівання кукурудзи недостатньо для отримання максимального врожаю. Експерти порадили фермеру провести дренажні канали в період кінця весни – початку літа, що повинно значно підвищити врожай. Були запропоновано 5 проєктів дренажних каналів: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, витрати на які залежать від погодних умов в період весна – літо. Можливі варіанти: s_1 – дощова весна і дощове літо, s_2 - дощова весна і сухе літо, s_3 - суха весна і дощове літо, s_4 - суха весна і сухе літо.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	21	12	22	25
a_2	20	21	18	19
a_3	16	33	14	17
a_4	23	16	19	24
a_5	15	16	27	26

Вибрати найкращу альтернативу за критеріями Лапласа, Вальда, Севіджа і Гурвіца при $\alpha = 0{,}7$.

6.5 Порядок виконання завдання

6.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

6.5.2. За індивідуальним варіантом знайти раціональне рішення, використовуючи по черзі критерії, запропоновані у завданні.

6.5.3. Порівняти результати, отримані за допомогою різних критеріїв. Зробити висновки.

6.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx, *.py), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

6.7 Контрольні запитання

1) Чим обумовлена невизначеність ситуацій складних систем?

2) В яких випадках доцільне використання критерія Лапласа

3) Які критерії варто використовувати в умовах максимальної обережності, коли про ймовірніть станів нічого не відомо?

4) Який критерій варто застосовувати, коли потрібно мінімізувати втрати?

Практичне завдання №7

Прийняття рішень в умовах конфлікту

7.1 Мета:

1) Навчитися використовувати принцип максимінного виграшу для розв'язання задач теорії ігор в чистих стратегіях.

2) Отримати навички пошуку раціональних рішень в умовах конфлікту з використанням пакета MS Excel та мови програмування Python.

7.2 Теоретичні відомості

В теорії ігор розглядаються ситуації, пов'язані з прийняттям рішень, у яких два чи більше розумних супротивника мають конфліктуючі цілі. Саме слово «гра» застосовується для позначення деякого набору правил і угод, що становлять цей вид гри, наприклад: футбол, карткова гра, шахи. Ці ситуації прийняття рішень відрізняються від розглянутих раніше, де природа, хоч і могла перебувати в різних станах, але не переслідувала будь-які цілі і, отже, не розглядалася в ролі суперника.

У грі зацікавлені сторони називаються *гравцями*, кожен з яких має кілька варіантів вибору (не менше двох, інакше він фактично не бере участі в грі, оскільки заздалегідь відомо, що він зробить).

Ми розглядатимемо ігрові моделі конфліктів, у яких беруть участь два супротивники, кожен із яких має кінцеве число варіантів вибору рішень. З кожною парою рішень пов'язаний платіж, який один із гравців виплачує іншому (тобто виграш одного гравця дорівнює програшу іншого). Такі ігри прийнято називати *кінцевими іграми двох осіб із нульовою сумою*.

У грі беруть участь два гравці: A і B. У розпорядженні кожного гравця є обмежена множина варіантів вибору - *стратегій*. Нехай $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ - множина стратегій гравця A, $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ - множина стратегій гравця B. З кожною парою стратегій пов'язаний платіж, який один із гравців виплачує іншому. Тобто, коли гравець A вибирає стратегію A_i (свою і-у стратегію), а гравець *B* – стратегію B_j, то результатом такого вибору стає платіж $H(A_i, B_j)$. Оскільки стратегій кінцеве число, платежі утворюють матрицю розмірності $n\times m$, яка називається *матриця платежів* (або *матриця гри*). Рядки цієї матриці відповідають стратегіям гравця *A*, а стовпці - стратегіям гравця *B*.

Матриця гри $n\times m$ в загальному виді

	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}
…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Розглянемо процес прийняття рішень обома сторонами, припускаючи, що обидва гравці діятимуть раціонально. Якщо гравець *A* не знає, як вчинить його противник, то, діючи найбільш доцільно і не бажаючи ризикувати, він вибере таку стратегію, яка гарантує йому найбільший з найменших виграшів за будь-якої стратегії противника.

Прийнято казати, що при такому образі дій гравець *A* керується *принципом максимінного виграшу*. Цей виграш визначається формулою (7.1)

$$\alpha = \max_i \min_j A_{ij},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m. \tag{7.1}$$

Величина α називається *нижньою ціною гри*, *максимінним виграшем*, або *максиміном.* Це той гарантований мінімум, який *A* може собі забезпечити, дотримуючись найбільш обережної стратегії.

Очевидно, аналогічне міркування можна провести і за гравця *B*. Оскільки він зацікавлений у тому, щоб звернути виграш *A* в мінімум, він повинен переглянути кожну свою стратегію з точки зору максимального виграшу при цій стратегії. Тому внизу матриці ми випишемо максимальні значення для кожного стовпця $\beta_j = \max_i A_{ij}$.

Всі ці максимуми хороші для *A*, але вкрай неприємні для *B*. Оскільки противник також враховує нашу розумність, то вибирає з цих варіантів найменший (7.2)

$$\beta = \min_j \max_i A_{ij}, \ 1 \le j \le m, \ 1 \le i \le n. \tag{7.2}$$

- більше цієї суми гравець *B* точно не втратить. Величина β називається *верхньою ціною гри*, інакше - *мінімаксом*.

Принцип обережності, який визначає вибір партнерами стратегій, що відповідають максимінному виграшу або мінімаксному програшу, часто називають *принципом мінімаксу*, а стратегії, що випливають із цього принципу, — *мінімаксними стратегіями.*

Можна довести, що завжди $\alpha \le \beta$, чим і пояснюються назви "нижня ціна" та "верхня ціна". Однак існують деякі ігри, для яких мінімаксні стратегії є *стійкими*. Це ті ігри, для яких *нижня ціна дорівнює верхній*:

$$\alpha = \beta.$$

Якщо нижня ціна гри дорівнює верхній, то їх загальне значення називається *ціною гри*, і позначають *V*. У геометрії точку на поверхні, що має аналогічну властивість (одночасний мінімум по одній координаті і максимум по іншій), називають *сідловою точкою*. За аналогією цей термін застосовується і в теорії ігор. Елемент матриці, що має цю властивість, називається *сідловою точкою матриці*, а про гру говорять, що вона має *сідлову точку*.

Для ігор з сідловою точкою рішення гри має наступну чудову властивість. Якщо один із гравців (наприклад *A*) дотримується своєї оптимальної стратегії, а інший гравець (*B*) буде будь-яким способом відхилятиметься від своєї оптимальної стратегії, то для гравця, який допустив відхилення, це ніколи не може виявитися вигідним. Це твердження легко перевірити на прикладі розглянутої гри з сідловою точкою.

У цьому випадку наявність у будь-якого гравця відомостей про те, що противник обрав свою оптимальну стратегію, не може змінити власної поведінки гравця: якщо він не хоче діяти проти своїх інтересів, він повинен дотримуватися своєї оптимальної стратегії. Тобто пара оптимальних стратегій у грі з сідловою точкою є «становищем рівноваги».

7.3 Приклад виконання завдання

Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Рішення.

Мінімізуючи елементи першого рядка, отримаємо, що $\alpha_1 = \min\{2,10,3,14,5\} = 2$, аналогічно, $\alpha_2 = \min\{8,9,5,6,7\} = 5$, $\alpha_3 = \min\{10,8,4,8,12\} = 4$.

Максимізуючи елементи по стовпцях, отримаємо:

$\beta_1 = 10, \beta_2 = 10, \beta_3 = 5, \beta_4 = 14, \beta_1 = 12$.

Нижня ціна гри визначається шляхом максимізації α_i:

$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\{2,5,4\} = 5$.

Верхня ціна гри визначається мінімізацією β_j:

$\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\{10,10,5,14,12\} = 5$.

Маємо $\alpha = \beta$, отже $V = 5$.

Гра, яка визначається матрицею *A*, має сідлову точку (2, 3).

Задачу можна розв'язати в чистих стратегіях. Оптимальний спосіб гри знайдено.

Висновок. Дотримуючись чистої другої стратегії, перший гравець забезпечує собі виграш, не менший 5, другий гравець, застосовуючи чисту третю стратегію, програє не більше 5. Обидві стратегії *i*=2 і *j*=3 є оптимальними для першого і другого гравців. Ціна гри *V* = 5.

7.4 Постановка завдання

Задача 1. Для наступних задач визначте верхню та нижню ціни гри, чисті стратегії першого та другого гравця, оптимальність стратегій, якщо можливо, сідлову точку та ціну гри.

Варіант 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Варіант 2.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Варіант 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 4.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Варіант 5.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 6.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 4 & 5 & 10 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Варіант 7.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 8.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 12 & 9 \\ 17 & 16 & 13 & 14 \\ 23 & 8 & 10 & 25 \end{pmatrix}$$

Варіант 9.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Варіант 11.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Варіант 12.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Варіант 13.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Варіант 14.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Варіант 15.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Варіант 16.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1{,}1 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1{,}1 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Варіант 17.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Варіант 18.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 & -2 \\ 5 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Варіант 19.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Варіант 20.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Створити програму на мові Python, яка забезпечує:

– введення двох цілих чисел $2 \le m \le 10$ та $2 \le n \le 10$, які відповідають кількості можливих стратегій гравців A та B;

– формування $m \times n$ платіжної матриці, елементи якої заповнюються випадковими числами, що належать до інтервалу значень [-20, 20];
– знаходження розв’язку матричної гри в чистих стратегіях або його відсутності (вказати чисті стратегії першого та другого гравця, верхню та нижню ціну гри, сідлову точку чи її відсутність, ціну гри чи її відсутність у чистих стратегіях).
Зауваження: з кожним стартом програми елементи платіжної матриці мають оновлюватися.

7.5 Порядок виконання завдання

7.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

7.5.2. За індивідуальним варіантом визначте верхню та нижню ціни гри, чисті стратегії першого та другого гравця, оптимальність стратегій, якщо можливо, сідлову точку та ціну гри у середовищі MS Excel.

7.5.3. Створити програму на мові Python для знаходження розв’язку матричної гри в чистих стратегіях або його відсутності (вказати чисті стратегії першого та другого гравця, верхню та нижню ціну гри, сідлову точку чи її відсутність, ціну гри чи її відсутність у чистих стратегіях.

7.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx, *.py), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

7.7 Контрольні запитання

1) Дайте визначення кінцевою гри двох осіб із нульовою сумою.

2) Як формується матриця гри?

3) В чому сутність принципу максимінного виграшу?

4) Що таке нижня ціна гри?

5) Що таке верхня ціна гри?

6) Чи завжди існує сідлова точка?

Практичне завдання №8

Змішані стратегії. Графоаналітичний метод рішення задачі теорії ігор

8.1 Мета:

1) Навчитися визначити оптимальні стратегії гравців та ціну гри, визначену заданою платіжною матрицею.

2) Отримати навички пошуку раціональних рішень в умовах конфлікту з використанням пакета MS Excel та мови програмування Python.

8.2 Теоретичні відомості

У більшості випадків матрична гра не має сідлової точки, тому відповідна матрична гра не має рішень у чистих стратегіях. Але вона має рішення у оптимальних змішаних стратегіях. Для їх знаходження потрібно прийняти, що гра повторюється достатню кількість разів, щоб виходячи з досвіду можна було припустити, яка стратегія є кращою. Тому рішення пов'язується з поняттям ймовірності та середнього (математичного очікування). У остаточному рішенні є і аналог сідлової точки (тобто рівності нижньої та верхньої ціни гри), і аналог відповідних їм стратегій.

Отже, щоб перший гравець отримав максимальний середній виграш і щоб середній програш другого гравця був мінімальним, чисті стратегії слід використовувати з певною ймовірністю.

Матриця гри $n \times m$ в загальному виді

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Стратегія гравця A, яку позначають

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

і застосовують чисті стратегії A_1, A_2, …, A_m , чередуючи їх за випадковим законом з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_m, p_i \geq 0, 1 \leq i \leq m, p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$, називається *змішаною стратегією гравця А*.

Стратегія гравця *B*, яку позначають

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

і застосовують чисті стратегії B_1, B_2, …, B_n , чередуючи їх за випадковим законом з ймовірностями $q_1, q_2, \dots, q_n, q_j \geq 0, q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, називається *змішаною стратегією гравця В*.

Якщо перший гравець використовує змішану стратегію S_A, а другий гравець - змішану стратегію S_B, то має сенс математичне очікування М(S_A, S_B) виграшу першого гравця (програшу другого гравця). Щоб його знайти, потрібно перемножити вектор змішаної стратегії першого гравця (який буде матрицею з одного рядка), платіжну матрицю та вектор змішаної стратегії другого гравця (який буде матрицею з одного стовпця).

Оптимальною змішаною стратегією першого гравця називається така змішана стратегія, яка б забезпечувала йому максимальний середній виграш, якщо гра повторюється достатню кількість разів. Оптимальною змішаною стратегією другого гравця називається така змішана стратегія, яка б йому забезпечувала мінімальний середній програш, якщо гра повторюється достатню кількість разів.

Ігри з матрицею 2×2.

	B_1	B_2
A_1	c_{11}	c_{12}
A_2	c_{21}	c_{22}

Якщо гра не має сідлової точки, вона має рішення в оптимальних змішаних стратегіях. Для цього найпростішого випадку матричної гри було знайдено формули стратегій гравців та ціни гри, завдяки яким така гра вирішується менш трудомістким способом.

Формула для знаходження оптимальної змішаної стратегії першого гравця:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},\ p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}},\ p_2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Формула для знаходження оптимальної змішаної стратегії другого гравця:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},\ q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}},\ q_2 = \frac{c_{11} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Формула для знаходження ціни гри: $V = \dfrac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}$.

8.3 Приклад виконання завдання

Задача 1. Гра задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри графоаналітичним методом.

Рішення.

Визначимо верхню та нижню ціни гри

	B1	B2	B3	B4	
A1	1	5	9	3	1
A2	6	3	2	7	2
	6	5	9	7	

Нижня ціна гри $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j c_{ij} = 2$,

Верхня ціна гри $\beta = \min\limits_j \max\limits_i c_{ij} = 5$.

$\alpha \neq \beta$, гра не має сідлової точки, тобто гра не має рішення в чистих стратегіях.

Шукаємо розв’язок задачі в змішаних стратегіях. Змішана стратегія може забезпечити гравцю A максимально можливий середній виграш з ціною гри $V \in [2; 5]$.

Проведемо через точку (1; 0) координатної площини Oxy пряму L, перпендикулярну до осі абсцис.

Після цього для кожної з стратегій B_i (i = 1, 2, 3, 4) проведемо пряму b_i:

$$y = c_{1i} + (c_{2i} - c_{1i})x\,.$$

Для стратегії B_1: $y = 1 + (6-1)x = 1 + 5x$

Для стратегії B_2: $y = 5 - 2x$

Для стратегії B_3: $y = 9 - 7x$

Для стратегії B_4: $y = 3 + 4x$

Ломана b_1MNb_2, відзначена на рисунку жирною лінією, дозволяє визначити *мінімальний виграш* гравця A при будь-якій поведінці гравця B.

Як це видно з рисунку 8.1 у точці М перетинаються прямі, які відповідають стратегіям B_1 і B_2 гравця B. Тому саме стратегії B_3 і B_4 є неактивні та можуть бути вилучені.

Задача зводиться до 2×2 гри.

Точка М, в якій ця ламана досягає *максимуму*, визначає *рішення та ціну гри.*

Ордината точки М дорівнює ціні гри V.

Абсциса p_2 точки М дорівнює частоті застосування стратегії A_1 в оптимальній змішаній стратегії гравця A.

Стратегії гравця A	Стратегії гравця B	
	B_1	B_2
A_1	1	5
A_2	6	3

$$p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{3-6}{1+3-5-6} = \frac{3}{7}$$

$$p_2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{1-5}{1+3-6-6} = \frac{4}{7}$$

($p_1 + p_2 = 1$)

Оптимальні змішані стратегії гравця A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

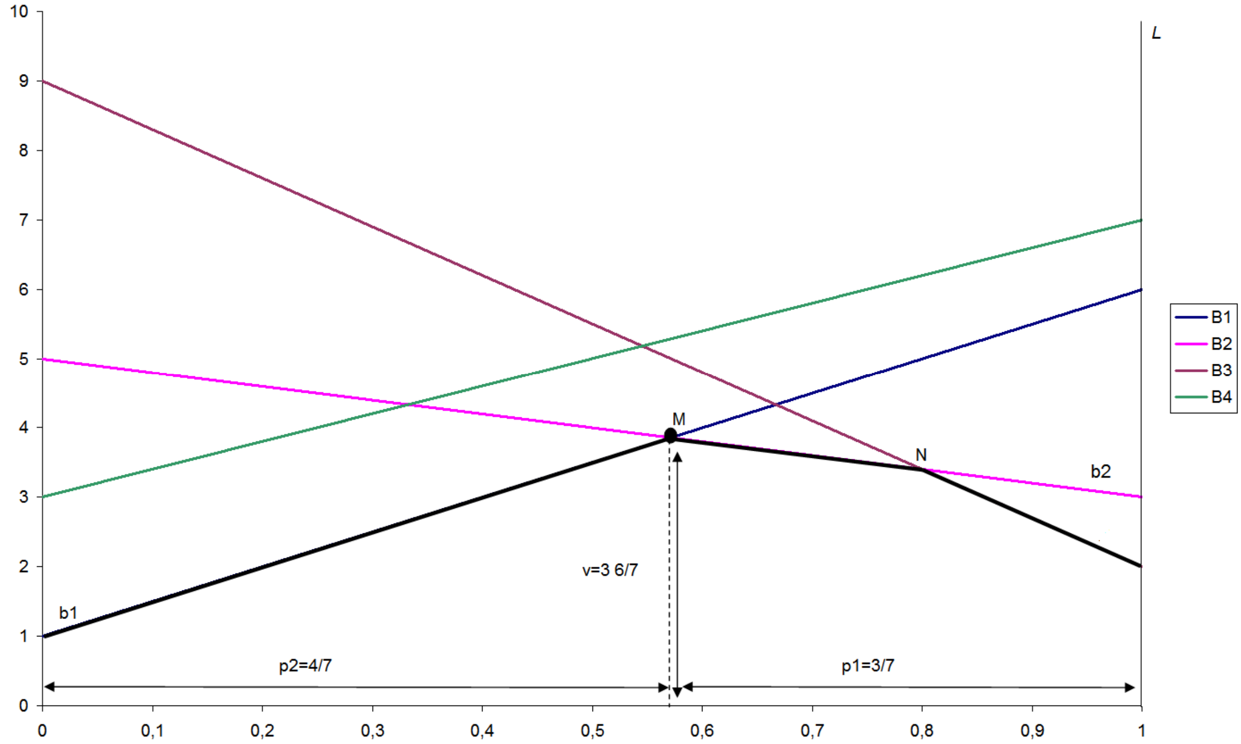


Рисунок 8.1

Визначимо ціну гри:

$$V = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{1 \cdot 3 - 5 \cdot 6}{1 + 3 - 5 - 6} = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$$

Дійсно $3\frac{6}{7} \in [2; 5]$.

$$q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{3 - 5}{1 + 3 - 5 - 6} = \frac{2}{7}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Оптимальні змішані стратегії гравця B:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальні активні змішані стратегії гравця B:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: для багаторазового використання *оптимальні з*мішані стратегії

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ і } S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix},$$

Які забезпечать максимальний виграш гравцю *A* та мінімальний програш гравцю *B*, який дорівнює ціні гри $V = 3\frac{6}{7}$.

Задача 2. Гра задана матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальні стратегії гравців і ціну гри графоаналітичним методом.

Рішення.

Визначимо верхню та нижню ціни гри

	B1	B2	
A1	1	4	1
A2	3	1	1
A3	2	2,5	2
A4	5	0	0
	5	4	

Нижня ціна гри $\alpha = \max_i \min_j c_{ij} = 2$,

Верхня ціна гри $\beta = \min_j \max_i c_{ij} = 4$.

$\alpha \neq \beta$, гра не має сідлової точки, тобто гра не має рішення в чистих стратегіях.

Шукаємо розв'язок задачі в змішаних стратегіях, які забезпечують ціну гри $V \in [2; 4]$.

Проведемо через точку (1; 0) координатної площини *Oxy* пряму *L*, перпендикулярну до осі абсцис.

Після цього для кожної з стратегій A_j (j = 1, 2, 3, 4) проведемо пряму a_j:

$$y = c_{i1} + (c_{i2} - c_{i1})x\,.$$

Для стратегії A_1: $y = 1 + (4 - 1)x = 1 + 3x$

Для стратегії A_2: $y = 3 - 2x$

Для стратегії A_3: $y = 2 + 0{,}5x$

Для стратегії A_4: $y = 5 - 5x$

Ломана a_4Ma_1, відзначена на рисунку жирною лінією, дозволяє визначити *максимальний виграш* гравця B при будь-якій поведінці гравця A (рис. 8.2).

Як це видно з рисунку у точці М перетинаються прямі, які відповідають стратегіям A_1 і A_4 гравця A. Тому стратегії A_3 і A_2 є неактивні та можуть бути вилучені.

Задача зводиться до 2×2 гри.

Точка М, в якій ця ламана досягає **максимуму**, визначає *рішення та ціну гри*. Ордината точки М дорівнює ціні гри V.

Абсциса p_2 точки М дорівнює частоті застосування стратегії B_1 в оптимальній змішаній стратегії гравця B.

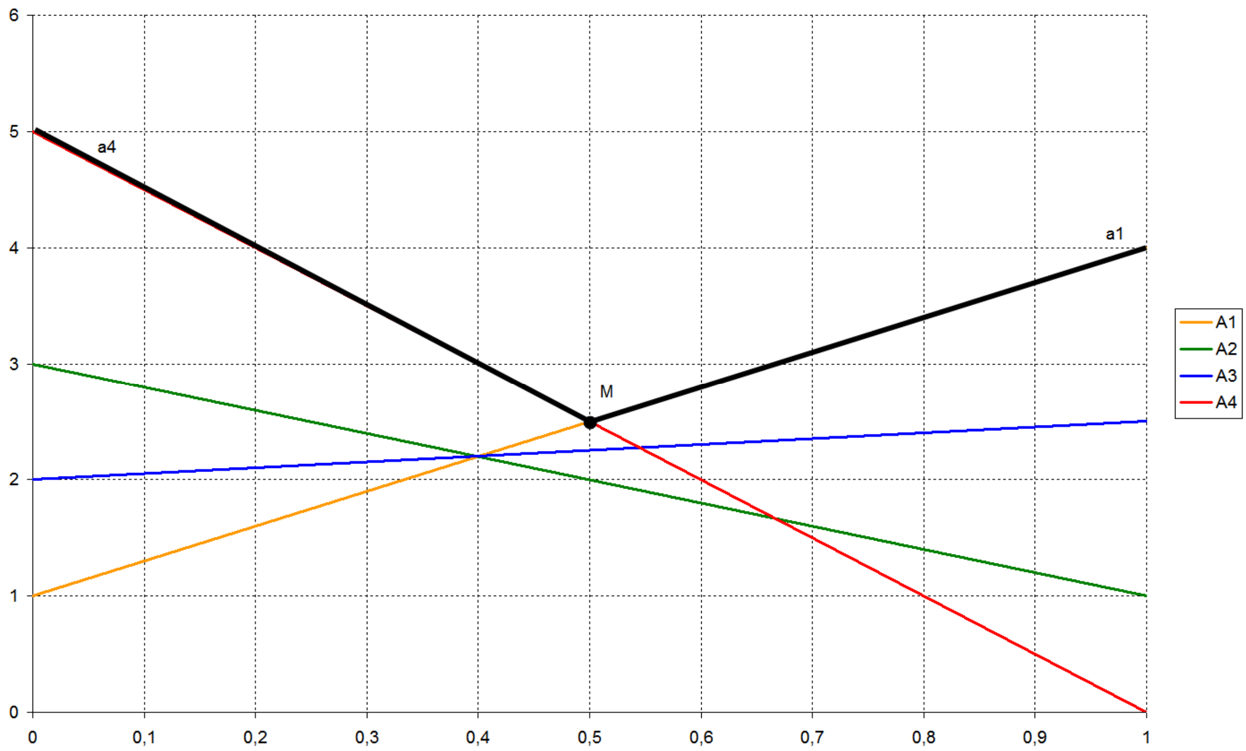


Рисунок 8.2

Стратегії гравця *A*	Стратегії гравця *B*	
	B_1	B_2
A_1	1	4
A_4	5	0

$$q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{0 - 4}{1 + 0 - 4 - 5} = 0,5$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - 0,5 = 0,5$$

Оптимальні змішані стратегії гравця *A*

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Визначимо ціну гри (рис. 8.3):

$$V = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{1 \cdot 0 - 5 \cdot 4}{1 + 0 - 4 - 5} = 2,5 .$$

Дійсно $2,5 \in [2; 4]$.

$$p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}} = \frac{0 - 5}{1 + 0 - 4 - 5} = 0,625$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,625 = 0,375$$

Оптимальні змішані стратегії гравця *A:*

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0,625 & 0 & 0 & 0,375 \end{pmatrix}$$

Оптимальні активні змішані стратегії гравця *A*

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}.$$

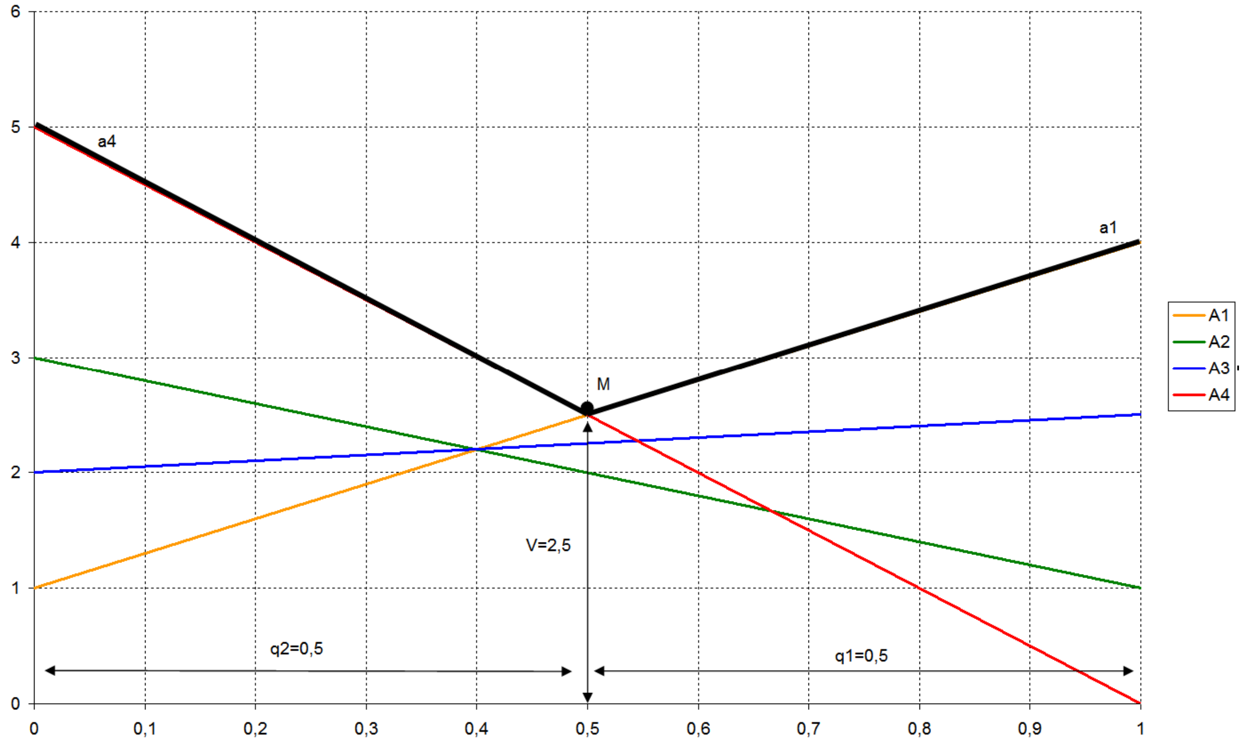


Рисунок 8.3

Відповідь: для багаторазового використання ***оптимальні*** змішані стратегії

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ 0{,}626 & 0{,}375 \end{pmatrix} \text{ і } S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

які забезпечать максимальний виграш гравцю A та мінімальний програш гравцю B, який дорівнює ціні гри $V = 2{,}5$.

8.4 Постановка завдання

Задача. 1) За допомогою графоаналітичного методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $2 \times n$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри. 2) За допомогою графоаналітичного методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $m \times 2$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри.

Варіант 1.

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 9 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Варіант 2.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 3.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 4.

1) $A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}4 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 2 & -8 \\ -1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Варіант 5.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 6.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Варіант 7.

1) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 8.

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Варіант 9.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант 10.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Варіант 11.

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант 12.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант 13.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 14.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 9 \\ 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 15.

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 16.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 17.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 18.

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант 19.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 4 \\ 4 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

Варіант 20.

1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

8.5 Порядок виконання завдання

8.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

8.5.2. За індивідуальним варіантом за допомогою графоаналітичного методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $2 \times n$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри у середовищі MS Excel та Python.

8.5.3. За індивідуальним варіантом за допомогою графоаналітичного методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $m \times 2$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри у середовищі MS Excel та Python.

8.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx, *.py), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

8.7 Контрольні запитання

1) Як визначаються змішані стратегії?

2) В чому суть графоаналітичного методу?

3) Що таке оптимальні змішані стратегії?

4) Як знайти оптимальне рішення гри 2×2?

Практичне завдання №9

Загальний метод розв'язування матричної гри $m \times n$.

9.1 Мета:

1) Навчитися визначити оптимальні стратегії гравців та ціну гри, визначену заданою платіжною матрицею.

2) Отримати навички пошуку раціональних рішень в умовах конфлікту з використанням пакета MS Excel та мови програмування Python.

9.2 Теоретичні відомості

Для того, щоб знайти оптимальні змішані стратегії та сідлову точку, тобто вирішити матричну гру в змішаних стратегіях, потрібно звести матричну гру до задачі лінійного програмування, тобто до оптимізаційної задачі, і вирішити відповідну задачу лінійного програмування та двоїсту задачу лінійного програмування. У двоїстій задачі розширена матриця, в якій зберігаються коефіцієнти при змінних у системі обмежень, вільні члени і коефіцієнти при змінних функції цілі, транспонується. При цьому мінімуму функції цілі вихідної задачі ставиться у відповідність максимум у двоїстій задачі.

Таблиця 9.1. Платіжна матриця загальної $m \times n$ гри

Наші рішення	Рішення супротивника			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Задача лінійного програмування для першого гравця:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m \geq 1 \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m \geq 1 \end{cases} \tag{9.6}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m$$

з ціною гри $V = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}$, де $x_1 = \dfrac{p_1}{V}$; $x_2 = \dfrac{p_2}{V}$; …; $x_m = \dfrac{p_m}{V}$.

Поведінці гравця *B* відповідає двоїста задача:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \leq 1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n \leq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mn}y_n \leq 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n$$

де $y_1 = \dfrac{q_1}{V}$; $y_2 = \dfrac{q_2}{V}$; …; $y_n = \dfrac{q_n}{V}$.

9.3 Приклад виконання завдання

Задача. Знайти ціну гри та визначити оптимальні стратегії:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Рішення.

Визначимо верхню та нижню ціни гри

	A	B	C	D	E
1		B1	B2	B3	
2	A1	4	5	6	4
3	A2	7	3	2	2
4	A3	2	1	8	1
5		7	5	8	
6	Нижня ціна гри:		4		
7	Верхня ціна гри:		5		
8					

Нижня ціна гри відрізняється від верхньої ціни гри, гра є грою без сідлової точки, в чистих стратегіях не можливо знайти ціну гри. Ціна гри 4< V <5.

Модель лінійного програмування для гравця A:

$$V \to \max$$
$$\begin{cases} 4p_1 + 7p_2 + 2p_3 \geq V \\ 5p_1 + 3p_2 + p_3 \geq V \\ 6p_1 + 2p_2 + 8p_3 \geq V \end{cases}$$
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$p_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$

Позначимо

$$x_i = \frac{p_i}{V}, \qquad i = 1,2,3.$$

Перепишемо задачу у вигляді

$$x_1 + x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4p_1 + 7p_2 + 2p_3 \geq 1 \\ 5p_1 + 3p_2 + p_3 \geq 1 \\ 6p_1 + 2p_2 + 8p_3 \geq 1 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.$$

Вирішимо цю задачу за допомогою Пошуку рішення в MS Excel, для цього внесемо формули у відповідні осередки:

B9: =B2*$G$2+B3*$G$3+B4*$G$4

C9: =C2*$G$2+C3*$G$3+C4*$G$4

D9: =D2*$G$2+D3*$G$3+D4*$G$4

H2: =G2+G3+G4

І виконаємо сервіс Пошук рішення при обмеженнях $B$9:$D$9 >= 1, змінюючи осередки $G$2:$G$4, цільовий осередок в $H$2 дорівнює мінімальному значенню, зробити змінні без обмежень невід’ємними, метод рішення – симплекс-метод.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		B1	B2	B3			x	ц.ф.(min)
2	A1	4	5	6	4		0,173913043	0,217391304
3	A2	7	3	2	2		0,043478261	
4	A3	2	1	8	1		0	
5		7	5	8				
6		Нижня ціна гри:	4					
7		Верхня ціна гри:	5					
8								
9	Обмеження	1	1	1,13043478				

Виконаємо зворотні перетворення, щоб отримати ціну гри: $V = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$

Та знайдемо частоти застосування стратегій гравцем A: $p_i = x_i \cdot V$, $i = 1,2,3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		B1	B2	B3			x	ц.ф.(min)	V	p
2	A1	4	5	6	4		0,173913043	0,217391304	4,6	0,8
3	A2	7	3	2	2		0,043478261			0,2
4	A3	2	1	8	1		0			0
5		7	5	8						1
6		Нижня ціна гри:	4							
7		Верхня ціна гри:	5							
8										
9	Обмеження	1	1	1,13043478						
10										

Отримали:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \; V = 4{,}6.$$

Розв'яжемо зачу за допомогою мови Python

```
from pulp import LpMinimize, LpMaximize, LpProblem, LpStatus, LpVariable, LpStatusOptimal

#Матриця
matrix =[[4, 5, 6],
         [7, 3, 2],
         [2, 1, 8]]
#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
# Визначаємо модель
model = LpProblem(name="Production_cheduling_problem", sense=LpMinimize)

# Описуємо змінні
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}

# Додаємо обмеження
model += (4 * x[1] + 7 * x[2] + 2 * x[3] >= 1)
model += (5 * x[1] + 3 * x[2] + 1 * x[3] >= 1)
```

```
model += (6 * x[1] + 2 * x[2] + 8 * x[3] >= 1)

# Описуємо ціль
model += x[1] + x[2] + x[3]

# Розв'язуємо задачу оптимізації
status = model.solve()

# Перевіряємо, чи задача має розв'язок
if status == LpStatusOptimal:
    # Створюємо масив для збереження результатів
    results_x = []

    # Записуємо результати рішення у масив
    for var in x.values():
        results_x.append(var.value())

    # Виводимо результати
    print(f"Ц.Ф.(min) = {model.objective.value()}")
    for i, result in enumerate(results_x, start=1):
        print(f"x{i}: {result}")
else:
    print("Задача не має оптимального розв'язку.")

#Ціна гри
V = 1/model.objective.value()
print(f"Ціна гри = {V:.1f}")

results_q= [value * V for value in results_x]

for i, result in enumerate(results_q, start=1):
    print(f"p{i}: {result:.1f}")
```

Отримали результат:

```
Ц.Ф.(min) = 0.21739130099999998
x1: 0.17391304
x2: 0.043478261
x3: 0.0
Ціна гри = 4.6
p1: 0.8
p2: 0.2
p3: 0.0
```

Двоїста задача для гравця B:

$V \to \min$

$$\begin{cases} 4q_1 + 5q_2 + 6q_3 \le V \\ 7q_1 + 3q_2 + 2q_3 \le V \\ 2p_1 + q_2 + 8q_3 \le V \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_j \ge 0, \quad j = 1,2,3\,.$$

Позначимо

$$y_j = \frac{q_j}{V}, \qquad j = 1,2,3\,.$$

Перепишемо задачу у вигляді

$$y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 1 \\ 7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 + 8y_3 \le 1 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = 1,2,3\,.$$

Вирішуємо задачу аналогічно першій за допомогою Пошука рішення та мови Python. Отимали наступні результати:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		B1	B2	B3			y	ц.ф.(max)	V	q
2	A1	4	5	6	4		0,086956522	0,217391304	4,6	0,4
3	A2	7	3	2	2		0,130434783			0,6
4	A3	2	1	8	1		0			0
5		7	5	8						1
6	Нижня ціна гри:		4							
7	Верхня ціна гри:		5							
8										
9	Обмеження	1	1	0,304347826						
10										

```
Ц.Ф.(max) = 0.217391302
y1: 0.086956522
y2: 0.13043478
y3: 0.0
Ціна гри = 4.6
q1: 0.4
q2: 0.6
q3: 0.0
```

Отримали:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix},\ V = 4{,}6.$$

Відповідь: $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$, $V = 4{,}6.$

9.4 Постановка завдання

Задача. 1) Знайти ціну гри та визначити оптимальні стратегії в середовищі MS EXCEL. 2) Знайти ціну гри та визначити оптимальні стратегії за допомогою мови Python. 3) Порівняти результати.

Варіант 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Варіант 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 5.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Варіант 6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Варіант 7.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Варіант 8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 9.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 5 \\ 8 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Варіант 10.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Варіант 11.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 8 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Варіант 12.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Варіант 13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 14.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Варіант 15.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 16.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 12 \\ 3 & 7 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Варіант 17.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Варіант 18.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Варіант 19.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Варіант 20.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

9.5 Порядок виконання завдання

9.5.1. Ознайомитися із теоретичними відомостями по темі заняття.

9.5.2. За індивідуальним варіантом за допомогою загального методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $m \times n$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри у середовищі MS Excel.

9.5.3. За індивідуальним варіантом за допомогою загального методу вирішити гру, задану платіжною матрицею $m \times n$. Знайти оптимальні стратегії гравців та визначити ціну гри на мові Python.

9.5.4. Порівняти результати. Зробити висновки.

9.6 Оформлення і захист індивідуального завдання

У звіті про виконання відображається найменування практичного заняття, мета, вихідні дані, результати розрахунків і висновки.

При захисті індивідуального завдання студент повинен надати письмовий звіт (файли *.pdf, *.xlsx, *.py), відповідно вимогам про виконання роботи, обґрунтовано захистити обраний варіант рішень за висновками і відповести на контрольні запитання.

9.7 Контрольні запитання

1) Як визначається модель лінійного програмування для гравця A?

2) Як визначається модель лінійного програмування для гравця B?

3) В чому суть загального методу розв’язування матричної гри $m \times n$?

Література

1. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. – К., 2014. – 94с.
2. Дякон В.М., Ковальов Л.Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень. Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.
3. Практикум з теорії прийняття рішень: навч. посіб. / Автор-уклад.: О.В. Присяжнюк - Кропивницький: ЦДПУ імені В.Винниченка, 2018. – 76 с.
4. Теорія прийняття рішень. Підручник. / За заг. ред. Бутка М.П. [М.П. Бутко, І.М. Бутко, В.П. Мащенко та ін.] – К.: Центр учбової літератури, 2018. – 360 с.
5. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.
6. Теорія прийняття рішень: підручник для студентів спеціальності «Комп'ютерні науки та інформаційні технології в біології та медицині» / Л.С. Файнзільберг, О.А. Жуковська, В.С. Якимчук. – Київ: Освіта України, 2018. – 246 с.
7. Задачі багатокритеріальної оптимізації [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://ebib.pp.ua/zadachi-mnogokriterialnoy-optimizatsii-7818.html
8. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навчальний посібник / Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 272 с. (Укр. мов.)
9. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.

10. Thomas L. Saaty The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation - RWS Publications Університет штату Пенсільванія – 287 p.
11. Метод аналізу ієрархій [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dss.tg.ck.ua/ahp-help
12. Моделі теорії прийняття рішень [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://stud.com.ua/31879/menedzhment/modeli_teoriyi_priynyattya_rishen
13. Уклад. О.С. Юрков. «Теорії прийняття рішень: курс лекцій». - 2016. . [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://duikt.edu.ua/ua/lib/1/category/660/view/78?lang=ua&act=view&page=1&category=660&id=78
14. Розум М.В. Конспект лекцій до курсу «Теорія прийняття рішень» / М.В. Розум. – Одеса, 2023 р.- 152с. (електр. вар.) Затверджено НМК ННІ ІТІП 31.03.2023 р., протокол №2.

Навчальний посібник

МАРИНА ВАЛЕРІЇВНА РОЗУМ

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
290 с

Підписано до друку
Умов. вид. аркуш 12,08. Тираж 50

Видавництво ОНМУ