

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Кафедра «Технічна кібернетика й інформаційні технології
ім. професора Р.В. Меркта»**

Затверджено
НМК ННІ інформаційних технологій
та інноваційного підприємництва
Протокол №1 від 17.09.2025 р.



Голова НМК ННІІТІП

Андрій ІВАНОВ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки
до курсового проєкту

для здобувачів спеціальності
122 – Комп'ютерні науки
для денної та заочної форми навчання

Методичні вказівки до курсового проекту з освітнього компоненту «Математичні методи дослідження операцій» підготовлені кандидатом фізико-математичних наук **Розум Мариною Валеріївною** – доцентом кафедри «Технічна кібернетика й інформаційні технології імені проф. Р.В. Меркта» Одеського національного морського університету.

Методичні вказівки до курсового проекту з освітнього компоненту «Математичні методи дослідження операцій» схвалено кафедрою «Технічна кібернетика й інформаційні технології імені проф. Р.В. Меркта» ОНМУ (протокол №3 від 28.08.2025 р.)

Рецензент – Малаксіано М.О., д.т.н., професор, зав. кафедрою КТКіІТ імені проф. Р.В. Меркта

ЗМІСТ

1. Структура звіту	4
2. Оформлення звіту	5
3. Вимоги до курсового проекту	8
4. Варіанти завдання	9
5. Приклад виконання	31
6. Література	58
7. Додаток А. Зразок титульної сторінки	59
8. Додаток Б. Зразок оформлення завдання	60
9. Додаток В. Зразок оформлення змісту	62

Структура та оформлення звіту з курсового проєкту

Основним документом, що свідчить про виконання студентом курсового проєкту з освітнього компоненту «Математичні методи дослідження операцій» є письмовий звіт. Зміст звіту повинен розкривати знання і уміння студента, набуті ним у вирішенні питань, визначених метою і завданням освітнього компоненту. Звіт складається індивідуально кожним студентом.

Структура звіту

Рекомендується наступна послідовність викладення матеріалу в звіті:

1. Титульна сторінка звіту (зразок оформлення – Додаток А).
2. Завдання (зразок оформлення – Додаток Б).
3. Зміст звіту із зазначенням сторінок (зразок оформлення – Додаток В).
4. Вступ.
5. Основна частина.

5.1. Побудувати економіко-математичну модель розглянутого об'єкта (процесу). Провести формалізацію мети управління об'єктом, виділення можливих керуючих впливів, що впливають на досягнення сформульованої мети, а також описати систему обмежень на дії.

5.2. Рішити задачу, сформульовану на базі побудованої математичної моделі, за допомогою графічного методу

5.3. Провести аналіз чутливості отриманого рішення графічним методом.

5.4. Рішити задачу, сформульовану на базі побудованої математичної моделі, симплекс-методом, модифікованим симплекс-методом або двоетапним симплекс-методом.

5.5. Побудувати двоїсту задачу. Виконати економічну інтерпретацію двоїстої задачі.

5.6. Створити комп'ютерні моделі прямої та двоїстої задачі,

вирішити їх за допомогою надбудови «Пошук рішення».

5.7. Провести аналіз чутливості отриманого рішення аналітичним методом (на базі побудованої симплекс-таблиці та побудованих звітів про результати, стійкість, межі). Розробити сценарії покращення рішення, звіт – структура сценарію.

5.8. Розв'язати пряму та двоїсту задачі засобами Python (з використанням відповідних бібліотек і без них).

6. Висновки.

7. Перелік літературних джерел (в тексті роботи зробити посилання на літературні джерела).

8. Додатки.

Оформлення звіту

Оформлюється звіт за вимогами, які встановлені у інструктивних матеріалах ОНМУ з обов'язковим урахуванням державного стандарту до звітів з науково-дослідної роботи. Звіт оформлюється згідно наступних документів: «Загальні правила та вимоги до оформлення», «Загальні вимоги до текстових документів» та «ЄКСД – текстові документи».

Звіт виконується українською мовою без стилістичних, орфографічних і синтаксичних помилок.

Загальний обсяг звіту з курсового проєкту не повинен перевищувати 30 сторінок друкованого тексту (шрифт – Time New Roman Cyr, розмір – 14, інтервал – 1,5. Береги: верхній – 2 см, нижній – 2 см, лівий – 2,5 см, правий – 1 см).

Звіт друкується з одного боку аркуша білого паперу.

Зміст містить назви та номери початкових сторінок всіх розділів та підрозділів звіту.

Нумерацію сторінок, розділів, підрозділів, ілюстрацій, таблиць, формул, подають арабськими цифрами без знака №.

Першою сторінкою звіту є титульний аркуш, який включають до загальної нумерації сторінок. На титульному аркуші, першому аркуші змісту номер сторінки не ставлять, на наступних сторінках номер поставляють у правому верхньому куті сторінки без крапки. Нумерація сторінок звіту повинна бути наскрізною: перша сторінка – титульний аркуш, друга – завдання і так далі відповідно до наведених рекомендацій.

Кожну структурну частину звіту треба починати з нової сторінки.

Заголовки структурних частин звіту друкують великими літерами симетрично до тексту (по центру).

Заголовки підрозділів друкують маленькими літерами (крім першої великої) з абзацного відступу. Крапку в кінці заголовка не ставлять. Відстань між заголовком та текстом повинна дорівнювати 2,0 інтервалам основного тексту.

В кінці порядкового номера підрозділу повинна стояти крапка. Потім у тому ж рядку йде заголовок підрозділу.

Ілюстрації (схеми, графіки) і таблиці необхідно подавати у роботі безпосередньо після тексту, де вони згадані вперше, або на наступній сторінці. Якщо вони містяться на окремих сторінках звіту, їх включають до загальної нумерації.

Ілюстрації позначають словом Рис. і нумерують послідовно, за винятком ілюстрацій, поданих у додатках. Номер ілюстрації закінчується крапкою. Після номера йде назва ілюстрації.

Номер ілюстрації, її назва і пояснювальні підписи (умовні позначки) розміщують безпосередньо під ілюстрацією.

Посилання на ілюстрації в тексті вказують порядковим номером в дужках, наприклад, (рис. 2), за винятком таблиць, поданих у додатках (в межах одного розділу).

Таблиці нумерують послідовно, за винятком тих, що розміщуються в додатках. У правому верхньому куті над відповідним заголовком таблиці розміщують напис «Таблиця» із зазначенням її номерів. Номер таблиці

повинен складатися з порядкового номера, в кінці ставиться крапка. Назва таблиці міститься нижче, по центру сторінки.

В разі перенесення частини таблиці на наступну сторінку над перенесеною частиною пишуть слова «Продовження табл.» і вказують номер таблиці.

На всі таблиці повинні бути посилання в тексті, при цьому слово «таблиця» в тексті пишуть скорочено, наприклад: табл. 2. У повторних посиланнях на таблиці та ілюстрації треба вказувати слово «дивись», наприклад, (див. табл. 3).

У таблицях обов'язково зазначається одиниця виміру. Якщо одиниці виміру є однаковими для всіх показників таблиці, вони наводяться у заголовку. Одиниці виміру мають наводитися відповідно до стандартів. Числові величини у таблиці повинні мати однакову кількість десяткових знаків. Заголовки колонок таблиць починаються з великої літери.

Номер формули складається з порядкового номеру. Нумери формул пишуться біля правого поля сторінки на рівні відповідної формули в круглих дужках.

Пояснення значень символів, числових коефіцієнтів у формулах треба подавати безпосередньо під формулою в тій послідовності, в якій вони у ній подані, і кожне починати з нового рядка. Перший рядок пояснення починають зі слова «де» без двокрапки.

Рівняння та формули треба відокремлювати в тексті знизу і зверху інтервалами не менше ніж в один рядок. Якщо рівняння не вміщується в одному рядку, його слід перенести після знака рівності (=) або після знаків плюс, мінус, множення, ділення.

Посилання в тексті на формули оформлюють порядковим номером формули, наприклад: у формулі 2.

При наявності додатків до звіту вони повинні бути пронумеровані. Посилання у текстовій частині звіту на додатки дається з вказівкою на номер додатку. Кожен із додатків нумерується у правому верхньому куті і на кожен

є посилання у тексті. Додатки повинні позначатися літерами (крім Г; Є; З; І; Ї; Й; О; Ч; Ї), мати заголовок, надрукований з великої літери по центру сторінки.

Виконаний звіт з курсового проєкту переплітають.

До роздрукованого звіту додаються файли (*.docx, *.xlsx, *.py).

Вимоги до змісту курсового проєкту

Розділ «Вступ» коротко характеризує сучасний стан проблеми, задачі, питання, які розробляються у курсовому проєкті, а також мету роботи. У вступі доцільно обґрунтувати необхідність проведення роботи, вказати галузь можливого використання розроблених добутоків, запропонованих технічних рішень, висновків і рекомендацій.

Розділ «Основна частина» повинен включати розрахунки, опис і скріншоти моделей, побудованих в MS Excel та на мові Python, аналіз результатів згідно підрозділу цього розділу.

Розділ «Висновки» повинен включати оцінку результатів, що їх досягнуто під час виконання курсового проєкту, у тому числі їх відповідність вимогам завдання на курсове проєктування.

Захист курсового проєкту

Оформлений звіт реєструють на кафедрі технічної кібернетики й інформаційних технологій ім. проф. Р.В. Меркта.

Захист курсового проєкту проводиться в присутності комісії.

ЗАВДАННЯ ДО КУРСОВОГО ПРОЄКТУ.

Варіант 1

Господарству потрібно не більш ніж 10 трьохтонних автомашин і не більш ніж 8 п'ятитонних. Відпускна вартість автомашини першої марки 2 000 гр. од., другої марки 4 000 гр. од. Господарство може виділити для придбання машин 40 000 гр. од. Яку кількість автомашин кожної марки потрібно придбати, щоб їх загальна (сумарна) вантажопідйомність була максимальною?

Варіант 2

Господарство для годування тварин використовує два виду корму (див. таблицю). Денний раціон тварини повинний містити не менш як 6 одиниць поживної речовини А і не менш як 12 одиниць поживної речовини В. Яку кількість корму треба витратити кожного дня на одну тварину, щоб витрати були мінімальними?

Поживна речовина	Кількість поживних речовин в 1 кг корму	
	1 вид	2 вид
А	2	1
В	2	4
Вартість 1 кг корму, тис. гр. од.	0,2	0,3

Варіант 3

Деяка фірма випускає два набори добрив для газонів: звичайний і покращений. В звичайний набір входить 3 кг азотних, 4 кг фосфорних і 1 кг калійних добрив, а в покращений - 2 кг азотних, 6 кг фосфорних і 3 кг калійних добрив. Відомо, що для деякого газону потрібно, щонайменше, 10 кг азотних, 20 кг фосфорних і 7 кг калійних добрив. Звичайний набір коштує 3 гр. од., а покращений – 4 гр. од. Які і скільки наборів добрив потрібно купити, щоб забезпечити ефективну підпитку газону і мінімізувати вартість?

Варіант 4

400 га землі господарство планує засіяти кукурудзою і соєю. Посів і збір кукурудзи потребують на кожний гектар 200 гр. од., а сої – 100 гр. од. На покриття витрат, пов'язаних з посівом і збором, господарство отримало дотацію в 60 тис. гр. од. Кожний гектар, засіяний кукурудзою, приносить 30 центнерів, а кожний гектар, засіяний соєю – 60 центнерів. Згідно з договором про продаж кожен центнер кукурудзи приносить дохід в 3 гр. од., а кожен центнер сої – 6 гр. од. Для зберігання зібраного зерна відводиться склад, максимальна місткість якого дорівнює 21 тис. центнерів. Скільки гектарів потрібно засіяти під кожну з цих культур, щоб отримати максимальний прибуток?

Варіант 5

Продукція двох видів (краска 1 і краска 2) поступає в оптовий продаж. Для виробництва краски використовують два початкових продукти: А і В. Витрати продуктів А і В на 1 т відповідних красок наведено в таблиці.

Початковий продукт	Витрати початкових продуктів на 1 т краски, т		Максимально можливий запас, т
	Краска 1	Краска 2	
А	1	2	6
В	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на краску 2 ніколи не перевищує попиту на краску 1 більш ніж на 1 т. Запит на краску 2 ніколи не перевищує 2 т за добу. Оптові ціни – 3000 гр. од. за 1 т краски 1 і 2000 гр. од. за 1 т. краски 2. Яку кількість краски потрібна виробляти фабрика, щоб прибуток від реалізації був максимальним?

Варіант 6

Фінансовий консультант фірми «АВС» дає консультацію клієнту щодо оптимального інвестиційного портфеля. Клієнт бажає вкласти кошти (не більш як 25 000 \$) в два найменування акцій крупних підприємств в складі холдингу «Диксі»: «Диксі-А» і «Диксі-В». Ціни на акції «Диксі-А» - 5\$ за акцію; «Диксі-В» - 3\$ за акцію. Клієнт бажає отримати максимум 6000 акцій обох найменувань, при цьому акцій одного з найменувань повинно бути не більш ніж 5000 штук. Згідно оцінок «АВС» прибуток від інвестицій в ці акції в наступному році буде: «Диксі-А» - 1,1 \$; «Диксі-В» - 0,9 \$. Задача

консультанта – видати клієнту рекомендації щодо оптимізації прибутку від інвестицій.

Варіант 7

Завод – виробник високоточних елементів для автомобілів випускає два різних типа деталей – X і Y. Фонд робочого часу на заводі 4000 чол.-год. за тиждень. Для виробництва однієї деталі типу X потрібно 1 чол.-год., а для виробництва однієї деталі типу Y потрібно 2 чол.-год. Виробничі потужності заводу дозволяють випускати максимум 2250 деталей типу X і 1750 деталей типу Y за тиждень. Кожна деталь типу X потребує 2 кг металевих стержнів і 5 кг листового металу, а для виробництва однієї деталі типу Y потрібно 5 кг металевих стержнів і 2 кг листового металу. Рівень запасів кожного виду ресурсів становить 10 000 кг за тиждень. Крім того, кожний тиждень завод поставляє 600 деталей типу X своєму постійному заказнику. Згідно з профспілковою угодою загальна кількість вироблених за тиждень деталей повинна становити не менш як 1500 штук. Яку кількість деталей кожного типу треба випускати, щоб максимізувати загальний дохід за тиждень, якщо дохід від виробництва однієї деталі типу X становить 30 гр. од, а від виробництва однієї деталі типу Y – 40 гр. од.?

Варіант 8

Маємо два виду корму I і II, які містять поживні речовини (вітаміни) S_1 , S_2 і S_3 . Зміст числа одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму і необхідний мінімум поживних речовин наведено в таблиці.

Поживна речовина (вітамін)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Вартість 1 кг корму I і II становить відповідно 4 і 6 гр. од. Необхідно скласти денний раціон, який має мінімальну вартість, в якому зміст поживних речовин кожного виду був не менш установлені межі.

Варіант 9

При виробництві двох видів продукції використовують 4 типа ресурсів. Норма витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції та загальний обсяг кожного ресурсу надано в таблиці.

Ресурси	Норма витрат ресурсів на товари		Загальна кількість ресурсів
	1-го виду	2-го виду	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибуток від реалізації однієї одиниці продукції першого виду становить 2 гр. од., другого виду – 3 гр. од. Сформувати виробничу програму випуску продукції для забезпечення максимального прибутку від її реалізації.

Варіант 10

Фірма виробляє два безалкогольних напої – «Лимонад» і «Тонік». Фірма може продати всю продукцію, яку виробляє. Але обсяг виробництва обмежений кількістю загального інгредієнту і виробничою потужністю обладнання. Для виробництва 1 л «Лимонаду» потрібно 0,02 год. роботи обладнання, для виробництва 1 л «Тоніку» - 0,04 год. Витрата спеціального інгредієнту становить 0,01 кг і 0,04 кг на 1л «Лимонаду» і «Тоніку» відповідно. Кожний день фірма має 24 год. роботи обладнання і 16 кг спеціального інгредієнту. Прибуток фірми становить 0,10 гр. од. за 1 л «Лимонаду» і 0,30 гр. од. за 1 л «Тоніку». Яку кількість продукції кожного виду треба виробляти щодня, якщо мета фірми становить максимізацію щоденного прибутку?

Варіант 11

На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 30 тис. гр. од. і приміщення площею в 45 м². Ділянка може бути обладнана машинами трьох типів, характеристики яких наведено в таблиці.

Машина	Вартість машини, тис. гр. од.	Площа, м ²	Продуктивність за зміну, тис. од.
M ₁	6	9	8
M ₂	3	4	4
M ₃	2	3	3

Знайти оптимальний план придбання машин, який забезпечує новій виробничій ділянці максимальну продуктивність.

Варіант 12

В дослідному господарстві встановлено, що відгодівля крупної рогатої тварини вигідно тільки тоді, коли кожна тварина отримує в добовому раціоні не менш ніж 20 харчових одиниць, не менш 2000 г білку і не менш 100 г кальцію. Для годівлі тварин використовують сіно і силос. Зміст харчових речовин 1 кг корму кожного виду, собівартість 1 кг корму наведено в таблиці. Можливості господарства дозволяють включати в добовий раціон не більш як 50 кг сіна та не більш як 70 кг силосу.

Корм	Зміст в 1 кг			Собівартість 1 кг корму, гр. од.
	кормових одиниць	білку, г	кальцію, г	
Сіно	0,5	40	5	2
Силос	0,2	10	4	1

Скласти кормовий раціон мінімальної вартості, який враховує мінімальні добові норми споживання харчових речовин і можливості господарства по ресурсах.

Варіант 13

Маємо два проекти на забудову жилих будинків. Витрати будівельних матеріалів, їх запас, і корисна площа будинку кожного проекту наведено в таблиці.

Будівельні матеріали	Витрати будівельних матеріалів (м ³) на один будинок		Запас будівельних матеріалів, м ³
	I проект	II проект	
Цегла силікатна	7	3	1365
Цегла красна	6	3	1245
Пиломатеріали	1	2	650
Корисна площа, м ²	60	50	

Визначити, яку кількість будинків першого і другого проекту потрібно побудувати, щоб корисна площа була найбільшою.

Варіант 14

Сільськогосподарське підприємство може придбати трактори марок M_1 і M_2 для виконання робіт P_1 , P_2 і P_3 . Продуктивність тракторів при виконанні вказаних робіт, загальний обсяг робіт і вартість кожного трактору наведено в таблиці.

Вид робіт	Обсяг робіт, га	Продуктивність трактору марки	
		M_1	M_2
P_1	60	4	3
P_2	40	8	1
P_3	30	1	3
Вартість трактору, тис. гр. од.		7	2

Знайти оптимальний варіант придбання тракторів, який забезпечує виконання всього комплексу робіт при мінімальних вартісних витратах на техніку.

Варіант 15

При відгодівлі кожна худоба повинна отримати не менш 9 од. білків, 8 од. протеїну, 10 од. вуглеводів. Для складання раціону використовують два виду корму (див. таблицю).

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг	
	корму 1	корму 2
Білки	3	1
Вуглеводи	1	2
Протеїни	1	6

Вартість 1 кг корму 1 – 4 гр. од., корму 2 - 6 гр. од.

Скласти денний раціон поживності, який має мінімальну вартість.

Варіант 16

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Всі данні надано в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 виріб, кг		Загальна кількість сировини, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, гр. од.	30	40	

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток виробництва від реалізації продукції буде максимальним, при умові, що виробів В треба випустити не менш, ніж виробів А.

Варіант 17

Раціон для годівлі худоби на фермі складений із двох видів кормів I і II. Один кілограм корму I коштує 80 гр. од. і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 гр. од. і містить: 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів. Скласти найбільш дешевий раціон годівлі, який забезпечує жирів не менш 6 од., білків не менш 9 од, вуглеводів не менш 8 од, нітратів не більш 16 од.

Варіант 18

При виробництві двох видів продукції використовується 3 види сировини. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимум прибутку. Вхідні дані наведено в таблиці.

Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції	
	Перший вид продукції	Другий вид продукції
30	1	3
48	4	3
60	3	3
Прибуток, гр. од.	70	60

Варіант 19

Для виготовлення шкап і буфетів мебельна фабрика застосовує сировину чотирьох видів, запаси якої обмежені і наведені в таблиці. Кількість одиниць деревини для виготовлення 1 шкапи і 1 буфету надано в таблиці.

Ресурси	Запаси, од.	Витрати, од. на	
		1 шкапу	1 буфет
1	12	-	0,4
2	16	0,4	-
3	12	0,2	0,2
4	8	0,1	0,2
Прибуток, гр. од.		2	3

Потрібно скласти такий план випуску продукції, який забезпечує найбільший прибуток.

Варіант 20

При виробництві двох видів продукції використовується 3 види сировини. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток. Вхідні дані наведено в таблиці.

Запаси сировини	Витрати сировини на одиницю продукції	
	Перший вид продукції	Другий вид продукції
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Прибуток, гр. од.	40	50

Варіант 21

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Всі данні надано в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини на 1 виріб, кг		Загальна кількість сировини, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, гр. од.	30	40	

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток виробництва від реалізації продукції буде максимальним, при умові, що виробів В треба випустити не менш, ніж виробів А.

Варіант 22

В раціоні тварин використовують два види кормів. Тварини повинні отримати 3 види речовин (вихідні дані наведено в таблиці). Скласти раціон годівлі тварин, який забезпечує мінімальні витрати.

Необхідна кількість речовин	Зміст харчових речовин	
	1 корм	2 корм
15	5	1
12	2	1
7	1	1
Вартість од. корму, гр. од.	40	30

Варіант 23

На підприємстві випускається два види виробів, при цьому використовують три види сировини. Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток. Вхідні дані наведено в таблиці.

Тип сировини	Норми витрат на одиницю продукції		Запаси сировини
	1 вид	2 вид	
I	18	15	360
II	6	4	192
III	5	3	180
Вартість виробу, гр. од.	9	10	

Варіант 24

На свиномкомплексі проводиться відгодівля свиней, причому кожна тварина повинна отримати 6 одиниць речовини А, 8 одиниць – В, 12 одиниць С. Для відгодівлі треба закупати 3 види кормів. В 1 кормі маємо 2 од. речовини А, 1 од. – В, 3 од – С. В 2 кормі маємо 1 од. речовини А, 2 од. – В, 4 од – С. Вартість 1 од. корму 1 виду 2 гр. од. Вартість 1 од. корму 2 виду 3 гр. од. Яку кількість кожного корму треба закупати, щоб забезпечити найбільш дешевий раціон годівлі?

Варіант 25

Для годівлі корів використовують концентровані і грубі корми. Один кг концентрату містить 1 кормову одиницю і 0,08 протеїну. Один кг грубих кормів містить 0,25 кормових одиниць і 0,04 протеїну. Добовий раціон однієї корови повинен містити не менш за 10 кормових одиниць і не менш за 1,2 одиниць протеїну. Визначити оптимальний варіант добового раціону годівлі при умові, щоб вартість раціону була мінімальною, якщо 1 кг концентрату коштує 5 гр. од., а 1 кг грубих кормів – 2 гр. од.

Варіант 26

Фірма виробляє два напої: «Пепсі-кола» і «Кока-кола». Для виробництва 1 літра «Пепсі-коли» потрібно 0,02 години роботи обладнання, а для «Кока-коли» - 0,04 години. Витрата спеціального інгредієнта на них становить 0,01 кг і 0,04 кг на 1 л відповідно. Щодня в розпорядженні фірми 16 кг спеціального

інгредієнта і 24 години роботи обладнання. Дохід від продажу 1 л «Пепсі-коли» становить 20 грн., А «Кока-коли» - 30 грн. Визначте щоденний план виробництва напоїв кожного виду, що забезпечує максимальний дохід від їх продажу.

Варіант 27

Туристична фірма в літній сезон обслуговує в середньому 7500 туристів і має в своєму розпорядженні флотилією з двох типів суден, характеристики яких представлені в таблиці

Показники	Судна	
	I тип	II тип
Пасажиромісткість, осіб	2000	1000
Пальне, т	12000	7000
Екіпаж, осіб	250	100

В місяць виділяється 60000 т пального. Потреба в робочій силі не перевищує 700 осіб. Визначте кількість судів I і II типу, щоб забезпечити максимальний дохід, який становить від експлуатації судів першої типу 20 мільйонів грн., а другого типу - 10 мільйонів грн. у місяць.

Варіант 28

Фірма виробляє і продає столи і шафи з деревини хвойних і листяних порід. Витрата кожного виду в кубометрах на кожний виріб заданий в таблиці

Виріб	Витрата деревини, м ³		Вартість виробу, тис. грн.
	хвойні	листяні	
Стіл	0,15	0,2	0,8
Шапа	0,3	0,1	1,5
Запаси деревини, м ³	80	40	

Визначити оптимальний план випуску продукції, що забезпечує максимальний дохід.

Варіант 29

З залізничного вокзалу Одеси щодня відправляються швидкі і пасажирські потяги. Пасажиромісткість і кількість вагонів залізничного депо станції відправлення вказані в таблиці

Тип вагону		Багажний	Почтовий	Плацкартний	Купейний	М'який
Кількість вагонів в потягу	Швидкий	1	1	8	4	1
	Пасажирський	1	0	5	6	3
Пасажиромісткість, осіб		-	-	58	40	32
Парк вагонів		10	8	80	70	30

Визначте оптимальну кількість пасажирських та швидких поїздів, які забезпечують максимальну кількість щодня відправляємих пасажирів

Варіант 30

Мале підприємство орендувало міні-пекарні для виробництва чебуреків і пиріжків. Потужність пекарні дозволяє випускати в день не більше 500 кг продукції. Щоденний попит на чебуреки не перевищує 2600 штук, а на пиріжки - 2400 штук. Добові запаси тесту і м'яса і витрати на виробництво кожної одиниці продукції наведені в таблиці

	Витрати на виробництво, кг/шт		Добові запаси сировини, кг
	чебурека	пиріжка	
М'ясо	0,35	0,6	21
Тісто	0,65	0,3	22
Вартість, грн/кг	50,0	80,0	

Визначити оптимальний план випуску продукції, що забезпечує максимальний дохід.

Варіант 31

Видавничий дім «Геоцентр-Медіа» видає два журнали: «Автомеханік» і «Інструмент», які друкуються в трьох друкарнях: «Алмаз-Прес», «Одеса-Принт» і «Hansaprint» (Фінляндія), де загальна кількість годин, яка відведена для друку, і продуктивність друку однієї тисячі примірників обмежені і представлені в наступній таблиці:

Типографія	Час друку однієї тисячі примірників		Ресурс часу, який відведено типографією, год.
	«Автомеханік»	«Інструмент»	
Алмаз-Прес	2	14	112
Одеса-Принт	4	6	70
Hansaprint	6	4	80
Оптова вартість, грн./шт.	16	12	

Попит на журнал «Автомеханік» становить 12 тисяч примірників, а на журнал «Інструмент» - не більше 7,5 тисячі на місяць. Визначте оптимальну кількість видаваних журналів, яка забезпечить максимальну виручку від продажу.

Варіант 32

Фірма вирішила відкрити на основі технології виробництва чеського скла, порцеляни й кришталю лінію з виготовлення ваз та графинів і їх декорування. Витрати сировини на виробництво цієї продукції представлені в таблиці

Сировина	Витрати сировини на виробництво, г		Поставки сировини в тиждень, кг
	ваза	графин	
Кобальт	20	18	30
Золото	13	10	12
Оптова вартість, грн./шт.	700	560	

Визначте оптимальний обсяг випуску продукції, що забезпечує максимальний дохід від продажів, якщо попит на графини не перевищує 70 шт. в тиждень.

Варіант 33

Фірма виробляє одяг для мисливців, туристів і охоронних структур. Додатково фірма вирішила виготовляти шапки і підстьобування з натурального хутра. Витрати на виробництво цих виробів і запаси сировини представлені в таблиці

Сировина	Витрати сировини на виробництво, дм		Середній запас в місяць, дм
	шапки	підстьобування	
Хутро	22	140	61600
Тканина	1,5	30	15000
Оптова вартість, грн./шт.	410	840	

Визначити обсяги виробництва цих виробів, що забезпечують максимальний дохід від продажу.

Варіант 34

Кондитерська фабрика в Києві освоїла випуск нових видів шоколаду: «Місячна начинка» і «Малиновий дощик», попит на які становить відповідно не більше 12 тонн і 7,7 тонни на місяць. Унаслідок зайнятості цехів випуском традиційних видів шоколаду, кожен цех може виділити обмежені ресурси часу:

Номер цеху	Час на виробництво шоколаду, год.		Час для цехів на виробництво, рік/місяць
	«Місячна начинка»	«Малиновий дощик»	
I	1	7	56
II	2	3	35
III	3	2	40
Оптова вартість, грн./т	8000	6000	

Визначити оптимальний випуск нових сортів шоколаду, що забезпечує максимальний дохід від продажу.

Варіант 35

Сформуйте варіант приготування бензину АІ-80 і АІ-95, який забезпечує максимальний дохід від продажу, якщо є 5 т. суміші першого сорту і 30 т. суміші другого сорту. На виготовлення бензину АІ-80 йде 60% суміші 1-го сорту і 40% суміші 2-го сорту. На виготовлення бензину АІ-95 йде 80% суміші 1-го сорту і 20% суміші 2-го сорту. Реалізується одна т бензину АІ-80 за 5000 грн, а одна т АІ-95 - за 6000 грн.

Варіант 36

Мале підприємство випускає два види деталей. На їх виготовлення йде три види ресурсів, що виділяються підприємству в обмежених кількостях. Дані про наявність та витраті матеріалів, собівартість 1000 штук деталей кожного виду, а також оптова ціна за 1000 штук наведені в таблиці.

Види матеріалів	Запаси (ум. од.)	Витрати матеріалів на 1000 од. продукції	
		Деталь А	Деталь В
R ₁	1000	25	40
R ₂	960	20	48
R ₃	2100	60	35
Собівартість 1000 штук (ум. од.)		4,5	6,6
Оптова ціна 1000 штук (ум. од.)		6	9

Скласти план випуску кожного виду деталей, що забезпечує отримання максимального прибутку.

Варіант 37

Мале підприємство випускає два види деталей. На їх виготовлення йде три види ресурсів, що виділяються підприємству в обмежених кількостях. Дані про наявність та витраті матеріалів, собівартість 1000 штук деталей кожного виду, а також оптова ціна за 1000 штук наведені в таблиці.

Види матеріалів	Запаси (ум. од.)	Витрати матеріалів на 1000 од. продукції	
		Деталь А	Деталь В
R ₁	1000	25	40

R_2	960	20	48
R_3	1500	50	30
Собівартість 1000 штук (ум. од.)		4,5	6,6
Оптова ціна 1000 штук (ум. од.)		6	9

Скласти план випуску кожного виду деталей, що забезпечує отримання максимального прибутку.

Варіант 38

Мале підприємство випускає два види деталей. На їх виготовлення йде три види ресурсів, що виділяються підприємству в обмежених кількостях. Дані про наявність та витраті матеріалів, собівартість 1000 штук деталей кожного виду, а також оптова ціна за 1000 штук наведені в таблиці.

Види матеріалів	Запаси (ум. од.)	Витрати матеріалів на 1000 од. продукції	
		Деталь А	Деталь В
R_1	1000	25	40
R_2	960	20	48
R_3	1500	50	30
Собівартість 1000 штук (ум. од.)		6	8
Оптова ціна 1000 штук (ум. од.)		8	10

Скласти план випуску кожного виду деталей, що забезпечує отримання максимального прибутку.

Варіант 39

Невелике підприємство випускає два види деталей. Воно закуповує заготовки, що піддаються обробці на верстатах трьох типів S_1 , S_2 , S_3 . Дані, що характеризують продуктивність верстатного парку підприємства, а також вартість заготовок, наведені в таблиці.

Станки	Вартість станкового часу (ум. од.)	Деталь А (штук/год.)	Деталь В (штук/год.)
S_1	24	30	35
S_2	21	35	30

S_3	18	40	20
Вартість заготовки (ум. од.)		6	4
Продажна ціна (ум. од.)		30	20

Припускаючи, що можна випускати для продажу будь-яку комбінацію деталей А і В, знайти план випуску продукції, який максимізує прибуток.

Варіант 40

Невелике підприємство випускає два види деталей. Воно закупає заготовки, що піддаються обробці на верстатах трьох типів S_1 , S_2 , S_3 . Дані, що характеризують продуктивність верстатного парку підприємства, а також вартість заготовок, наведені в таблиці.

Станки	Вартість станкового часу (ум. од.)	Деталь А (штук/год.)	Деталь В (штук/год.)
S_1	24	20	35
S_2	21	25	30
S_3	18	30	20
Вартість заготовки (ум. од.)		6	4
Продажна ціна (ум. од.)		30	20

Припускаючи, що можна випускати для продажу будь-яку комбінацію деталей А і В, знайти план випуску продукції, який максимізує прибуток.

Варіант 41

Невелике підприємство випускає два види деталей. Воно закупає заготовки, що піддаються обробці на верстатах трьох типів S_1 , S_2 , S_3 . Дані, що характеризують продуктивність верстатного парку підприємства, а також вартість заготовок, наведені в таблиці.

Станки	Вартість станкового часу (ум. од.)	Деталь А (штук/год.)	Деталь В (штук/год.)
S_1	26	30	35
S_2	23	35	40

S_3	20	40	50
Вартість заготовки (ум. од.)		30	40
Продажна ціна (ум. од.)		60	70

Припускаючи, що можна випускати для продажу будь-яку комбінацію деталей А і В, знайти план випуску продукції, який максимізує прибуток.

Варіант 42

Невелике підприємство випускає два види деталей. Воно закуповує заготовки, що піддаються обробці на верстатах трьох типів S_1 , S_2 , S_3 . Дані, що характеризують продуктивність верстатного парку підприємства, а також вартість заготовок, наведені в таблиці.

Станки	Вартість станкового часу (ум. од.)	Деталь А (штук/год.)	Деталь В (штук/год.)
S_1	36	30	35
S_2	33	35	40
S_3	30	40	50
Вартість заготовки (ум. од.)		6	4
Продажна ціна (ум. од.)		30	20

Припускаючи, що можна випускати для продажу будь-яку комбінацію деталей А і В, знайти план випуску продукції, який максимізує прибуток.

Варіант 43

Невелика фабрика випускає два види фарб: для внутрішніх робіт (В) і зовнішніх робіт (З). Продукція обох видів надходить у продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукти P_1 і P_2 . Витрати P_1 і P_2 на 1 т відповідних фарб і оптові ціни однієї тонни наведені в таблиці.

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (в тоннах) на тонну фарби		Максимально можливий запас, в тоннах
	Фарба В	Фарба З	
А	2	1	10

В	1,5	2	8
Оптова ціна за одну тонну	3000 грн.	4000 грн.	

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу В ніколи не перевищує попиту на фарбу З більш, ніж на 3 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу В ніколи не перевищує 6 т на добу. Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Варіант 44

Невелика фабрика випускає два види фарб: для внутрішніх робіт (В) і зовнішніх робіт (З). Продукція обох видів надходить у продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукти P_1 і P_2 . Витрати P_1 і P_2 на 1 т відповідних фарб і оптові ціни однієї тонни наведені в таблиці.

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (в тоннах) на тонну фарби		Максимально можливий запас, в тоннах
	Фарба В	Фарба З	
А	4	2	20
В	1	3	18
Оптова ціна за одну тонну	2500 грн. од.	4000 грн. од.	

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу В ніколи не перевищує попиту на фарбу З більш, ніж на 5 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу В ніколи не перевищує 8 т на добу. Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Варіант 45

Невелика фабрика випускає два види фарб: для внутрішніх робіт (В) і зовнішніх робіт (З). Продукція обох видів надходить у продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідних продукти P_1 і P_2 . Витрати P_1 і P_2 на 1 т відповідних фарб і оптові ціни однієї тонни наведені в таблиці.

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (в тоннах) на тонну фарби		Максимально можливий запас, в тоннах
	Фарба В	Фарба З	
А	5	4	30
В	2,5	3	28
Оптова ціна за одну тонну	4000 грн.	5000 грн.	

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу В ніколи не перевищує попиту на фарбу З більш, ніж на 4 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу В ніколи не перевищує 10 т на добу. Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Варіант 46

Для виготовлення столів і шап мебельна фабрика застосовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість ресурсів кожного виду наведено в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шкапа	
Деревина, м ³			
1 виду	0,2	0,1	40
2 виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість, людино-год.	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу, тис. грн.	6	8	

Потрібно скласти такий план випуску продукції, який забезпечує найбільший прибуток від реалізації.

Варіант 47

Для виготовлення двох видів виробів А і В використають токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми витрат часу для кожного із типів обладнання

на один виріб даного виду наведено в таблиці. В ній надано загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	Витрати часу (станко-год) на обробку одного виробу		Загальний фонд корисного робочого часу обладнання (год)
	А	В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	14	18	

Потрібно скласти такий план випуску виробів А і В, який забезпечує найбільший прибуток від їх реалізації.

Варіант 48

На тваринфермі можливо вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні кожного дня отримувати лисиці і песці, наведено в таблиці. В ній вказано загальну кількість корму кожного виду, яку може використати тваринферма, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

Вид корму	Кількість одиниць корму, яку кожного дня повинні отримувати		Загальний фонд корисного робочого часу обладнання (год)
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	16	12	

Визначити, яку кількість лисиць і песців треба вирощувати на тваринфермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

Варіант 49

Фірма випускає два види морозива: вершкове і шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються два вихідних продукти: молоко і наповнювачі, витрати яких на 1 кг морозива, добові запаси вихідних продуктів і відпускні ціни на 1 кг продукції дані в таблиці:

Ресурси	Витрати вихідних продуктів на 1 кг морозива		Запаси, кг.
	вершкове	шоколадне	
молоко	0,8	0,5	400
наповнювачі	0,4	0,8	365
ціна (гр.од.)	16	14	

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне морозиво не більше ніж на 100 кг. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг на добу. Визначити кількість морозива кожного виду, яке повинна робити фірма, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним.

Варіант 50

При виготовленні виробів видів А і В використовується сировина 4-х видів. Витрати сировини на одиницю продукції кожного виду і ціна одиниці продукції наведені в таблиці

Сировина	Витрати сировини на один виріб		Запас сировини
	А	В	
Сировина 1	2	3	19
Сировина 2	2	1	13
Сировина 3	0	3	15
Сировина 4	3	0	18
Ціна одного виробу, гр.од.	7	5	

Необхідно визначити план випуску продукції, щоб загальний дохід від реалізації продукції, що випускається був би максимальним.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ (скорочено)

Задача.

Цех може випускати два види продукції: шафи та тумби для телевізора. На кожну шафу витрачається 3,5 м стандартних ДСП, 1 м лицьового скла і 1 людино-день трудовитрат. На тумбу 1м ДСП, 2 м скла і 1 людино-день трудовитрат. Прибуток від продажу 1 шафи становить 200 у. о., а 1 тумби -100 у.о. Матеріальні та трудові ресурси обмежені: в цеху працюють 150 робітників, в день можна витратити не більше 350 м ДСП і не більше 240 м скла. Яку кількість шаф і тумб повинен випускати цех, щоб зробити прибуток максимальним?

1. МАТЕМАТИКО-ЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ

Заповнимо таблицю, згідно з умовами завдання:

Ресурси	Запаси	Продукція	
		Шафа	Тумба
ДСП, м	350	3,5	1
Скло, м	240	1	2
Людино-дні	150	1	1
Прибуток, у.о.		200	100

Введемо *позначення* для знаходження плану продукції $X = (x_1, x_2)$, де

x_1 – кількість шаф, які виробляються щоденно

x_2 – кількість тумб, які виробляються щоденно

Цільова функція

Прибуток від продажу однієї шафи дорівнює 200 у. о., значить, прибуток від продажу x_1 шаф буде $200 \cdot x_1$.

Прибуток від продажу однієї тумби дорівнює 100 у. о., значить, прибуток від продажу x_2 шаф буде $100 \cdot x_2$.

Цільова функція (функція прибутку) :

$$P = 200 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \text{ (у.о.)}$$

Її потрібно максимізувати.

Обмеження

Оскільки кожен робітник за 1 день може зробити або 1 шафу, або 1 тумбу, ясно, що загальна кількість випущених виробів (шаф і тумб) не повинна перевищувати числа робітників у цеху: $1 * x_1 + 1 * x_2 \leq 150$

Оскільки на 1 шафу витрачається 3,5 м ДСП, а на 1 тумбу - 1 м, то сумарні витрати ДСП на x_1 шаф і x_2 тумб буде, очевидно, $3,5 * x_1 + 1 * x_2$, що не повинно перевищувати щоденного запасу ДСП в цеху, тобто 350 м ДСП:

$$3,5 * x_1 + 1 * x_2 \leq 350$$

Аналогічно записується друга нерівність, яка відбиває обмеженість щоденних запасів скла: $1 * x_1 + 2 * x_2 \leq 240$

З економічної точки зору виробництво не може бути від'ємним, отже ми виробляємо продукцію в кількості x_1 та x_2 або не виробляємо якийсь вид продукції: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Отримали наступну математико-економічну модель:

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РІШЕННЯ

Область допустимих рішень – багатокутник ABCDE (рис.1), початковий рівень цільової функції проходить через точку A(0; 0) і має вигляд

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 = 0, \text{ градієнт } \vec{n}(200; 100).$$

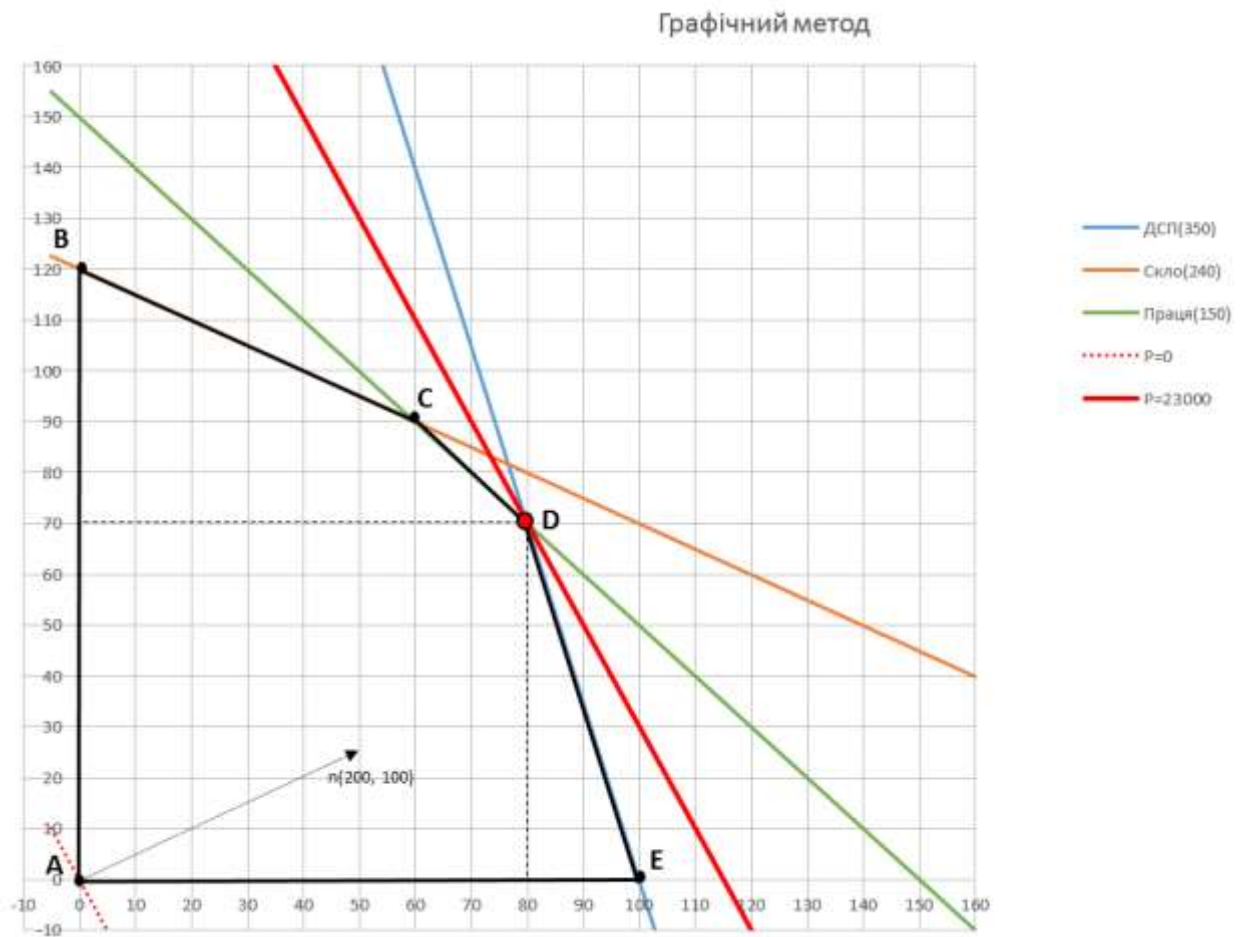


Рис.1 – Рішення, отримане графічним способом

Ми повинні максимізувати функцію $P(X)$, тобто будемо пересувати її в напрямку градієнта, поки вона не стане опорною прямою.

В даному випадку оптимальний план, точка D , лежить на перетині ліній ресурсів "Праця" і "ДСП".

Обчислимо значення цільової функції в точці $D(80; 70)$ і отримаємо

$$P(80; 70) = 200 * 80 + 100 * 70 = 23000.$$

Відповідь: $\max P(X) = 23000$ при $X = (80; 70)$. Для отримання максимального прибутку 23000 у.о. потрібно планувати випуск 80 шаф і 70 тумб.

3. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОТРИМАНОВОГО РІШЕННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Зробимо позначення ресурсів

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 150, & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Перша задача аналізу на чутливість - аналіз моделі на чутливість до зміни правої частини (обмежень)

В цій задачі ресурси ДСП і Праця є дефіцитними, оскільки обмеження (1) і (3) є зв'язуючими. Ресурс Скло (2) є недефіцитним.

Ресурс Праця. При збільшенні запасу цього ресурсу пряма Праця (або відрізок CD) пересувається наверх паралельно сама собі, поступово “стягуючи” в точку трикутник CDK (рис. 2).

При цьому:

- зв'язуючими стають обмеження ДСП і Скло;
- оптимальному розв'язку відповідає точка К;
- простором допустимих розв'язків стає багатокутник АВКЕ;
- обмеження Праця стає надлишковим і будь-яке подальше зростання запасу ресурсу Праця не впливає ні на простір розв'язків, ні на оптимальний розв'язок.

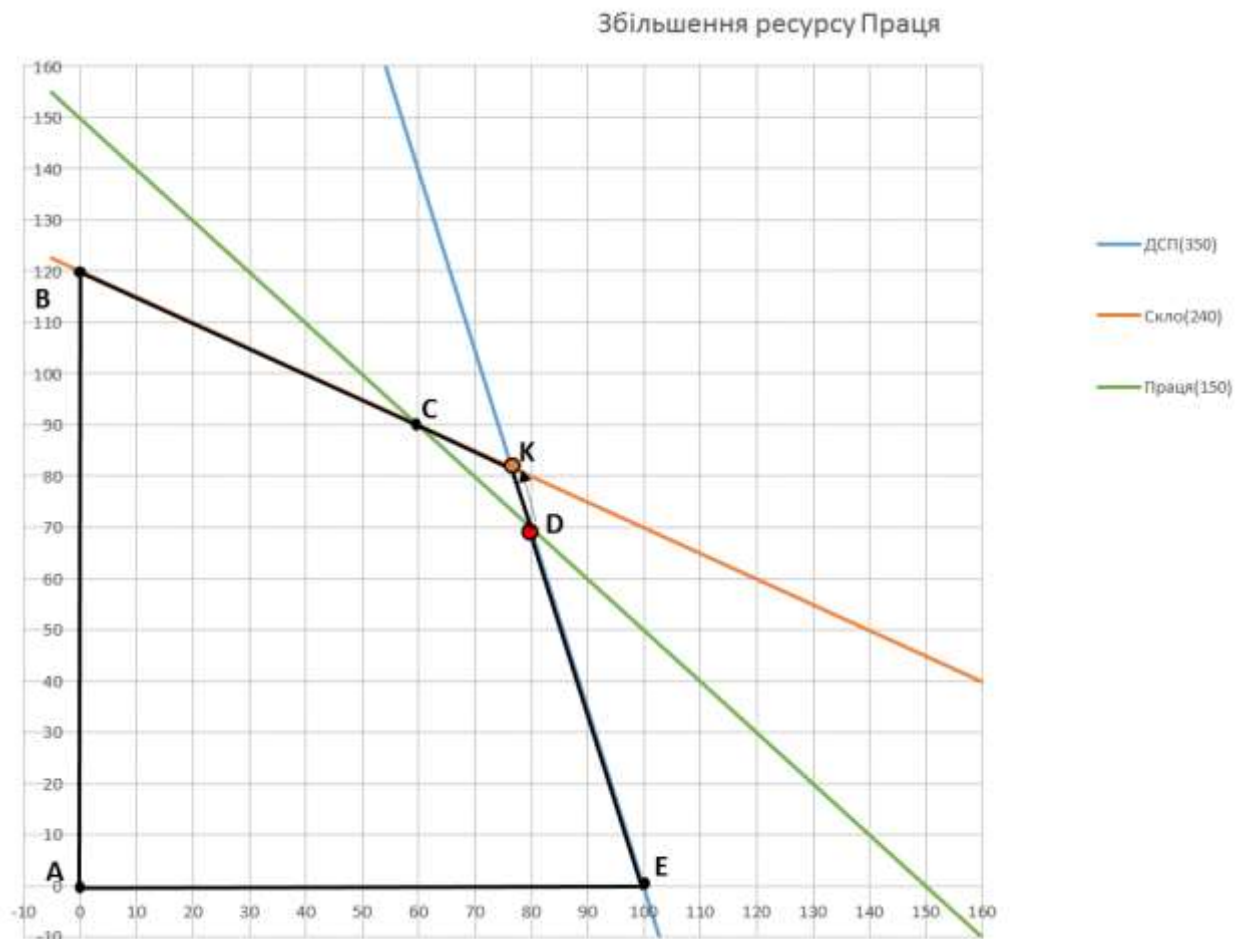


Рис.2 – Ресурс Праця

Таким чином, обсяг ресурсу Праця не потрібно збільшувати понад тієї границі, коли відповідне йому обмеження Праця стає надлишковим, тобто пряма Праця проходить через нову оптимальну точку. Визначимо цей граничний рівень:

– встановимо координати точки К, розв'язавши відповідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 = 350, \\ x_1 + 2x_2 = 240, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 700, \\ x_1 + 2x_2 = 240, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x_1 = 460, \\ x_2 = (240 - x_1)/2, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 76\frac{2}{3}, \\ x_2 = 81\frac{2}{3}, \end{cases}$$

– визначимо максимально допустимий запас ресурсу Праця, підставивши координати точки К у ліву частину обмеження (3): $x_1 + x_2 \leq 150$

$$76\frac{2}{3} + 81\frac{2}{3} = 158\frac{1}{3} \text{ (робітників)}$$

значення цільової функції в точці К:

$$P(K) = 200 \cdot 76 \frac{2}{3} + 100 \cdot 81 \frac{2}{3} = 23500 \text{ (у. о.)}.$$

Примітка. При зменшенні цього ресурсу пряма Праця (або відрізок CD) пересувається донизу паралельно сама собі, поступово “стягуючи” в точку трикутник CDE.

Ресурс ДСП. Розглянемо тепер питання про доцільність збільшення дефіцитного ресурсу ДСП – обмеження (1).

При збільшенні запасу цього ресурсу пряма (1) ДСП (або відрізок DE) переміщується праворуч паралельно сама собі, поступово “стягує” в точку трикутник DEF (рис. 3). Новою оптимальною точкою стає точка F, де перетинаються прямі Праця(3) і $x_2=0$. Тепер:

- простір допустимих розв’язків – багатокутник ABCF;
- встановимо координати точки F, розв’язавши відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 150, \\ x_2 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

- визначимо максимально допустимий запас ресурсу ДСП, підставивши координати точки F у ліву частину обмеження (1): $3,5x_1 + x_2 \leq 350$

$$3,5 \cdot 150 + 0 = 525 \text{ (м)};$$

значення цільової функції в точці F:

$$P(F) = 200 \cdot 150 + 100 \cdot 0 = 30000 \text{ (у. о.)}.$$



Рис. 3 – Ресурс ДСП

Примітка. При зменшенні запасу цього ресурсу пряма ДСП (або відрізок DE) переміщується ліворуч паралельно сама собі, поступово “стягує” в точку трикутник DEC.

Ресурс Скло. Розглянемо тепер питання про зменшення правої частини незв’язуючого обмеження (2) - Скло.

З рисунку 4 видно, що пряму Скло (2) (BC) можна опустити донизу до перетину з оптимальною точкою D(80, 70), отже, зменшення ресурсу Скло ніяк не вплине на оптимальність раніше отриманого розв’язку.

Праву частину обмеження $x_1 + 2x_2 \leq 240$ можна зменшити доти, поки пряма Скло (2) (BC) не дістане точки D. Тоді права частина обмеження буде дорівнювати:

$$80 + 2 \cdot 70 = 220,$$

Що дозволяє записати обмеження у вигляді $x_1 + 2x_2 \leq 220$.

Таким чином, раніше отриманий оптимальний розв’язок не зміниться, якщо в день будемо витратити не більше 220 м скла.

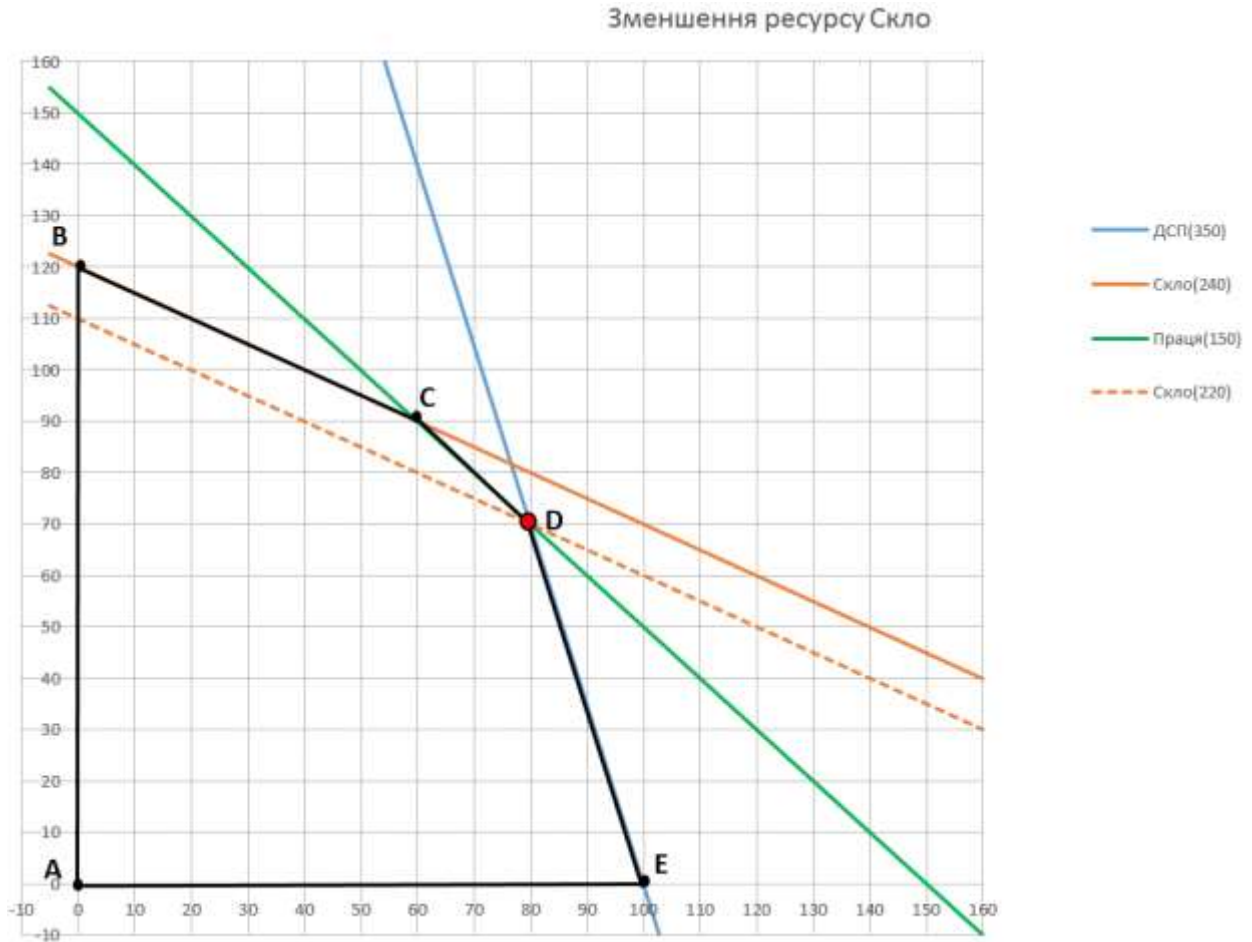


Рис. 4 – Ресурс Скло

Зведемо результати аналізу у таблицю 1

Таблиця 1

Ресурс (№ обмеження)	Тип ресурсу	Максимальна зміна запасу ресурсу	Максимальна зміна прибутку від реалізації, у.е.
ДСП (1)	Дефіцитний	$525 - 350 = 175$ (м)	$30000 - 23000 = 7000$
Праця (3)	Дефіцитний	$158 \frac{1}{3} - 150 = 8 \frac{1}{3}$ (людин)	$23500 - 23000 = 500$
Скло (2)	Недефіцитний	Максимальне зменшення $240 - 220 = 20$ (м)	0

Друга задача аналізу на чутливість – визначення цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу.

Результат аналізу у табл. 2:

Таблиця 2

Ресурс, i	Тип ресурсу	Нова ОДР	Нові зв'яз. обмеж ення	Новий оптимум	Максималь- на зміна запасу ресурсу	Максимальна зміна доходу від реалізації	Цінність од. ресурсу u_i
1 ДСП	Дефі- цитний	Багатокутник АВСF	(3), (5)	т. F(150,0)	175 м	7000 у.о.	40
3 Праця	Дефі- цитний	Багатокутник АВКЕ	(1), (2)	т. K(76 2/3,81 2/3)	8 1/3 люд.	500 у.о.	60
2 Скло	Недефі- цитний	Багатокутник АМDE	(1), (3), (2 при 220)	т. D	Зменшення 20 м	0	0

Третя задача аналізу на чутливість - межі допустимої зміни коефіцієнтів цільової функції.

З рис.5 видно обертання прямої ЦФ при зміні її коефіцієнтів. Точка D буде, як і раніше, оптимальною точкою до того часу, поки нахил прямої не вийде за межі, що визначаються нахилами прямих обмежень ДСП (1) та Праця (3). Коли нахил ЦФ буде дорівнювати нахилу обмеження Праця (3), отримаємо дві оптимальні вершини D і C (оптимальними будуть також всі точки відрізка DC). Коли нахил ЦФ буде дорівнювати нахилу обмеження ДСП (1), отримаємо дві оптимальні вершини D і E (оптимальними будуть також всі точки відрізка DE). Як тільки нахил ЦФ - прямої P вийде за межі вказаного вище інтервалу, отримаємо деякий новий розв'язок.

Розглянемо інтервал зміни c_1 , при якому точка D залишається оптимумом.

- c_1 може збільшуватися доти, поки пряма P не буде збігатися з прямою ДСП (1). (В цьому випадку нормаль і пряма ЦФ обертаються за годинниковою стрілкою);
- c_1 може зменшуватись доти, поки пряма P не буде збігатися з прямою Праця (3). (Нормаль і пряма ЦФ обертаються проти годинникової стрілки).

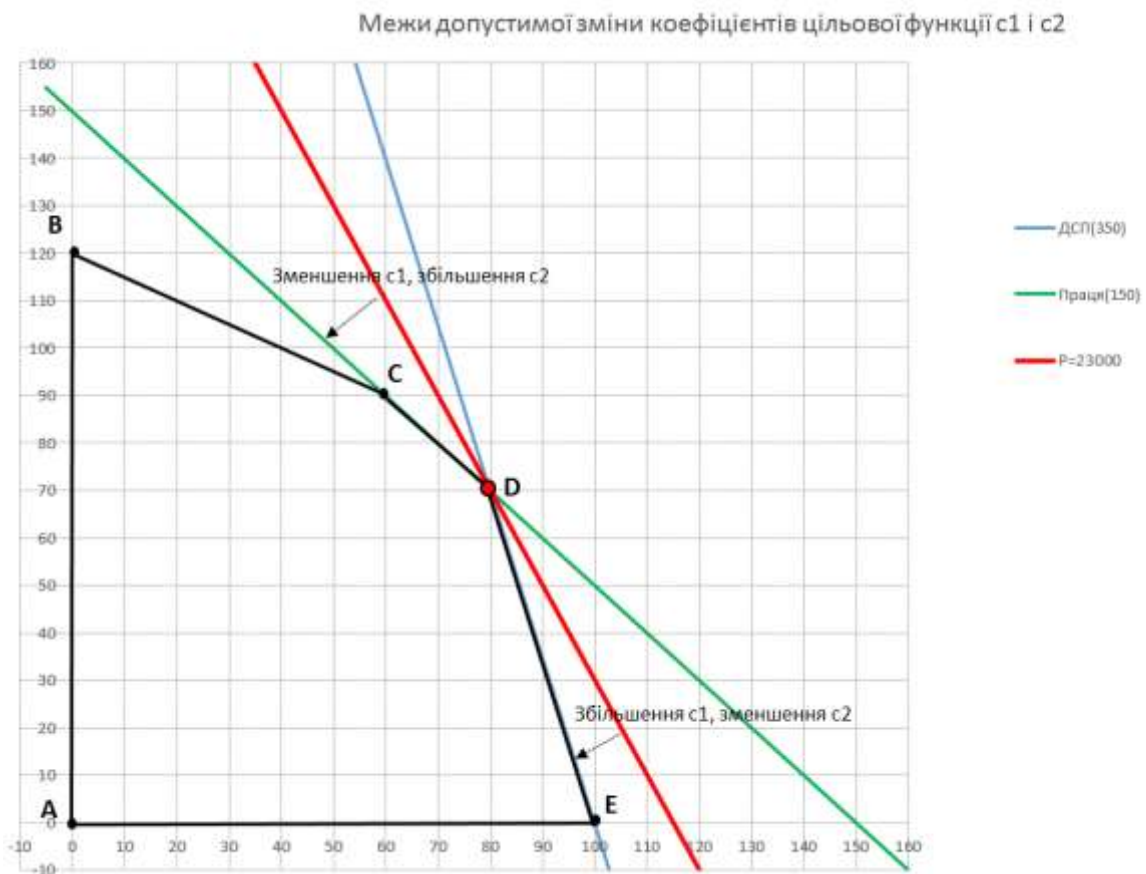


Рис.5. – Третя задача на чутливість

З урахуванням цього визначимо мінімальне і максимальне значення c_1 :

1. Фіксуємо значення коефіцієнта c_2 (при $c_2 = 100$) і “відпускаємо” значення коефіцієнта c_1 .
2. Пряму ЦФ можна обертати проти годинникової стрілки доти, поки вона не стане паралельною прямої Праця (3). Використаємо твердження “прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли їх коефіцієнти при відповідних змінних пропорційні” і знайдемо мінімальне значення коефіцієнта c_1 :

$$\begin{array}{l} P: \quad c_1 x_1 + 100 x_2 \\ (3): \quad 1 x_1 + 1 x_2 \end{array} \rightarrow \frac{c_1}{1} = \frac{100}{1} \rightarrow c_1 = 100.$$

3. Пряму ЦФ можна обертати за годинниковою стрілкою доти, поки вона не стане паралельною прямої ДСП (1), тоді максимальне значення коефіцієнта c_1 знайдемо так:

$$P: \quad c_1x_1 + 100x_2 \rightarrow \frac{c_1}{3,5} = \frac{100}{1} \rightarrow c_1 = 350.$$

$$(1): \quad 3,5x_1 + 1x_2$$

Таким чином, точка D залишається єдиною оптимальною точкою, якщо інтервал зміни c_1 визначається нерівністю: $100 < c_1 < 350$.

Якщо $c_1=350$ (при фіксованому $c_2 = 100$), то оптимальною стане точка E(100; 0).

Якщо $c_1=100$ (при фіксованому $c_2 = 100$), то оптимальною стане точка C(60; 90).

Для c_2 (при $c_1 = 200$) цей інтервал має вигляд: $57\frac{1}{7} < c_2 < 200$.

Якщо $c_2=200$ (при фіксованому $c_1 = 200$), то оптимальною стане точка C(60; 90).

Якщо $c_2=57\frac{1}{7}$ (при фіксованому $c_1 = 200$), то оптимальною стане точка E(100; 0).

Висновки

Ресурси ДСП і Праця є *дефіцитними* (а відповідні їм обмеження (1) і (3) – зв'язуючими). При деякому збільшенні рівня запасів цих ресурсів будемо мати збільшення прибутку від реалізації, при цьому:

- 1) максимально допустимий приріст рівня запасів ресурсу ДСП дорівнює 175 м (тобто рівень запасів цього ресурсу можна збільшувати до 525 м), максимально можливе збільшення прибутку від реалізації при цьому складає 7000 у.о.;
- 2) максимально допустимий приріст рівня запасів ресурсу Праця дорівнює $8\frac{1}{3}$ людино-години (тобто рівень запасів цього ресурсу можна збільшити до $158\frac{1}{3}$ людино-годин), максимально допустиме збільшення доходу від реалізації при цьому складає 500 у.о.

Обмеження (2) є незв'язуючим (відповідний ресурс Скло – *недефіцитним*). При наступній зміні рівня запасів недефіцитних ресурсів

оптимальний розв'язок, а отже, і величина прибутку від реалізації, не змінюються: рівень запасу ресурсу Скло може зменшуватися до 220 м.

Цінність ресурсу ДСП дорівнює 40. Цінність ресурсу Праця дорівнює 60. З цього випливає, що при рівних закупівельних цінах ресурсів ДСП і Праця додаткові вкладення треба в першу чергу спрямувати на збільшення запасу ресурсу Праця, а лише потім – на збільшення запасу ресурсу ДСП.

Допустимі інтервали зміни цін виробленої меблі, за яких оптимальний розв'язок залишиться незмінним:

- 1) ціна на шафу може змінюватися в таких межах: $100 < c_1 < 350$;
- 2) ціна на тумбу може змінюватися в таких межах: $57\frac{1}{7} < c_2 < 200$.

4. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Приведемо задачу до канонічного вигляду:

$$P(X) = 200x_1 + 100x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 240, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 150, \end{cases}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_i \geq 0, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

При базисному рішенні $x_3 = 350$, $x_4 = 240$, $x_5 = 150$ значення цільової функції P дорівнює $P = 200 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 0 \cdot 350 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 150 = 0$.

Маємо початкове базисне рішення $X_0 = (0, 0, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 350, 240, 150)$.

Цільова функція $P(X_0) = 0$.

Рішення приведено на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3	P	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	Рішення	Перевірка		
4	1	P	-200	-100	0	0	0	0	0		
5	0	x3	3,5	1	1	0	0	350	100		
6	0	x4	1	2	0	1	0	240	240		
7	0	x5	1	1	0	0	1	150	150		
8											
9	X0=(x1, x2, x3, x4, x5)=(0, 0, 350, 240, 150)										
10	P(X0)=0										
11											
12	1 ітерація										
13											
14	P	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	Рішення	Перевірка		
15	1	P	0	-42,8571	57,14286	0	0	20000	20000		
16	200	x1	1	0,285714	0,285714	0	0	100	350		
17	0	x4	0	1,714286	-0,28571	1	0	140	81,666667		
18	0	x5	0	0,714286	-0,28571	0	1	50	70		
19											
20	X1=(x1, x2, x3, x4, x5)=(100, 0, 0, 140, 50)										
21	P(X1)=20000										
22	P(X1)=20000 > 0=P(X0)										
23											
24	2 ітерація										
25											
26	P	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	Рішення	Перевірка		
27	1	P	0	0	40	0	60	23000	23000		
28	200	x1	1	0	0,4	0	-0,4	80			
29	0	x4	0	0	0,4	1	-2,4	20			
30	100	x2	0	1	-0,4	0	1,4	70			
31											
32	X2=(x1, x2, x3, x4, x5)=(80, 70, 0, 20, 0)										
33	P(X2)=23000										
34	P(X2)=23000 > 20000=P(X1)										
35											
36											

Рис. 6 – Реалізація симплекс-методу

Відповідь: $\max P(X) = 23000$ при $X = (80; 70)$. Для отримання максимального прибутку 23000 у.о. потрібно планувати випуск 80 шаф і 70 тумб. Перший ресурс ДСП – дефіцитний, його вартість 40 од, другий ресурс Скло – недефіцитний, залишок 20 м., третій ресурс Праця – дефіцитний, його вартість 60 од.

5. ДВОЇСТА ЗАДАЧА.

Модель ЗЛП

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Канонічний вид

$$P(X) = 200x_1 + 100x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 350, \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 240, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 150, \end{cases}$$

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_i \geq 0, \text{ де } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Складемо двоїсту задачу до прямої задачі.

Так як у прямої задачі 3 обмеження, то буде 3 змінні y_i (y_1, y_2, y_3). Вільні члени системи обмежень прямої задачі є коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі. Оскільки пряма задача на максимум, двоїста задача буде на мінімум.

Отримали таку цільову функцію двоїстої задачі:

$$C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \rightarrow \min$$

Матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою матрицею коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі, тобто замінюємо рядки стовпцями, а стовпці рядками. П'яти змінним обмежень x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 відповідають наступні вектори:

$$\begin{pmatrix} 3,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5.$$

Оскільки двоїста задача на мінімум, в обмеженнях будемо використовувати знак: \geq .

Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при

змінних у цільовій функції прямої задачі.

$$\begin{cases} 3,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 100, \\ y_1 + 0y_2 + 0y_3 \geq 0, \\ 0y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 0, \\ 0y_1 + 0y_2 + y_3 \geq 0, \\ y_1, y_2, y_3 - \text{вільні змінні} \end{cases}$$

Отримали математичну модель двоїстої задачі:

$$\begin{aligned} C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 3,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 100, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Економічна інтерпретація двоїстої задачі.

Нехай є покупець на всі ресурси, використовувані для випуску продукції меблевого цеху (ДСП, скло і праця). Які ціни на ці ресурси потрібно призначити, щоб продати їх було вигідніше, ніж виробляти продукцію? Яку мінімальну суму можна виручити від продажу ресурсів за цієї умови?

Оскільки в цій задачі три види ресурсів, то змінних рішення, очевидно, має бути теж три. Це цінність ресурсів, яку призначає виробник під час продажу:

y_1 - 1 м ДСП,

y_2 - 1 м скла,

y_3 - 1 дня праці робітника цеху.

Цінність ресурсів не може бути від'ємною величиною: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$.

Цільову функцію даної задачі можна також розглядати як витрати покупця ресурсів, які необхідно мінімізувати, взявши до уваги інтереси виробника - продавця ресурсів.

$$C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3$$

Відповідно при запису обмежень використаний той же принцип. Якщо виробляти (продавець ресурсів) хоче продати 3,5 м ДСП, 1 м скла і 1 день праці робітника, то він повинен одержати не менше, ніж прибуток від виробництва однієї шафи (на який, згідно з даними таблиці параметрів, і йдуть всі ці ресурси): $3,5y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 200$.

Аналогічно якщо він хоче продати 1 м ДСП, 2 м скла і 1 день праці робітника він повинен одержати не менше, ніж прибуток від виробництва однієї тумби: $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 100$.

6. КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ ПРЯМОЇ ЗАДАЧІ В MS EXCEL

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Оптимальний план виробництва мебельного цеху							
2								
3			Шафи	Тумби				
4			80	70				
5								
6	Ресурси				знак	Витрати	Запаси	
7	ДСП		3,5	1	<=	350	350	
8	Скло		1	2	<=	220	240	
9	Праця		1	1	<=	150	150	
10								
11	Прибуток		200	100		23000	у.о.	
12								
13								
14								

Рис. 7 – Комп'ютерна модель прямої задачі

Висновок. При плануванні виробництва 80 шаф і 70 тумб отримаємо максимальний прибуток в розмірі 23000 у.о.

7. КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ В MS EXCEL

$$C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 100, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0, \\ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Двоїста задача - визначення цінності ресурсів							
2								
3		ДСП	Скло	Праця				
4		40	0	60				
5								
6					знак	Витрачено	За умовою	
7	Шафи	3,5	1	1	>=	200	200	
8	Тумби	1	2	1	>=	100	100	
9								
10	Витрати	350	240	150		23000		
11								
12								
13								

Рис. 8 – Комп'ютерна модель двоїстої задачі

Висновок. мінімальні витрати на покупку ресурсів складуть 23000 у.о., при цьому цінність 1 м ДСП дорівнює 40, цінність 1 робітника дорівнює 60, цінність скла дорівнює 0 (недефіцитний ресурс).

8. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ

На останній ітерації (рис. 9) симплекс-методу отримали рішення прямої ЗЛП

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (80, 70, 0, 20, 0)$$

	P	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	Рішення	Перевірка
	1	P	0	0	40	0	60	23000	23000
	200	x1	1	0	0,4	0	-0,4	80	
	0	x4	0	0	0,4	1	-2,4	20	
	100	x2	0	1	-0,4	0	1,4	70	
X2=(x1, x2, x3, x4, x5)=(80, 70, 0, 20, 0)									
P(X2)=23000									
P(X2)=23000 > 20000=P(X1)									

Рис. 9 - Остання ітерація симплекс-методу

Це означає: $x_1 = 80$ - планується випускати 80 шаф, $x_2 = 70$ - планується випускати 70 тумб, $x_3 = 0$ - перший ресурс (ДСП) витрачений повністю, ДСП – дефіцитний ресурс, $x_4 = 20$ - другий ресурс (Скло) витрачений не повністю, залишок Скла 20 м, Скло – не дефіцитний ресурс, $x_5 = 0$ - третій ресурс (Праця) витрачений повністю, Праця – дефіцитний ресурс.

Знайдемо рішення двоїстої задачі (рис.10)

			y4	y5	y1	y2	y3		
	P	Базис	x1	x2	x3	x4	x5	Рішення	Перевірка
	1	P	0	0	40	0	60	23000	23000
	200	x1	1	0	0,4	0	-0,4	80	
	0	x4	0	0	0,4	1	-2,4	20	
	100	x2	0	1	-0,4	0	1,4	70	
			y1	y2	y3				
			40	0	60				

Рис. 10 – Рішення двоїстої задачі

Визначимо цінність дефіцитних ресурсів.

$$Y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (40, 0, 60, 0, 0)$$

$y_1 = 40$ - цінність першого ресурсу (ДСП), $y_2 = 0$ - цінність другого ресурсу (Скло), він не дефіцитний, $y_3 = 60$ - цінність третього ресурсу (Праця). Якщо запас ДСП збільшити на 1 м, то прибуток збільшиться на 40 у.о. Якщо запас

ресурсу Праця збільшити на 1 людино-годину, то прибуток збільшиться на 60 у.о.

$y_3 = 60 > 40 = y_1$ - кошти в першу чергу потрібно вносити в ресурс Праця.

Визначимо рентабельність випуску продукції.

$y_4 = 0$, $y_5 = 0$ - витрати на виробництво шаф і тумб дорівнюють їх ціні, тому виробництво двох видів продукції є рентабельним.

9. АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ ОТРИМАНОГО РІШЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СЕРВІСУ «ПОШУК РІШЕННЯ»

Проаналізуємо *звіт про результати* (рис.11).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 15.0 Звіт про результати						
2	Аркуш: [ММДО_КП.xlsx]Пряма						
3	Звіт створено: 30.05.2025 17:28:39						
4	Результат: Розв'язання знайдено. Усі обмеження й умови оптимальності дотримані.						
5	Модуль розв'язувача						
6	Модуль: За симплекс-методом						
7	Час розв'язання: 0 Секунди.						
8	Ітерації: 2 Підзадачі: 0						
9	Параметри модуля розв'язувача						
10	Максимальний час Без обмежень, Ітерації Без обмежень, Precision 0,000001, Використовувати авт						
11	Максимальна кількість підзадач: Без обмежень, Максимальна кількість цілочислових розв'язань Б						
12							
13							
14	Клітинка цільової функції (Максимум)						
15	<u>Клітинка</u>	<u>Назва</u>	<u>Вихідне значення</u>	<u>Остаточне значення</u>			
16	\$F\$11	Прибуток	0	23000			
17							
18							
19	Клітинки змінних						
20	<u>Клітинка</u>	<u>Назва</u>	<u>Вихідне значення</u>	<u>Остаточне значення</u>	<u>Ціле число</u>		
21	\$C\$4	Шафи	0	80	Продовжити		
22	\$D\$4	Тумби	0	70	Продовжити		
23							
24							
25	Обмеження						
26	<u>Клітинка</u>	<u>Назва</u>	<u>Значення клітинки</u>	<u>Формула</u>	<u>Стан</u>	<u>Допуск</u>	
27	\$F\$7	ДСП	350	\$F\$7<=\$G\$7	Зв'язування	0	
28	\$F\$8	Скло	220	\$F\$8<=\$G\$8	Без зв'язування	20	
29	\$F\$9	Праця	150	\$F\$9<=\$G\$9	Зв'язування	0	

Рис. 11 – Звіт про результати

Для отримання максимального прибутку в розмірі 23000 у.о. потрібно виробляти 80 шаф і 70 тумб.

Ресурс ДСП. Цей ресурс використаний в кількості 350 м. Залишку не має, тобто використаний він повністю. Це обмеження є зв'язаним, тому ресурс є дефіцитним.

Ресурс Праця. Цей ресурс використаний в кількості 150 робітників. Залишку не має, тобто використаний він повністю. Це обмеження є зв'язаним, тому ресурс є дефіцитним.

Ресурс Скло. Цей ресурс використаний в кількості 220 м. Є залишок 20 м, тобто використаний він не повністю. Це обмеження є не зв'язаним, тому ресурс не є дефіцитним.

Висновок. Для отримання прибутку, більшого ніж 23000 у.о., потрібно збільшити використання дефіцитних ресурсів – ДСП і Праця.

Проаналізуємо *звіт про стійкість* – верхню таблицю (рис.12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Microsoft Excel 15.0 Звіт про стійкість								
2	Аркуш: [ММДО_КП.xlsx]Пряма								
3	Звіт створено: 30.05.2025 17:28:39								
4									
5									
6	Клітинки змінних								
7			Остаточне	Зменшена	Цільова	функція	Припустиме	Припустиме	
8	Клітинка	Назва	Значення	Вартість	Коефіцієнт		Збільшення	Зменшення	
9	\$C\$4	Шафи	80	0	200		150	100	
10	\$D\$4	Тумби	70	0	100		100	42 6/7	
11									
12	Обмеження								
13			Остаточне	Тінь	Обмеження		Припустиме	Припустиме	
14	Клітинка	Назва	Значення	Ціна	Права сторона		Збільшення	Зменшення	
15	\$F\$7	ДСП	350	40	350		175	50	
16	\$F\$8	Скло	220	0	240		1E+30	20	
17	\$F\$9	Праця	150	60	150		8 1/3	50	
18									

Рис. 12 – Звіт про стійкість

Рядок 9 говорить про продукцію шафи, цю продукцію потрібно випускати в кількості 80 одиниць. Зменшена (нормована) вартість однієї шафи дорівнює 0, тобто виготовлення шаф рентабельно для цеху.

Рядок 10 говорить про продукцію тумби, цю продукцію потрібно випускати в кількості 70 одиниць. Зменшена (нормована) вартість однієї тумби дорівнює 0, тобто виготовлення тумб рентабельно для цеху.

Прибуток від продажу 1 шафи становить 200 у.о.

Прибуток від продажу 1 тумби становить 100 у.о.

При збільшенні цільового коефіцієнта c_1 на 150, $c_1 = 350$ отримаємо прибуток 35000 у.о., але зміниться план випуску продукції – 100 шаф і 0 тумб.

При збільшенні цільового коефіцієнта c_1 на 149, $c_1 = 349$ отримаємо прибуток 34920 у.о., при плануванні продукції – 80 шаф і 70 тумб.

При збільшенні цільового коефіцієнта c_2 на 100, $c_2 = 200$ отримаємо прибуток 30000 у.о., при плануванні продукції – 80 шаф і 70 тумб.

Створимо сценарії для моделювання змін цільових коефіцієнтів (рис.13).

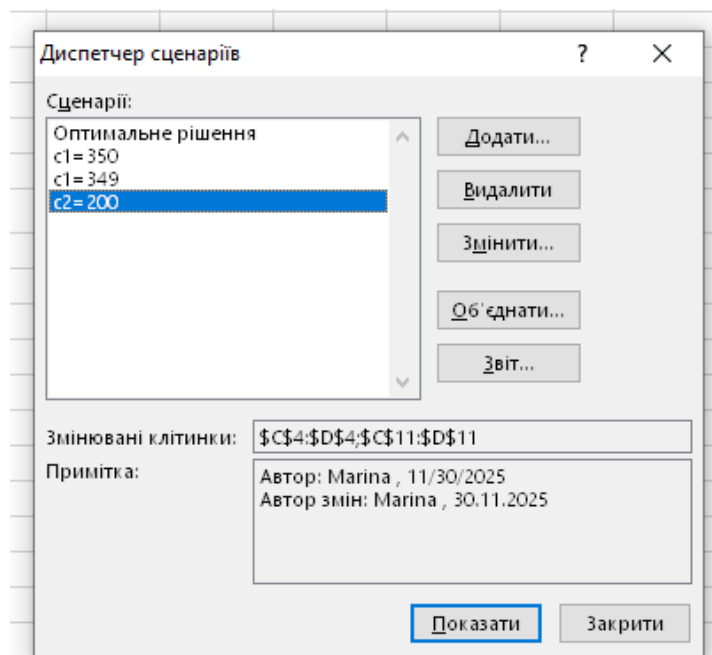


Рис. 13 – Диспетчер сценаріїв для моделювання коефіцієнтів цільової функції

На рис. 14 отримали звіт «Структура сценарію» для моделювання оптимального плану і максимального прибутку.

Структура сценарію					
Оптимальне рішення		c1=350	c1=349	c2=200	
Змінювані клітинки:					
c1	\$C\$11	200	350	349	200
c2	\$D\$11	100	100	100	200
Результат:					
Шафи	\$C\$4	80	100	80	80
Тумби	\$D\$4	70	0	70	70
Прибуток	\$F\$11	23000	35000	34920	30000

Рис. 14 – Структура сценарію для моделювання оптимального плану і максимального прибутку

Висновок. Оптимальний план 80 шаф по 200 у.о. і 70 тумб по 100 у.о. дає прибуток 23000у.е.

Збільшити прибуток, не змінюючи оптимальний план, а тільки ціни на вироби можна наступним чином:

- при збільшенні ціни на шафу до 349 у.о., отримаємо прибуток 34929 у.о.
- при збільшенні ціни на тумбу до 200 у.о., отримаємо прибуток 30000 у.о.

Проаналізуємо *звіт про стійкість* – нижню таблицю (рис.15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Microsoft Excel 15.0 Звіт про стійкість								
2	Аркуш: [ММДО_КП.xlsx]Пряма								
3	Звіт створено: 30.05.2025 17:28:39								
4									
5									
6	Клітинки змінних								
7			Остаточне	Зменшена	Цільова функція	Припустиме	Припустиме		
8	Клітинка	Назва	Значення	Вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменшення		
9	\$C\$4	Шафи	80	0	200	150	100		
10	\$D\$4	Тумби	70	0	100	100	42 6/7		
11									
12	Обмеження								
13			Остаточне	Тінь	Обмеження	Припустиме	Припустиме		
14	Клітинка	Назва	Значення	Ціна	Права сторона	Збільшення	Зменшення		
15	\$F\$7	ДСП	350	40	350	175	50		
16	\$F\$8	Скло	220	0	240	1E+30	20		
17	\$F\$9	Праця	150	60	150	8 1/3	50		
18									

Рис. 15 – Звіт про стійкість

Тіньова ціна ресурсу ДСП 40 (у.о./м). Це означає, що збільшення запасу ДСП на 1 метр збільшить цільову функцію на 40 у.о. Тіньова ціна ресурсу Праця 60 (у.о./людино-годину). Це означає, що збільшення запасу Праця на 1 робітника збільшить цільову функцію на 60 у.о.

Порівняння тіньових цін ресурсів ДСП і Праця показує, що при прагненні збільшити загальний прибуток від продажу меблів перевагу потрібно віддати збільшенню запасів ресурсу Праця, оскільки він має більшу тіньову ціну.

Запаси ресурсу ДСП (350 м) можуть збільшуватися до 525 м ($350 + 175 = 525$), подальше збільшення запасу не чинитиме впливу на оптимальне рішення задачі (тобто відповідне обмеження по запасу ресурсів стане надмірним, а сам ресурс перейде в категорію недефіцитних).

Аналогічно значення ($150 + 8\frac{1}{3} = 158\frac{1}{3}$) визначають межу можливих змін запасів іншого дефіцитного ресурсу Праця. Збільшення ресурсу Праця (150 людино/годин) в цьому інтервалі від 150 людино/годин до $158\frac{1}{3}$ людино/годин призведе до зміни оптимального рішення задачі і збільшення значення цільової функції.

Ресурс Скло не є дефіцитним. Допустиме зменшення дорівнює 20 м. Тобто можна зменшити запас цього ресурсу до 220 м ($240 - 20 = 220$).

Промодельюємо отримані ситуації (рис. 16-17).

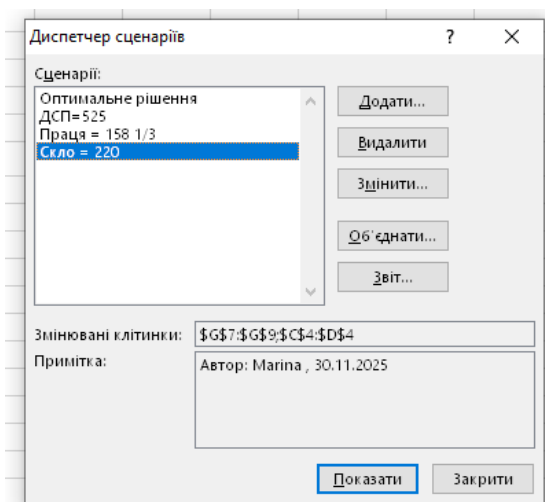


Рис. 16 - Диспетчер сценаріїв для моделювання зміни ресурсів

Структура сценарію					
Оптимальне рішення		ДСП=525	Праця = 158 1/3	Скло = 220	
Змінювані клітинки:					
ДСП	\$G\$7	350	525	350	350
Скло	\$G\$8	240	240	240	220
Праця	\$G\$9	150	150	158,3333333	150
Результат:					
Шафи	\$C\$4	80	150	76,66666667	80
Тумби	\$D\$4	70	0	81,66666667	70
Прибуток	\$F\$11	23000	30000	23500	23000

Рис. 17 - Структура сценарію для моделювання зміни ресурсів для отримання оптимального плану виробництва

Висновок.

Прибуток 23000 у.о. отримаємо при використанні 350 м ДСП, 240 м скла і 150 робітників.

Такий же прибуток 23000 у.о. отримаємо при використанні 350 м ДСП, 220 м скла і 150 робітників.

Прибуток 23500 у.о. отримаємо при використанні 350 м ДСП, 240 м скла і 158 $\frac{1}{3}$ людино/годин.

Прибуток 30000 у.о. отримаємо при використанні 525 м ДСП, 240 м скла і 150 робітників.

Проаналізуємо *звіт про ліміти*_(рис. 18)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	Microsoft Excel 15.0 Звіт про ліміти										
2	Аркуш: [ММДО_КП.xlsx]Пряма										
3	Звіт створено: 30.05.2025 17:28:39										
4											
5											
6	Цільова функція										
7	Клітинка	Назва	Значення								
8	\$F\$11	Прибуток	23000								
9											
10											
11		Змінна		Нижній	Цільова функція	Верхній	Цільова функція				
12	Клітинка	Назва	Значення	Ліміт	Результат	Ліміт	Результат				
13	\$C\$4	Шафи	80	0	7000	80	23000				
14	\$D\$4	Тумби	70	0	16000	70	23000				
15											

Рис. 18 – Звіт про ліміти

Ми визначили оптимальний план виробництва 80 шаф і 70 тумб, який приносить прибуток 23000 у.о.

Якщо шафи не будемо випускати ($x_1=0$), то будемо випускати тільки тумби у кількості 70 одиниць, при цьому отримаємо прибуток 7000 у.о.

Якщо тумби не будемо випускати ($x_2=0$), то будемо випускати тільки шафи у кількості 80 одиниць, при цьому отримаємо прибуток 16000 у.о.

10.РІШЕННЯ ЗЛП ЗАСОБАМИ PYTHON

Математична модель прямої задачі:

$$P(x_1, x_2) = 200x_1 + 100x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3,5x_1 + x_2 \leq 350, & \text{ДСП} \\ x_1 + 2x_2 \leq 240, & \text{Скло} \\ x_1 + x_2 \leq 150, & \text{Праця} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Текст програми

```
from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpStatus, LpVariable

# Визначаємо модель
model = LpProblem(name="Оптимальний_план_мебельного_цеху", sense=LpMaximize)

# Описуємо змінні
x = {i: LpVariable(name=f"x{i}", lowBound=0) for i in range(1, 3)}

# Додаємо обмеження
model += (3.5 * x[1] + x[2] <= 350, "ДСП")
model += (x[1] + 2 * x[2] <= 240, "Скло")
model += (x[1] + x[2] <= 150, "Праця")

# Описуємо ціль
model += 200 * x[1] + 100 * x[2]

# Повне визначення моделі
print(model)

# Розв'язуємо задачу оптимізації
status = model.solve()

# Виводимо результати рішення
print(f"status: {model.status}, {LpStatus[model.status]}")
print(f"objective: {round(model.objective.value(), 3)}")
for var in x.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
for name, constraint in model.constraints.items():
    print(f"{name}: {constraint.value()}")
```

Результат – визначення моделі прямої задачі і отримане рішення (рис. 19)

```

Оптимальний_план_мебельного_цеху:
MAXIMIZE
200*x1 + 100*x2 + 0
SUBJECT TO
ДСП: 3.5 x1 + x2 <= 350

Скло: x1 + 2 x2 <= 240

Праця: x1 + x2 <= 150

VARIABLES
x1 Continuous
x2 Continuous

status: 1, Optimal
objective: 23000.0
x1: 80.0
x2: 70.0
ДСП: 0.0
Скло: -20.0
Праця: 0.0

```

Рис. 19 – Рішення прямої ЗЛП

Найбільш вигідне рішення – планувати випуск в день 80 шаф і 70 тумб для отримання 23000 у.о. прибутку. Ресурси ДСП і Праця є дефіцитними, ресурс Скло використаний не повністю – залишок 20 м.

Математична модель двоїстої задачі:

$$\begin{cases}
 C(Y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 \rightarrow \min \\
 3,5y_1 + y_2 + y_3 \geq 200, & \text{Шафи} \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 100, & \text{Тумби} \\
 y_1 \geq 0, \\
 y_2 \geq 0, \\
 y_3 \geq 0.
 \end{cases}$$

Текст програми

```

from pulp import LpMinimize, LpProblem, LpStatus, LpVariable

# Визначаємо модель
model = LpProblem(name="Мінімізація_витрат", sense=LpMinimize)

# Описуємо змінні
y = {i: LpVariable(name=f"y{i}", lowBound=0) for i in range(1, 4)}

# Додаємо обмеження
model += (3.5 * y[1] + y[2] + y[3] >= 200, "Шафи")
model += (y[1] + 2 * y[2] + y[3] >= 100, "Тумби")

# Описуємо ціль
model += 350 * y[1] + 240 * y[2] + 150 * y[3]

```

```
# Повне визначення моделі
print(model)

# Розв'язуємо задачу оптимізації
status = model.solve()

# Виводимо результати рішення
print(f"status: {model.status}, {LpStatus[model.status]}")
print(f"objective: {round(model.objective.value(), 3)}")
for var in y.values():
    print(f"{var.name}: {var.value()}")
for name, constraint in model.constraints.items():
    print(f"{name}: {constraint.value()}")

print(f"{name}: {constraint.value()}")
```

Результат (рис. 20)

```
Мінімізація_витрат:
MINIMIZE
350*y1 + 240*y2 + 150*y3 + 0
SUBJECT TO
Шафи: 3.5 y1 + y2 + y3 >= 200

Тумби: y1 + 2 y2 + y3 >= 100

VARIABLES
y1 Continuous
y2 Continuous
y3 Continuous
```

```
status: 1, Optimal
objective: 23000.0
y1: 40.0
y2: 0.0
y3: 60.0
Шафи: 0.0
Тумби: 0.0
```

Рис. 20 - Рішення двоїстої ЗЛП

Цінність ресурсу ДСП – 40, цінність ресурсу Скло – 0, цінність ресурсу Праця – 60. При цьому мінімальні витрати складають 23000 у.о. Ресурси ДСП і Праця є дефіцитними, ресурс Скло – не дефіцитний. Випуск шаф і тумб є рентабельним.

Література

1. Розум М.В. Дослідження операцій. Лінійне програмування (курс «Математичні методи дослідження операцій»). Навч. посібник / М.В. Розум, В.І. Загребнюк, І.С. Петренко. Одеса, 2019 (в електр. виді). - 95с.
2. Бугір М. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. Посібник для студ. ВНЗ / М.Бугір. – К.: «Академія», 1998. – 272 с.
3. Ширшков О.К., Лічікакі Н.К. Математичні методи дослідження операцій. Навч. посібник / О.К. Ширшков, Н.К. Лічікакі. – Одеса, ОНМУ, 2013. – 100 с.
4. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування / Г.Г. Цегелик. – Львів: Світ, 1995. – 216 с.
5. Івченко І.Ю. Математичне програмування: навч. посібник. / І.Ю. Івченко. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**НАВЧАЛЬНО – НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ІНФОРМАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ ТА ІННОВАЦІЙНОГО ПІДПРИЄМНИЦТВА**

Кафедра «Технічна кібернетика й інформаційні технології
ім. професора Р.В. Меркта»

КУРСОВИЙ ПРОЄКТ

з освітнього компоненту

”МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”

на тему: **«Математичне моделювання та
оптимізація проблемних ситуацій»**

Виконав(ла):
студент(ка) 3 курсу __ групи
спеціальності 122 Комп’ютерні науки

(підпис) Ім’я ПРИЗВИЩЕ
Керівник: к.ф.-м.н., доцент

(підпис) Марина РОЗУМ

Національна шкала _____

Кількість балів: _____ Оцінка: ECTS _____

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інститут Навчально-науковий інститут інформаційних технологій та інноваційного підприємництва
Кафедра Технічної кібернетики й інформаційних технологій імені професора Р.В. Меркта

**ЗАВДАННЯ
НА КУРСОВИЙ ПРОЄКТ СТУДЕНТУ**

ПІБ

1. Побудувати економіко-математичну модель розглянутого об'єкта (процесу). Провести формалізацію мети управління об'єктом, виділення можливих керуючих впливів, що впливають на досягнення сформульованої мети, а також описати систему обмежень на дії.

2. Рішити задачу, сформульовану на базі побудованої математичної моделі, за допомогою графічного методу

3. Провести аналіз чутливості отриманого рішення графічним методом.

4. Рішити задачу, сформульовану на базі побудованої математичної моделі, симплекс-методом, модифікованим симплекс-методом або двоетапним симплекс-методом.

5. Побудувати двоїсту задачу. Виконати економічну інтерпретацію двоїстої задачі.

6. Створити комп'ютерні моделі прямої та двоїстої задачі, вирішити їх за допомогою надбудови «Пошук рішення».

7. Провести аналіз чутливості отриманого рішення аналітичним методом (на базі побудованої симплекс-таблиці та побудованих звітів про результати, стійкість, межі). Розробити сценарії покращення рішення, звіт – структура сценарію.

8. Розв'язати пряму та двоїсту задачі засобами Python (з використанням відповідних бібліотек і без них).

Варіант ____.

Формулювання задачі свого варіанту

Дата видачі завдання _____

Студент

(підпис)

(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

Керівник проєкту

(підпис)

Марина РОЗУМ

(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

ЗМІСТ

	С.
Вступ	5
1. Математико-економічна модель	6
2. Графічний метод рішення	7
3. Аналіз чутливості рішення графічним методом	8
4. Симплекс-метод	11
5.	
... ..	
... ..	
... ..	
... ..	
Висновки	
Перелік посилань	
Додаток А	