

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Кафедра “Вища математика”

Схвалено на засіданні НМК ННІТІП
« 31 » серпня 2026

Протокол № 10



Директор ННІТІП

Андрій Іванов

2026

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Методичні вказівки до практичних занять

Методичні вказівки до практичних занять з обов'язкового компоненту «Вища математика для менеджерів» розроблені Мазур Неонілою Антонівною – старшим викладачем кафедри „Вища математика” Одеського національного морського університету для здобувачів спеціальності ДЗ «Менеджмент» галузі знань Д «Бізнес, адміністрування та право» бакалаврського рівня освіти для денної, заочної форми навчання.

Методичні вказівки схвалено кафедрою „Вища математика” ОНМУ від 26.06.2026 р. (протокол № 11).

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент Кирилов С.О.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент Сиваш С.Б.

I. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ АЛГЕБРИ.

1. Визначники (детермінанти).

Означення. Визначником (детермінантом) 2-го порядку називається число, яке позначається символом $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ і визначається рівністю

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a d - b c. \quad (1.1)$$

Числа a, b, c, d – елементи детермінанта,

Визначник 2-го порядку має 2-а рядки та 2-а стовпчики.

I рядок: a, b ; II рядок: c, d ;

I стовпчик: a, c ; II стовпчик: b, d .

Головна діагональ: a, d ; друга (допоміжна) діагональ: b, c .

Схема для знаків добутоків елементів головної і допоміжної діагоналей при обчисленні визначника:

$$\begin{vmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ * & & * \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ * & & * \end{vmatrix}.$$

(+)

Приклади.

Обчислити визначники: № 1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$; № 2. $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Розв'язування.

$$\text{№ 1. } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 23.$$

$$\text{№ 2. } \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Самостійно.

Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$.

Відповіді: 1) 34; 2) -10.

Визначник n -го порядку містить n рядків і n стовпчиків. Для позначення елементів такого визначника зручно використовувати букви з індексами, де перший індекс вказує на номер рядка, другий – на номер стовпчика на перетині яких стоїть даний елемент.

Визначник n -го порядку має вигляд:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник 3-го порядку має 3 рядки і 3 стовпчики:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Щоб дати правило обчислення визначників будь-якого порядку, сформулюємо **означення алгебраїчного доповнення**.

Означення. Алгебраїчним доповненням будь-якого елемента a_{ik} визначника називається визначник, який одержано з даного викресленням i -го рядка та k -го стовпчика, на перетині яких стоїть даний елемент, взятий зі знаком $(-1)^{i+k}$.

A_{ik} – позначення алгебраїчного доповнення елемента a_{ik} .

Наприклад, для визначника (1.2):

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{21} та a_{33} визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) = -1 \cdot (2 - 4) = 2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = -1 - 6 = -7.$$

Самостійно. Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{12} та a_{31} визначника з попереднього прикладу. Відповіді: $A_{12} = 17$; $A_{31} = 6$.

Правило обчислення визначників будь-якого порядку.

Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (або стовпчика) на алгебраїчні доповнення цих елементів:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (1.3)$$

$$\text{або} \quad \Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}, \quad (1.4)$$

де i та k можуть приймати будь-які значення від 1 до n .

Так визначник 3-го порядку (1.2) можна обчислити, наприклад, як $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (розкладено за елементами першого рядка), або $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ (розкладено за елементами другого стовпчика), або розклавши за елементами будь-якого іншого рядка чи стовпчика.

Приклади. Обчислити визначники:

$$\text{№ 1.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{№ 2.} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\text{№ 1.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \quad (\text{розкладемо за елементами першого рядка})$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 + 8) - 2(3 - 20) - 2(-6 + 5) = 43.$$

№ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ (розкладемо цей визначник за елементами третього

стовпчика, який містить нульовий елемент)

$$= 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 5(-8 + 3) + (-9 + 4) = -30.$$

Приклади для самостійного розв'язування.

Обчислити:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \\ 2 & 10 & 8 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

Відповіді: 1) 11; 2) -169; 3) 0; 4) 12.

Теоретичні питання для самоперевірки:

1. Означення і позначення визначника 2-го порядку.
2. Правило обчислення визначника 2-го порядку.
3. Позначення визначника 3-го порядку.
4. Позначення визначника n -го порядку.
5. Означення алгебраїчного доповнення елемент a_{ik} визначника n -го порядку.
6. Правило обчислення визначника n -го порядку.
7. Виписати алгебраїчні доповнення елементів a_{13} , a_{21} , a_{32} визначника 3-го порядку.
8. Записати правило обчислення визначника 3-го порядку розкладом за елементами: а) 1-го стовпчика; б) 2-го рядка.

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. В загальному випадку її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

де x, y, z – невідомі; а $a_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ – задані дійсні числа, які називаються коефіцієнтами при невідомих;
 $b_i (i = 1, 2, 3)$ – задані дійсні числа, які називаються вільними членами.

Якщо всі вільні члени $b_i = 0$, де $i = 1, 2, 3$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **однорідною (ЛОСАР)**.

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля, то система називається **неоднорідною (ЛНСАР)**.

Розв'язком системи називається множина дійсних значень невідомих, які при підстановці в рівняння цієї системи перетворюють кожне її рівняння в тотожність.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною**. Сумісна система може мати єдиний розв'язок, або безліч розв'язків.

Якщо система не має розв'язків, то вона називається **несумісною**.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему трьох алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими виду (2.1). З коефіцієнтів цієї системи можна скласти наступні визначники.

Визначник, який складено з коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad - \text{ називається } \mathbf{головним (основним)} \text{ визначником}$$

системи.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

допоміжні визначники системи.

Допоміжні визначники Δ_x , Δ_y , Δ_z системи (2.1) утворюються з головного визначника системи шляхом заміни відповідно стовпчиків коефіцієнтів при x , y , z стовпчиком вільних членів.

Сформулюємо **правило Крамера** для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теорема Крамера. Якщо основний визначник СЛАР (2.1) відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), то така система має єдиний розв'язок, який може бути знайдено за допомогою формул:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (2.3)$$

Отже, згідно правилу Крамера, якщо $\Delta \neq 0$, то СЛАР має єдиний розв'язок.

У випадку, коли $\Delta = 0$, СЛАР або не має розв'язків, або має безліч розв'язків.

Слід зауважити, що оскільки ЛОСАР завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок (переконайтесь самостійно, що $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ задовольняють ЛОСАР (2.2)), то при $\Delta \neq 0$ лінійна однорідна система алгебраїчних рівнянь має єдиний нульовий розв'язок, а при $\Delta = 0$, така система має безліч розв'язків, серед яких є і тривіальний.

Приклади. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи, якщо це можливо, правило Крамера.

$$\text{№ 1.} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$$

Розв'язування. Обчислимо основний визначник цієї системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23.$$

$\Delta \neq 0$, отже дана система має єдиний розв'язок, який, згідно правилу Крамера,

може бути знайдено за допомогою формул: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Обчислимо допоміжні визначники.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 12 \cdot 5 - (-2) \cdot (-7) = 60 - 14 = 46,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - 12 \cdot 4 = -21 - 48 = -69.$$

$$\text{Маємо: } x = \frac{46}{23} = 2, \quad y = \frac{-69}{23} = -3.$$

Відповідь: $(2; -3)$.

$$\text{№ 2. } \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ -6x + 4y = 5 \end{cases}$$

Розв'язування.

Обчислимо основний визначник цієї системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-6) = 12 - 12 = 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то ця система не може мати єдиний розв'язок (вона або має безліч розв'язків, або взагалі розв'язків не має). В цьому випадку правило Крамера не застосовується.

Проаналізуємо цю систему. Розділимо друге рівняння на (-2) . Одержимо систему $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 3x - 2y = -2,5 \end{cases}$.

Маємо протиріччя (ліві частини рівнянь системи співпадають, а праві різні).

Це означає, що дана система розв'язків не має (несумісна).

Відповідь: $\emptyset$.

$$\text{№ 3. } \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Розв'язування.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Оскільки ЛОСАР завжди має розв'язок, а згідно правила Крамера єдиний розв'язок ЛСАР має тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$, то дана **система має безліч розв'язків**. За допомогою правила Крамера ці розв'язки не можуть бути знайдені.

Проаналізуємо дану систему. Розділимо перше рівняння на 2. Система матиме вигляд $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$. Рівняння співпадають. А це означає, що перше рівняння не несе нової інформації про невідомі в порівнянні з другим. А тому його можна відкинути. З другого рівняння: $y = -2x$.

Відповідь: $(x; -2x)$, де $x \in R$.

Приклади для самостійного розв'язування.

Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи, якщо це можливо, правило Крамера.

$$1) \begin{cases} 5x + 2y = -4 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 7x - 2y = 0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}.$$

Відповіді: 1) $(-2; 3)$; 2) $(0; 0)$; В прикладах 3) та 4) правило Крамера використати не можна, оскільки основний визначник $= 0$.

Розглянемо приклади використання правила Крамера при розв'язуванні систем трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

$$\text{№ 4.} \quad \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 3y - 2z = 9 \end{cases}.$$

Розв'язування.

Обчислимо основний визначник цієї системи.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 - 3 + 2 \cdot (-4 - 1) - 3 \cdot (6 + 1) = -32. \end{aligned}$$

За правилом Крамера, якщо $\Delta \neq 0$, то $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Обчислимо допоміжні визначники.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = \\ = 2(2-9) - 3(-3+9) = -32;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 2-9-3(18+1) = -64;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -9+3+2 \cdot (18+1) = 32.$$

Зауваження: всі визначники обчислювались розкладенням за елементами першого рядка.

$$\text{Одержимо: } x = \frac{-32}{-32} = 1; \quad y = \frac{-64}{-32} = 2; \quad z = \frac{32}{-32} = -1.$$

Відповідь: $(1; 2; -1)$.

$$\text{№ 5. } \begin{cases} x + 4y - 3z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \\ 3x + 3y - 2z = 9 \end{cases}.$$

Розв'язування.

Обчислимо основний визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \\ = 2-3-4(-4-3)-3(6+3) = -1+28-27 = 0.$$

Оскільки $\Delta=0$, то правило Крамера для знаходження розв'язку цієї системи не використовується. Система може мати безліч розв'язків, або взагалі не мати розв'язків.

$$\text{№ 6. } \begin{cases} x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 5z = 0 \end{cases}.$$

Розв'язування.

Обчислимо основний визначник цієї системи.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (5 - 4) - 4 \cdot (-15 + 4) - 2 \cdot (3 - 1) = 1 + 44 - 4 = 41. \end{aligned}$$

$\Delta \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок. А оскільки лінійна однорідна система алгебраїчних рівнянь завжди має нульовий розв'язок, то маємо:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Відповідь: $(0; 0; 0)$.

$$\text{№ 7. } \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

Розв'язування.

Основний визначник цієї системи

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1 + 1) + 2 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot (-2 + 1) = -0 + 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta=0$, то правило Крамера для знаходження розв'язку цієї системи не використовується. В цьому випадку лінійна однорідна система алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків.

Приклади для самостійного розв'язування.

Розв'язати системи, використовуючи правило Крамера, якщо це можливо.

$$1) \begin{cases} 2x + 7y = -3 \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}.$$

$$5) \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ -x + 3y + 2z = -7 \end{cases}; \quad 6) \begin{cases} x - y - 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 4x - 5y - 3z = 9 \end{cases}; \quad 7) \begin{cases} x - 4y + 2z = -3 \\ -x + 2y + z = 8 \\ 4x + y - 2z = -8 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $(2; -1)$; 3) $(0; 0)$; 5) $(3; -2; 1)$; 7) $(-1; 2; 3)$.

Правило Крамера використати не можна при розв'язанні систем 2), 4), 6).

Теоретичні питання для самоперевірки:

1. Означення лінійної системи алгебраїчних рівнянь (ЛСАР).
2. Означення лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь (ЛОСАР).
3. Означення лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь (ЛНСАР).
4. Означення розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною?
6. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається несумісною?

$$7. \text{ Для системи } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

- а) записати **головний (основний)** визначник,
 - б) записати **допоміжні** визначники.
8. Сформулюйте **правило Крамера** для розв'язання ЛСАР.
 9. Що можна сказати про розв'язки лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь, якщо її основний визначник відмінний від нуля?
 10. Що можна сказати про розв'язки лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь, якщо її основний визначник відмінний від нуля?
 11. Що можна сказати про розв'язки лінійної неоднорідної системи алгебраїчних рівнянь, якщо її основний визначник дорівнює нулеві?
 12. Що можна сказати про розв'язки лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь, якщо її основний визначник дорівнює нулеві?
 13. У якому випадку ЛНСАР має єдиний розв'язок?
 14. У якому випадку ЛОСАР має єдиний розв'язок?
 15. У якому випадку ЛОСАР має безліч розв'язків?

16. Нульовий (тривіальний) розв'язок завжди має:
- а) будь-яка система алгебраїчних рівнянь;
 - б) лінійна неоднорідна система алгебраїчних рівнянь;
 - в) лінійна однорідна система алгебраїчних рівнянь.
- Вказати на правильну відповідь.
17. Чи можна за допомогою правила Крамера знайти розв'язок будь-якої системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

3. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Метод Гаусса полягає у зведенні СЛАР за допомогою елементарних перетворень до еквівалентної їй системи більш простого (так званого трикутного) вигляду, тобто до системи, в якій всі коефіцієнти, які розташовані під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Означення. Дві сумісні системи називаються **еквівалентними**, якщо їх розв'язки співпадають.

Система може бути зведена до еквівалентної їй системи за допомогою **елементарних перетворень**, а саме:

- 1) будь-які рівняння можна поміняти місцями;
- 2) будь-яке рівняння можна помножити (або поділити) на довільне число, відмінне від нуля;
- 3) будь-яке рівняння системи можна замінити сумою, або різницею його з іншим рівнянням системи.

Так при використанні метода Гаусса система трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

має бути зведена до еквівалентної їй системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ c_{22}y + c_{23}z = d_2. \\ c_{33}z = d_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

На цьому завершується так званий **прямий хід** метода Гаусса.

Зворотний хід метода Гаусса полягає в знаходженні невідомих. По черзі з третього рівняння знаходимо z , з другого – y , з першого – x .

Розглянемо використання метода Гаусса на прикладах.

№ 1.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -6 \\ 2x + y - 4z = 8 \\ -3x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Розв'язування.

Спочатку одержимо нульові коефіцієнти при x в другому і третьому рівняннях. Для цього помножимо перше рівняння на (-2) і додамо його до другого рівняння (одержимо нове друге рівняння), а, помноживши перше рівняння на 3 , і додавши його до третього рівняння, одержимо нове третє рівняння.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -6 & | -2 & | 3 \\ 2x + y - 4z = 8 & \swarrow & | \\ -3x + 3y + 2z = 1 & & \swarrow \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} -2x + 4y - 6z & = & 12 \\ + 2x + y - 4z & = & 8 \\ \hline 5y - 10z & = & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 3x - 6y + 9z & = & -18 \\ + -3x + 3y + 2z & = & 1 \\ \hline -3y + 11z & = & -17 \end{array}$$

Одержимо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -6 \\ 5y - 10z = 20 & | :5 \\ -3y + 11z = -17 \end{cases}$$

Розділимо друге рівняння на 5:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -6 \\ y - 2z = 4 & | 3 \\ -3y + 11z = -17 & \swarrow \end{cases}$$

Щоб одержати в третьому рівнянні коефіцієнт 0 при y , помножимо друге рівняння на 3 і додамо до третього рівняння.

$$\begin{array}{rcl} 3y - 6z & = & 12 \\ -3y + 11z & = & -17 \\ \hline 5z & = & -5 \end{array}$$

Маємо:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -6 \\ y - 2z = 4 \\ 5z = -5 \end{cases} .$$
 Система зведена до трикутного вигляду.

З третього рівняння знаходимо $z = -1$.

З другого рівняння (підставивши знайдене значення $z = -1$) знайдемо y .

$$y - 2 \cdot (-1) = 4, \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

З першого рівняння при знайдених $y = 2, \quad z = -1$ одержимо:

$$x - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -6, \quad \Rightarrow \quad x = -6 + 4 + 3 = 1.$$

Відповідь: $(1; 2; -1)$.

№ 2.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ 5x - 5y + 7z = 4 \end{cases}$$

Розв'язування.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 & | \cdot 3 & | 5 \\ 3x - 2y + 3z = 2 & \leftarrow -2 & | \\ 5x - 5y + 7z = 4 & & \leftarrow -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 6x - 9y + 12z = 15 \\ + \quad -6x + 4y - 6z = -4 \\ \hline -5y + 6z = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x - 15y + 20z = 25 \\ -10x + 10y - 14z = -8 \\ \hline -5y + 6z = 17 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ -5y + 6z = 11 & | \cdot (-1) \\ -5y + 6z = 17 & \leftarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ -5y + 6z = 11 \\ 0 = 6 - \text{не вірно.} \end{cases}$$

Отже, система несумісна.

Відповідь: $\emptyset$.

$$\text{№ 3. } \begin{cases} 3x - y + 3z = 4 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ -2x + 4y - 5z = 1 \end{cases}$$

Розв'язування.

Поміняємо місцями 1-е та друге рівняння, після чого зведемо систему до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 & | -3 & | 2 \\ 3x - y + 3z = 4 & \swarrow & | \\ -2x + 4y - 5z = 1 & & \swarrow \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -3x - 9y + 6z = -15 \\ + \quad 3x - y + 3z = 4 \\ \hline -10y + 9z = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 6y - 4z = 10 \\ -2x + 4y - 5z = 1 \\ \hline 10y - 9z = 11 \end{array}$$

Одержимо:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ -10y + 9z = -11 & | + ; \\ 10y - 9z = 11 & \swarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ -10y + 9z = -11 \\ 0 = 0 - \text{вірно.} \end{cases}$$

Оскільки невідомих три, а рівнянь два, то однозначно не можна знайти невідомі. Іншими словами, система має безліч розв'язків. Щоб знайти їх, виразимо з другого рівняння одну невідому (наприклад y) через іншу.

$$-10y = 11 - 9z, \Rightarrow y = 1,1 + 0,9z.$$

З першого рівняння виразимо x через z , враховуючи, що $y = 1,1 + 0,9z$.

$$x = 5 - 3y + 2z; \Rightarrow x = 5 - 3 \cdot (1,1 + 0,9z) + 2z; \Rightarrow x = 1,7 - 0,7z.$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x = 1,7 - 0,7z, \\ y = 1,1 + 0,9z, \\ z = z, \text{ де } z \in R. \end{cases}$$

$$\text{№ 4. } \begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ -x + 3y - 2z = -4 \\ -2x + 6y - 4z = -8 \end{cases}$$

Розв'язування.

Зведемо систему до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 4 & | + & | 2 \\ -x + 3y - 2z = -4 & \swarrow & | \\ -2x + 6y - 4z = -8 & & \swarrow \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 4 \\ -x + 3y - 2z = -4 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 6y + 4z = 8 \\ -2x + 6y - 4z = -8 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

$$\text{Одержимо } \begin{cases} x - 3y + 2z = 4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Отже, система має безліч розв'язків. Залишилось одне рівняння, з якого виразимо одну невідому (наприклад x) через дві інші.

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x = 4 + 3y - 2z, \\ y = y, \text{ де } y \in R, \\ z = z, \text{ де } z \in R. \end{cases}$$

Розглянемо приклади розв'язання лінійних однорідних систем алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

$$\text{№ 5. } \begin{cases} x - 4y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Розв'язування.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | -2 \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \begin{array}{l} | -4 \\ | \\ \swarrow \end{array} ; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = 0 \\ 11y - 7z = 0 \\ 15y - 10z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ ; \\ | :5 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = 0 \\ 11y - 7z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | 3 \\ \swarrow -11 \\ \swarrow \end{array} ; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 3z = 0 \\ 11y - 7z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. ,$$

При $z = 0$ знаходимо з 2-го рівняння $y = 0$, а з першого $x = 0$.

Відповідь: $(0; 0; 0)$.

№ 6.
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 5z = 0 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{array} \right.$$

Розв'язування.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 5z = 0 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} | -5 \\ \swarrow \\ \swarrow \end{array} \begin{array}{l} | -4 \\ | \\ \swarrow \end{array} ; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 5z = 0 \\ -2y + 27z = 0 \\ -2y + 27z = 0 \end{array} \right. ;$$

Третє рівняння співпадає з другим. Відкинемо його. Три невідомі з двох рівнянь не можуть бути знайдені однозначно. Система має безліч розв'язків.

З другого рівняння: $y = 13,5z$.

З першого рівняння: $x = 5z - y$; $\Rightarrow x = 5z - 13,5z = -8,5z$.

Відповідь:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -8,5z \\ y = 13,5z \\ z = z, \text{ де } z \in R. \end{array} \right.$$

Теоретичні запитання для самоперевірки.

1. Суть метода Гаусса.
2. Які системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними?
3. Які перетворення приводять до еквівалентних систем?
4. Чи можна застосовувати метод Гаусса при розв'язуванні будь-якої системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

Приклади для самостійного розв'язування.

Розв'язати системи, використовуючи метод Гаусса.

$$1) \begin{cases} x + 5y + 4z = 1 \\ 2x - 3y - 5z = 2 \\ -3x + y + 2z = -5 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = -9 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ x - 3y + 5z = 1 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x - 2y + 4z = 13 \\ 2x + 3y - z = -6 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}.$$

Відповіді: 1) $(2; -1; 1)$; 3) $\emptyset$; 4) $(1; -2; 2)$; 6) $(0; 0; 0)$;

$$2) \begin{cases} x = -2 - 3z, \\ y = 5 + z, \\ z = z. \text{ де } z \in R. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = -z, \\ y = 2z, \\ z = z. \text{ де } z \in R. \end{cases}.$$

4. Матриці.

Означення. Матрицею розміром $m \times n$ називається прямокутна таблиця, складена з $m \times n$ чисел, розташованих у m рядків і n стовпчиків. Ці числа називаються **елементами** матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається **квадратною**.

Позначення матриць:

Матриця записується у вигляді таблиці взятої в дужки (круглі – $()$, або квадратні – $[]$), або обрамляється подвійними вертикальними рисками – $\| \|$.

Розглянемо квадратну матрицю $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – допоміжна діагональ.

Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи нулі.

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи за винятком елементів головної діагоналі дорівнюють нулю. Так, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

є діагональною 3-го порядку.

Діагональна матриця називається **одиничною**, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці. Одинична матриця позначається буквою E (або буквою I) і має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Матриця, одержана з даної матриці A заміною рядків стовпчиками і навпаки стовпчиків рядками називається **транспонованою матрицею** і позначається: A^T .

Наприклад, якщо $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, то $B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця A називається **симетричною**, якщо $a_{ik} = a_{ki}$ для всіх значень i та k .

Так матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ є симетричною.

Очевидно, що у випадку коли матриця A є квадратною і симетричною, то транспонована матриця A^T також буде симетричною.

Лінійні дії над матрицями.

1. **Добутком матриці A на число k** називається матриця kA , елементи якої одержано добутком елементів матриці A на число k .

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

2. **Сумою двох матриць однакових розмірів** називається матриця того ж розміру, елементи якої дорівнюють суммам відповідних елементів матриць-доданків. Наприклад

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Означення. Матриці A і B називаються **взаємно протилежними**, якщо $A + B = O$, де O – нуль-матриця. Матриця, протилежна матриці A , позначається як $-A$ і її елементи протилежні за знаком відповідним елементам матриці A .

3. **Різницею матриць A і B** є сума матриці A і матриці, протилежної матриці B , тобто $A - B = A + (-B)$. (4.6)

Зауваження.

Додавати та віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Властивості лінійних дій над матрицями:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B$;
- 3) $A + O = O + A$, де O – нуль-матриця;
- 4) $k(n \cdot A) = (k \cdot n) \cdot A$;
- 5) $(k + n) \cdot A = kA + nA$;
- 6) $k(A + B) = kA + kB$;
- 7) $k \cdot O = O$, (O – нуль-матриця).

Приклади.

Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1) $2 \cdot A$; 2) $A + 3B$; 3) $A - B$.

Розв'язування.

$$1) \quad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 4 \cdot 2 & 6 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A + 3B = \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot (-3) & 4 + 3 \cdot 2 & 6 + 3 \cdot (-2) \\ 3 + 3 \cdot 6 & 2 + 3 \cdot (-3) & -1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 0 \\ 21 & -7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 - (-3) & 4 - 2 & 6 - (-2) \\ 3 - 6 & 2 - (-3) & -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Самостійно. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ знайти

1) $\frac{A}{2}$; 2) $B + A$; 3) $A - 2B$.

Відповідь:

$$1) \quad \frac{A}{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1,5 \\ -1 & 2,5 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad B + A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) \quad A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць.

Означення. Добутком матриці A на матрицю B називається матриця C ($A \cdot B = C$), в якій елемент c_{ik} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на елементи k -го стовпчика матриці B .

$$c_{ik} = \sum_{n=1}^m a_{in} \cdot b_{nk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}. \quad (4.7)$$

Для існування добутку $A \cdot B$ необхідно, щоб число стовпчиків першого множника (матриці A) співпадало з числом рядків другого множника (матриці B).

Приклади

№ 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$ Знайти $A \cdot B$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 & 4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) & 4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 10 & -5 \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

№ 2. Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$ Знайти $A \cdot B$ і $B \cdot A$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + 4 \cdot (-1) \\ -2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 & -2 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 16 & -17 \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) & -3 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) & 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 18 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ми бачимо, що $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Зауважимо, що в прикладі № 1 добуток $B \cdot A$ не існує.

Властивості множення матриць:

- 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$;
- 2) $(kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k \cdot (A \cdot B)$;
- 3) $A \cdot (B + C) = AB + AC$ і $(B + C) \cdot A = BA + CA$;
- 4) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- 5) $A \cdot E = E \cdot A = A$, де E – одинична матриця;
- 6) $A \cdot O = O \cdot A = O$, де O – нуль-матриця.

Приклади для самостійного розв'язування.

№ 1. Знайти $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

№ 2. Перевірити рівність $A \cdot E = E \cdot A = A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{№ 3. Знайти } A \cdot E, \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповіді: №1 а) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -18 & -20 \\ 11 & 5 & 18 \\ 17 & -17 & -10 \end{pmatrix}; \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -47 \\ 16 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 42 & -22 & -50 \\ 15 & -1 & -11 \end{pmatrix}; \quad \text{Добуток } B \cdot A \text{ не існує.}$$

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \quad (4.8)$$

де E – одинична матриця.

Кожній квадратній матриці A ставиться у відповідність число, яке називається **визначником** або **детермінантом** матриці A і позначається ΔA або $\det A$.

Так для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(5 + 2) - 3(-1 - 6) - 4(1 + 15) = -49.$$

Означення. Квадратна матриця A називається **не виродженою**, якщо $\det A \neq 0$, і **виродженою**, якщо $\det A = 0$.

Теорема. Для того, щоб дана матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб вона була не виродженою.

Алгоритм знаходження оберненої матриці для матриці A :

- 1) Знайти $\det A$. (Якщо $\det A \neq 0$, то A^{-1} існує);
- 2) В матриці A замінити кожний елемент a_{ik} його алгебраїчним доповненням

Цю матрицю позначають символом $\tilde{A}$;

- 3) Транспонувати одержану матрицю. Одержимо матрицю $\tilde{A}^T$.

- 4) Кожний елемент отриманої матриці розділити на визначник матриці A ;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T. \quad (4.9)$$

Зауваження: пункти 2) та 3) можна переставляти.

Приклад. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

$$1) \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(2 + 12) - 3(1 + 9) + 2(4 - 6) = -6.$$

$$2) A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & -10 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -13 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T = -\frac{1}{6} \cdot \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку (як відомо $A \cdot A^{-1} = E$).

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{13}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} & 2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) & 2 \cdot \frac{13}{6} + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ 1 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 2 \cdot \frac{5}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} & 1 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + 2 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} & 1 \cdot \frac{13}{6} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ 3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) + 4 \cdot \frac{5}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} & 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) + 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) & 3 \cdot \frac{13}{6} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-14 + 15 + 2}{3} & \frac{-10 + 12 - 2}{6} & \frac{26 - 24 - 2}{6} \\ \frac{-7 + 10 - 3}{3} & \frac{-5 + 8 + 3}{6} & \frac{13 - 16 + 3}{6} \\ \frac{-21 + 20 + 1}{3} & \frac{-15 + 16 - 1}{6} & \frac{39 - 32 - 1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

Самостійно.

№1. Знайти A^{-1} , якщо 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -11 & -9 & 7 \\ -2 & -23 & -3 \end{pmatrix}$.

Теоретичні запитання для самоперевірки.

- 1) Означення матриць: квадратної, прямокутної, діагональної, одиничної, нульової, симетричної, транспонованої, виродженої, не виродженої.
- 2) Правила знаходження: а) добутку матриці на число; б) суми (або різниці) двох матриць; добутку двох матриць. Для яких матриць ці дії можна виконувати?
- 3) У якій матриці існує обернена матриця?
- 4) Чи має місце рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$?
- 5) Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Приклади для самостійного розв'язування.

Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти: $A + B; \quad B - A; \quad 2A; \quad A \cdot C; \quad D \cdot B; \quad D^{-1}.$

Відповіді:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B - A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}; \quad 2A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -18 & -4 & 13 \\ 13 & 9 & 1 \\ 14 & 12 & 5 \end{pmatrix}; \quad D \cdot B = \begin{pmatrix} 25 & 9 \\ -13 & -6 \\ -17 & -1 \end{pmatrix};$$

$$D^{-1} = \frac{1}{77} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 6 & 22 \\ 10 & 4 & -11 \\ -11 & 11 & -11 \end{bmatrix}.$$

5. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.

Розглянемо для визначеності систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (5.1)$$

Дану систему, використовуючи правило множення матриць, можна записати в матричному вигляді. а саме

$$A \cdot X = B, \quad (5.2)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} і система має єдиний розв'язок, який може бути знайдено за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (5.3)$$

Ця формула особливо зручна, коли потрібно розв'язати системи з однією і тією ж матрицею A і різними стовпчиками вільних членів B .

Приклад. Розв'язати систему
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -7 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ x + 3y - 2z = 9 \end{cases}$$
 матричним методом.

Розв'язування.

Дана система може бути записана у матричному вигляді (5.2), де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-2 + 6) + 2(-6 + 2) + 4(9 - 1) = 28. \end{aligned}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 8 & -6 & -5 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & -6 & 14 \\ 8 & -5 & 7 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{28} \cdot \tilde{A}^T.$$

Скористаємось формулою (5.3).

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 4 & -6 & 14 \\ 8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -28 + 56 + 0 \\ -28 - 42 + 126 \\ -56 - 35 + 63 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 28 \\ 56 \\ -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$.

Самостійно. Розв'язати системи матричним методом

$$1) \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 1; \\ x + y + 3z = 5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y - 3z = -6 \\ 4x + 2y + z = 2 \\ -x + 3y + 2z = -3 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $\det A = 26$, $x = 3$, $y = -1$, $z = 1$;
2) $\det A = -35$, $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

Теоретичні запитання для самоперевірки:

1. Записати формулу розв'язку системи алгебраїчних рівнянь $A \cdot X = B$ матричним методом.
2. В якому випадку для розв'язування СЛНАР можна використовувати матричний метод?

6. Розглянемо приклади задач, які виникають в економіці, що зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад № 1. Взуттєва фабрика спеціалізується на випуску трьох видів взуття: чобіт, кросівок і туфель. При цьому використовується 3 види сировини: S_1 , S_2 , S_3 . Норми витрат кожного з яких на одну пару взуття і об'єми витрати сировини на 1 день задаються таблицею

Види сировини	Норми витрату сировини на одну пару взуття умовн. од.			Витрати сировини за один день; умовн. од.
	чоботи	кросівки	туфлі	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду взуття.

Розв'язування.

Нехай фабрика випускає щоденно x_1 пар чобіт, x_2 пар кросівок, x_3 пар туфель. Тоді у відповідності з витратами сировини кожного виду матимемо систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 & \rightarrow 2 & \rightarrow 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900 & \swarrow & | \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 & & \swarrow -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ x_2 + 3x_3 = 900 \\ -x_2 + 2x_3 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ x_2 + 3x_3 = 900 \\ 5x_3 = 1000 \end{cases} \text{ Звідки}$$

$$x_3 = 200; \quad x_2 = 300; \quad x_1 = 200$$

Відповідь: Фабрика щодня виготовляє 200 пар чобіт, 300 пар кросівок і 200 пар туфель.

Приклад № 2. З двох заводів надходять автомобілі до двох автогосподарств, потреби яких складають 200 і 300 машин. Перший завод випускає 350 машин, другий – 150 машин. Відомі витрати на доставку машин із заводу до кожного автогосподарства, які можна записати у вигляді таблиці

Завод	Витрати на перевезення в грош. од.	
	1 автогосп.	2 автогосп.
1	15	20
2	8	25

Мінімальні витрати на перевезення складають 7950 грош.од. Знайти оптимальний план перевезення машин.

Розв'язування.

Нехай x_{ij} – кількість машин, що надходять з « i » заводу до « j »-го автогосподарства ($i = 1, 2; j = 1, 2$). Одержимо систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{11} + x_{21} = 200 \\ x_{12} + x_{22} = 300 \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки.

Виразимо x_{11} , x_{12} , x_{21} , через x_{22} .

З 2-го рівняння: $x_{21} = 150 - x_{22}$,

з 4-го : $x_{12} = 300 - x_{22}$,

з 1-го: $x_{11} = 350 - x_{12} = 350 - (300 - x_{22}) = 50 + x_{22}$,

з 3-го: $x_{11} = 200 - x_{21} = 200 - (150 - x_{22}) = 50 + x_{22}$.

Підставимо одержані вирази в 5-те рівняння.

Одержимо: $15(50 + x_{22}) + 20(300 - x_{22}) + 8(150 - x_{22}) + 25x_{22} = 7950$:
 $15x_{22} - 20x_{22} - 8x_{22} + 25x_{22} = 7950 - 750 - 6000 - 1200$;
 $12x_{22} = 0, \Rightarrow x_{22} = 0$.
 Тоді $x_{12} = 300, x_{21} = 150, x_{11} = 50$.

Відповідь: В перше автопідприємство відправляється 50 машин з першого і 150 машин з другого заводу, а в друге автопідприємство відправляється 300 машин виготовлених першим заводом.

Приклад № 3. Кожен з 3-х банків нараховує вкладнику свій певний процент на рік. На початку року вклад розміром 6000 грош. од. було вкладено наступним чином:

$\frac{1}{3}$ частину в I банк (2000 грош. од.)

$\frac{1}{2}$ частину в II банк (3000 грош. од.)

Залишок в III банк (1000 грош. од.)

На кінець року сума вкладу виросла до 7250 грош. од.

Якби на початку року

$\frac{1}{6}$ вкладу (1000) поклали до I-го банку

$\frac{2}{3}$ (4000) – до II-го банку

$\frac{1}{6}$ (1000) – до III-го банку

Сума вкладу склала би на кінець року 7200 грош. од.

Якщо гроші розподілити наступним чином:

$\frac{1}{2}$ (3000) → I банк

$\frac{1}{6}$ (1000) → II банк

$\frac{1}{3}$ (2000) → III банк, то сума вкладу складе 7250 грош. од.

Який процент виплачує кожен банк?

Розв'язування.

Нехай; x_1 – % I банку, x_2 – % II банку, x_3 – % III банку.

Толі маємо:

$$\begin{cases} 2000x_1 + 3000x_2 + 1000x_3 = 1250 \\ 1000x_1 + 4000x_2 + 1000x_3 = 1200 \\ 3000x_1 + 1000x_2 + 2000x_3 = 1250 \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 1,20 & \neg -2 & \neg -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,25 & \swarrow & | \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,25 & \swarrow & \swarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 1,20 \\ 5x_2 + x_3 = 1,15 \\ 11x_2 + x_3 = 2,35 \end{cases} \quad (-1) \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 1,20 \\ 5x_2 + x_3 = 1,15 \\ 6x_2 = 1,20 \end{cases}$$

$$x_2 = 0,2; \quad x_3 = 1,15 - 5 \cdot 0,2 = 0,15; \quad x_1 = 1,2 - 4 \cdot 0,2 - 0,15 = 0,25.$$

Виразимо одержані значення невідомих в процентах і запишемо відповідь.

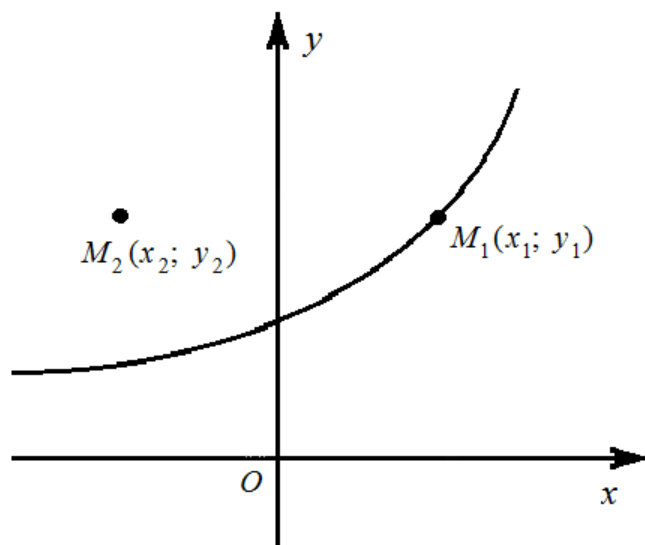
$$x_1 = 25\% \quad x_2 = 20\% \quad x_3 = 15\%.$$

Відповідь: Перший банк виплачує вкладнику 25%, другий – 20%, а третій – 15% річних.

II. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

1. ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ задає на площині лінію, якщо координати кожної точки, що лежать на цій лінії задовольняють даному рівнянню і не задовольняють цьому рівнянню координати точок, що на цій лінії не лежать.



$$F(x_1, y_1) \equiv 0;$$

$$F(x_2, y_2) \neq 0.$$

Рис. 1.

Пряма лінія задається рівнянням першого степеня:

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

де A, B, C – задані числа; A і B одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння (1) називається **загальним рівнянням прямої**.

Якщо в рівнянні (1) $B \neq 0$, то його можна подати у вигляді

$$y = kx + b, \quad (2)$$

яке називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

Як відомо зі шкільного курсу математики тут $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатною віссю Ox (тобто кут, утворений поворотом проти годинникової стрілки осі Ox до суміщення з прямою), b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy (рис. 2а).

При $k = 0$ одержуємо пряму $y = b$, яка паралельна осі Ox (рис. 2б).

Якщо $B = 0$, а $A \neq 0$, то рівняння (1) матиме вигляд $x = c$ і описує пряму паралельну осі Oy , яка перетинає вісь Ox при $x = c$ (рис. 2в).

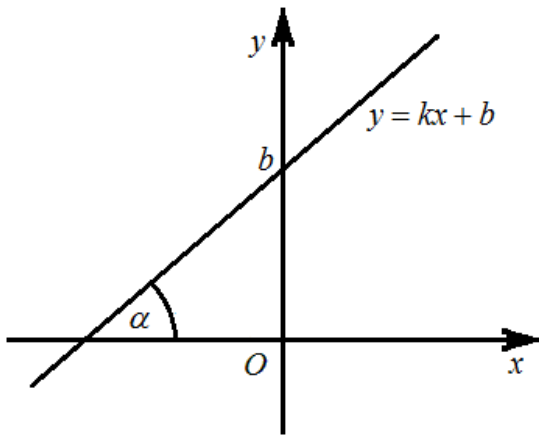


Рис. 2а

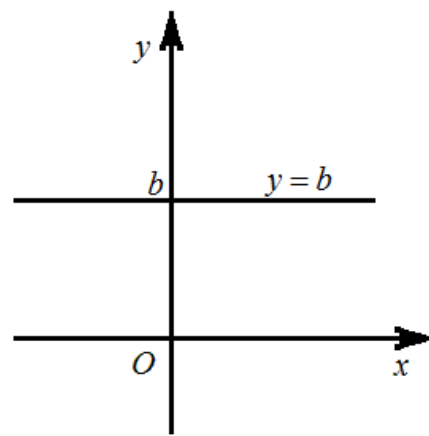


Рис. 2б

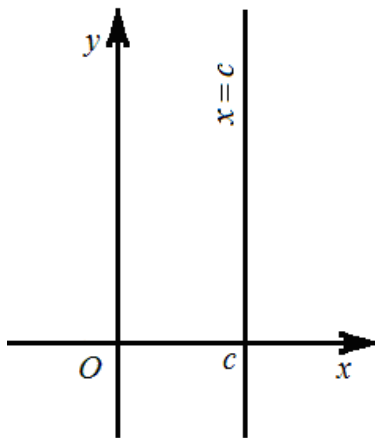


Рис. 2в

Щоб зобразити на рисунку пряму задану рівнянням (1) чи (2), потрібно знайти координати двох точок, які лежать на даній прямій, зобразити ці точки на координатній площині і провести через ці точки пряму лінію.

Приклади. Зобразити на рисунку прямі, які задані рівняннями:

1) $3x - 2y + 6 = 0$; 2) $y = 2$;

3) $x = -3$.

Розв'язування. 1) $3x - 2y + 6 = 0$.

Знайдемо точки перетину цієї прямої з осями координат:

x	0	-2
y	3	0

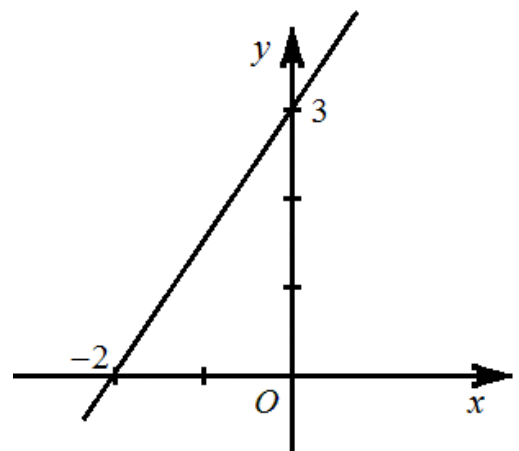


Рис. 3а

Зобразимо ці точки на координатній площині і проведемо через них пряму (рис. 3а).

2) $y = 2$. Це рівняння прямої, яка паралельна осі Ox і перетинає вісь Oy при $y = 2$ (рис. 3б).

3) $x = -3$. Дане рівняння описує пряму, яка паралельна осі Oy і перетинає вісь Ox при $x = -3$ (рис. 3в).

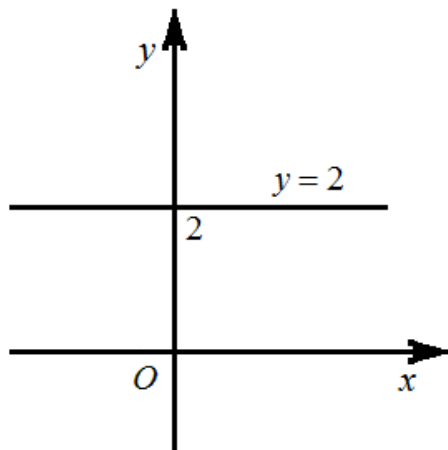


Рис. 3б

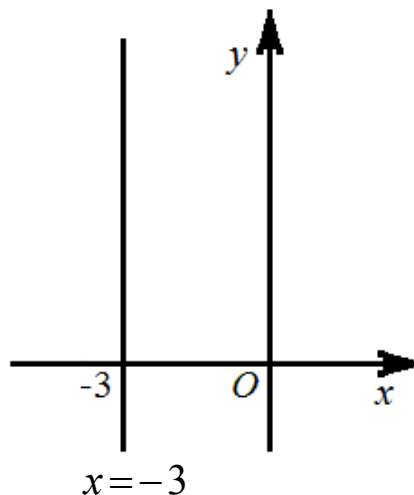


Рис. 3в

Задача 1. Знайти кут φ між прямими (l_1) : $y = k_1x + b_1$ та (l_2) : $y = k_2x + b_2$.

Розв'язання. Зобразимо дані прямі на рисунку (рис.4). Позначимо через φ кут між даними прямими.

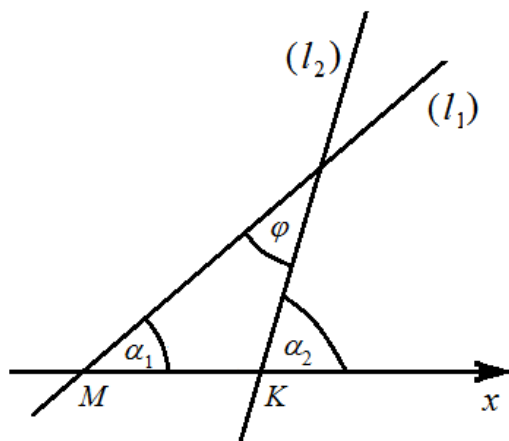


Рис. 4.

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Очевидно, що $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \Rightarrow \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} = \\ &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Отже, для визначення кута між прямими

$$\text{маємо формулу} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (4)$$

Тут φ – кут, на який треба повернути проти годинникової стрілки пряму (l_1) , щоб вона співпала з (l_2) .

Зауважимо, що якщо розглядати кут між прямими, не враховуючи яким чином здійснюється поворот, то при $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ми одержимо менший (гострий) кут, а при $\operatorname{tg} \alpha < 0$ – більший (тупий) кут між цими прямими.

З формули (4) одержимо **умови паралельності та перпендикулярності прямих.**

$$(l_1) \parallel (l_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

$$\text{Маємо:} \quad (l_1) \parallel (l_2) \Leftrightarrow k_1 = k_2. \quad (5)$$

Прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти співпадають.

$$(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi \text{ не існує} \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0. \text{ Звідки}$$

$$(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (6)$$

Прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює мінус одиниці.

Наведемо формулу для обчислення **відстані від точки** $M_0(x_0; y_0)$ **до прямої, заданої рівнянням** $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (7)$$

Приклади.

№ 1. Знайти кут, який утворюють прямі (l_1) : $x - y + 5 = 0$ та

$$(l_2): x + \sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0 \text{ з додатною віссю } Ox.$$

Розв'язування. В рівнянні прямої виду $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k , чисельно дорівнює тангенсу кута, який утворює пряма з додатною віссю Ox . Запишемо рівняння заданих прямих у вигляді прямої з кутовим коефіцієнтом.

$$(l_1): y = x + 5; \quad (l_2): y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \sqrt{\frac{5}{3}}, \text{ звідки } k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \alpha_1 = 1, \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \Rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}. \text{ Це означає, що поворот від}$$

додатної осі Ox до прямої (l_2) здійснюється за годинниковою стрілкою. Тоді

кут повороту від додатної півосі Ox до прямої проти годинникової стрілки

$$\text{дорівнює } -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} +$$

Відповідь: Пряма (l_1) перетинає вісь Ox під кутом 45° , а пряма (l_2) утворює з додатною віссю Ox кут 120° .

Самостійно. Знайти кут, який утворює пряма $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$ додатною віссю Ox .
Відповідь: 60° .

№ 2. Знайти кут між прямими (l_1) : $2x + y + 5 = 0$ та (l_2) : $3x - y - 2 = 0$.

Розв'язування. Запишемо рівняння даних прямих у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і використаємо формулу (4).

$$(l_1): y = -2x - 5, \Rightarrow k_1 = -2;$$

$$(l_2): y = 3x - 2, \Rightarrow k_2 = 3.$$

$$\text{Тоді } \operatorname{tg} \varphi = \frac{3 + 2}{1 - 6} = -1, \text{ звідки } \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Тут від'ємне значення кута φ означає, що гострий кут між (l_1) і (l_2) це кут повороту від (l_1) до (l_2) за годинниковою стрілкою. А сам гострий кут дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: Кут між заданими прямими дорівнює $\frac{\pi}{4}$

Самостійно.

Знайти кут між прямими (l_1) : $x + y + 3 = 0$ та (l_2) : $2x - y - 4 = 0$.

Відповідь: $\varphi = \operatorname{arctg}(-3) = -\operatorname{arctg} 3$.

№ 3. Записати рівняння прямої (l_2) , яка проходить через точку $M_0(2; -3)$ паралельно прямій (l_1) : $2x - 4y + 3 = 0$.

Розв'язування. Будемо шукати рівняння прямої (l_2) у вигляді $y = k_2x + b_2$.

Оскільки (l_2) має бути паралельною (l_1) , то, згідно (5), $k_2 = k_1$. Знайдемо k_1

$$\text{з рівняння } (l_1). \quad 4y = 2x + 3; \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}; \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}.$$

Тоді $(l_2): y = \frac{1}{2}x + b_2.$ (*)

Значення b_2 знайдемо використовуючи те, що шукана пряма проходить через точку $M_0(2; -3)$. Тоді координати точки M_0 задовольняють рівняння (*).

Маємо: $-3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b_2; \Rightarrow b_2 = -4.$

Отже, (l_2) має вигляд: $y = \frac{1}{2}x - 4$, або $x - 2y - 8 = 0$.

Відповідь: $x - 2y - 8 = 0$.

№ 4. Перевірити, чи будуть перпендикулярними прямі

$(l_1): 3x - y - 4 = 0$ і $(l_2): 2x + 6y - 7 = 0$.

Розв'язування. Згідно (6), $(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

З рівняння (l_1) $3x - y - 4 = 0, \Rightarrow y = 3x - 4; \Rightarrow k_1 = 3$.

З рівняння (l_2) $2x + 6y - 7 = 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}; \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}$.

Тоді $k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. Умова (6) виконується.

Відповідь: $(l_1) \perp (l_2)$.

Самостійно.

№1. Перевірити, чи будуть паралельними прямі

а) $(l_1): x - 2y - 6 = 0$ і $(l_2): 6x + 3y - 7 = 0$.

б) $(l_1): x - 2y - 6 = 0$ і $(l_3): 2x - 4y - 1 = 0$.

Відповідь: а) ні; б) так.

№2. Перевірити, чи будуть перпендикулярними прямі

а) $(l_1): x - 2y - 6 = 0$ і $(l_2): 6x + 3y - 7 = 0$.

б) $(l_1): x - 2y - 6 = 0$ і $(l_3): 2x + 3y - 4 = 0$.

Відповідь: а) так; б) ні.

№3. Записати рівняння прямих, що проходять через точку

$$M_0(-2; 1): \text{ а) паралельно прямій } (l_1): 3x - 2y + 3 = 0.$$

б) перпендикулярно цій прямій.

Відповідь: а) $3x - 2y + 8 = 0$; б) $2x + 3y + 1 = 0$

№ 5. Знайти значення параметра m за якого прямі

$$(l_1): 3x - my - 5 = 0 \quad \text{та} \quad (l_2): 2x + 6y + 1 = 0 \quad \text{будуть:}$$

а) паралельними; б) перпендикулярними.

Розв'язування. Використаємо умови паралельності та перпендикулярності прямих, заданих рівняннями $(l_1): y = k_1x + b_1$, $(l_2): y = k_2x + b_2$:

а) $(l_1) \parallel (l_2) \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Зведемо задані рівняння до виду з кутовим коефіцієнтом.

$$(l_1): 3x - my - 5 = 0 \Rightarrow my = 3x - 5 \Rightarrow y = \frac{3}{m}x - \frac{5}{m}, \Rightarrow k_1 = \frac{3}{m}.$$

$$(l_2): 2x + 6y + 1 = 0 \Rightarrow 6y = -2x - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}, \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{3}{m} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -9.$$

б) $(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$. У нас $k_1 \cdot k_2 = \frac{3}{m} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{m}$. Тоді має

виконуватись рівність $-\frac{1}{m} = -1$, звідки $m = 1$.

Відповідь: в) $(l_1) \parallel (l_2)$ при $m = -9$; б) $(l_1) \perp (l_2)$ при $m = 1$.

Самостійно. Знайти значення параметра m за якого прямі

$$(l_1): 3x - 4y - 5 = 0 \quad \text{та} \quad (l_2): mx + 2y + 1 = 0 \quad \text{будуть:}$$

а) паралельними; б) перпендикулярними.

Відповідь: а) $m = -\frac{3}{2}$; б) $m = \frac{8}{3}$.

№ 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2; -1)$ та $M_2(5; 3)$.

Розв'язування. Будемо шукати рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$. Використаємо те, що пряма проходить через задані точки M_1 і M_2 . Це означає, що координати точок M_1 і M_2 задовольняють рівняння прямої.

Підставивши координати точок M_1 і M_2 в рівняння $y = kx + b$, одержимо

$$\text{систему } \begin{cases} -1 = k \cdot 2 + b \\ 3 = k \cdot 5 + b \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему знайдемо значення k і b .

$$\begin{cases} 2k + b = -1 \\ 5k + b = 3 \end{cases}; \Rightarrow 3k = 4, \Rightarrow k = \frac{4}{3},$$

$$\text{тоді } 2 \cdot \frac{4}{3} + b = -1, \Rightarrow b = -\frac{11}{3}.$$

$$\text{Маємо } y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}, \text{ або } 4x - 3y - 11 = 0.$$

$$\text{Відповідь: } 4x - 3y - 11 = 0.$$

Самостійно. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки

$$M_1(3; 2) \text{ та } M_2(-4; 1).$$

$$\text{Відповідь: } x - 7y + 11 = 0.$$

№ 7. Знайти точки перетину прямих $(l_1): 3x + 2y - 4 = 0$ та

$$(l_2): 2x - 5y - 9 = 0.$$

Розв'язування. Точка перетину прямих належить кожній з цих прямих. Отже, координати цієї точки задовольняють рівнянням цих прямих, тобто є розв'язком системи рівнянь, які описують дані прямі.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 5y - 9 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 & | \cdot 5 \\ 2x - 5y = 9 & | \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 10y = 20 \\ 4x - 10y = 18 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 19x = 38 \end{cases} &, \text{ звідки } x = 2, \quad y = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } (2; -1).$$

Самостійно. Знайти точки перетину прямих $(l_1): x + 2y - 5 = 0$ та

$$(l_2): 3x - y - 1 = 0.$$

$$\text{Відповідь: } (1; 2).$$

№ 8. Знайти відстань від точки $M(2; -1)$ до прямої $y = 2x - 9$.

Розв'язування. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, можна обчислити за формулою (7):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Зведемо рівняння заданої прямої до загального виду. $y = 2x - 9, \Rightarrow$ одержимо: $2x - y - 9 = 0$. Тоді

$$d = \left| \frac{2 \cdot 2 - (-1) - 9}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} = 0,8\sqrt{5}.$$

Відповідь: $d = 0,8\sqrt{5}$.

Самостійно. Знайти відстань від точки $M(-3; 4)$ до прямої $y = 3x + 3$.

Відповідь: $d = \sqrt{10}$.

№ 9. Задано вершини трикутника ABC : $A(-1; 2)$, $B(3; -4)$, $C(1; -2)$.

Записати рівняння висоти AK та медіани AN цього трикутника.

Розв'язування.

1) Висота AK перпендикулярна до сторони BC . Тоді $k_{AK} \cdot k_{BC} = -1$. Знайдемо кутовий коефіцієнт сторони BC . Якщо подати рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$, то враховуючи, що координати точок B та C задовольняють дане рівняння, одержимо

$$\begin{cases} -4 = 3k + b \\ -2 = k + b \end{cases}, \Rightarrow k_{BC} = -1.$$

Оскільки $k_{AK} \cdot (-1) = -1$, одержимо $k_{AK} = 1$.

Отже, рівняння висоти AK має вигляд $y = x + b$. Пряма AK проходить через точку A . Тоді $2 = -1 + b$, звідки $b = 3$, а **рівняння висоти AK** буде таким: $y = x + 3$.

2) Медіана AN з'єднує точку A та середину відрізка CB . Як відомо зі шкільного курсу математики, координати точки $M_0(x_0; y_0)$, яка є серединою відрізка, що з'єднує точки $M_1(x_1; y_1)$, та $M_2(x_2; y_2)$, обчислюються за

формулами: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$

Тоді $x_N = \frac{1+3}{2} = 2$; $y_N = \frac{-2-4}{2} = -3$. Отже, маємо дві точки, через які проходить шукана медіана, рівняння якої шукаємо у вигляді $y = kx + b$.

Для визначення значень k та b маємо систему

$$\begin{cases} 2 = -k + b \\ -3 = 2k + b \end{cases} \Rightarrow 3k = -5, \Rightarrow k = -\frac{5}{3}, \quad b = \frac{1}{3}.$$

Отже, **рівняння медіани** має вигляд $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$, або $5x + 3y - 1 = 0$.

Відповідь: $y = x + 3$ рівняння висоти АК,
 $5x + 3y - 1 = 0$ рівняння медіани АN.

Самостійно. Задано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(-1; 4)$, $B(0; -1)$, $C(2; -2)$, $D(4; 3)$.

- 1) Перевірити, чи є цей чотирикутник паралелограмом;
- 2) Записати рівняння висоти, опущеної з точки D на сторону AB ;
- 3) Записати рівняння прямої, що проходить через середи сторін AB та AD .

Відповідь: 1) ні; 2) $x - 5y + 11 = 0$; 3) $x - y + 2 = 0$.

Теоретичні питання для самоперевірки.

1. Який вигляд має:
 - а) загальне рівняння прямої;
 - б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом;
 - в) рівняння прямої паралельної осі Ox ;
 - г) рівняння прямої паралельної осі Oy .
2. Геометричний зміст коефіцієнтів " k " та " b " в рівнянні прямої $y = kx + b$.
3. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
4. Формула для знаходження кута між прямими.
5. Формула для знаходження відстані від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Вправи для самостійного розв'язання

№1. Перевірити, чи проходять прямі (l_1) : $2x - 3y + 5 = 0$;

(l_2) : $y = -3x + 4$; (l_3) : $y = 2$; та (l_4) : $x = 1$ через точки

$M_1(2; 0)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(1; 1)$, $M_4(-1; 2)$, $M_5(0; 4)$.

№2. Перевірити, чи лежать точки $M_1(2; -2)$, $M_2(1; -1)$

на прямих $(l_1): 2x - 3y - 5 = 0$; та $(l_2): y = -3x + 4$.

№3. Записати рівняння прямої $y = -\frac{1}{2}x + 4$ в загальному вигляді.

№4. Записати рівняння прямої $2x - 5y + 4 = 0$ у вигляді з кутовим коефіцієнтом.

№5. Зобразити на рисунку прямі, задані рівняннями

а) $y = 3x - 2$; б) $2x + 4y - 7 = 0$; в) $y = -1$; г) $x = 2.5$.

№6. Перевірити, чи будуть паралельними прямі :

а) $(l_1): y = -x + 3$ та $(l_2): 2x + 2y - 7 = 0$;

б) $(l_3): 2x - 3y + 7 = 0$ та $(l_2): 2x + 2y - 7 = 0$.

№7. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; 3)$

паралельно прямій: а) $(l_1): y = -x + 3$; б) $(l_2): 2x - 3y + 7 = 0$;

в) $(l_3): x = 1$; г) $(l_4): y = -2$.

№8. Перевірити, чи будуть перпендикулярними прямі :

а) $(l_1): y = -3x + 3$ та $(l_2): x + 3y - 7 = 0$;

б) $(l_3): 2x - 3y + 5 = 0$ та $(l_2): 3x + 2y - 9 = 0$.

№9. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $N(-4; 5)$

перпендикулярно прямій : а) $(l_1): y = \frac{1}{3}x + 2$; б) $(l_2): y = 3$;

в) $(l_3): 2x - 5y + 4 = 0$; г) $(l_4): x = -1$.

№10. Записати рівняння прямої, яка

а) проходить через дві задані точки $M_1(4; -2)$ та $M_2(3; 0)$;

б) перетинає осі координат в точках $C(0; 4)$ і $D(-8; 0)$.

- №11.** Знайти точки перетину прямих $(l_1): y = 2$ та $(l_2): 2x + 5y - 10 = 0$
 а) з віссю Ox ; б) з віссю Oy ; в) з прямою $(l_3): 2x - y - 4 = 0$.
- №12.** Знайти кут, який утворюють прямі $(l_1): y = -x + 3$;
 $(l_2): x - y - 4 = 0$; $(l_3): \sqrt{3}x + 3y - 5 = 0$
 а) з додатною віссю Ox ; б) з додатною віссю Oy .
- №13.** Вияснити, чи є серед заданих прямих (l_1) , (l_2) та (l_3) паралельні, або перпендикулярні прямі, якщо $(l_1): x + 2y + 5 = 0$;
 $(l_2): y = 2x - 1$; $(l_3): 6x - 3y + 4 = 0$.
- №14.** Знайти кут між прямими (l_1) та (l_2) , якщо:
 а) $(l_1): y = 0,5x + 1$; $(l_2): 2x + y - 5 = 0$;
 б) $(l_1): y = -\frac{1}{3}x + 4$; $(l_2): 2x + 3y - 5 = 0$;
 в) $(l_1): y = -\frac{1}{2}x - 6$; $(l_2): 3x + 6y - 7 = 0$.
- №15.** Задано вершини трикутника ABC : $A(-5; 2)$, $B(0; -4)$, $C(2; 1)$.
 Знайти: а) рівняння сторони AB ;
 б) рівняння висоти CK , опущеної з вершини C на сторону AB ;
 в) рівняння медіани BM ;
 г) рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно AB ;
 д) координати точки перетину висоти CK і медіани BM .
- Відповіді.**
- №1.** (l_1) проходить через точку M_2 ;
 (l_2) проходить через точки M_3 , M_5 ;
 (l_3) проходить через точку M_4 ;
 (l_4) проходить через точку M_3 ;

№2. $M_1 \notin (l_1)$, $M_1 \in (l_2)$, $M_2 \in (l_1)$, $M_2 \notin (l_2)$.

№3. $x + 2y - 8 = 0$.

№4. $y = 0,4x + 0,8$.

№6. l_1 паралельна l_2 ; l_2 не паралельна l_3 .

№7. а) $y = -x + 5$; б) $2x - 3y + 5 = 0$; в) $x = 2$; г) $(l_4): y = 3$.

№8. а) ні; б) так: $l_3 \perp l_2$.

№9. а) $y = -3x - 7$; б) $x = -4$; в) $5x + 2y + 10 = 0$; г) $(l_4): y = 5$.

№10. а) $2x + y - 6 = 0$; б) $x - 2y + 8 = 0$.

№11. а) $(l_1):$ не перетинає, $(l_2): (5; 0)$;

б) $(l_1): (0; 2)$, $(l_2): (0, 2)$;

в) $(l_1): (3; 2)$, $(l_2): (2,5; 1)$.

№12. $(l_1):$ а) -45° ; б) 135° ; $(l_2):$ а) 45° ; б) -45° ;

$(l_3):$ а) -30° ; б) 120° .

№13. $l_1 \perp l_2$; $l_2 \parallel l_3, \Rightarrow l_1 \perp l_3$.

№14. а) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) $\varphi = \arctg\left(\frac{3}{11}\right)$; в) $\varphi = 0$.

№15. а) $6x + 5y + 20 = 0$; б) $5x - 6y - 4 = 0$;

в) $11x + 3y + 12 = 0$; г) $6x + 5y - 17 = 0$;

д) $\left(-\frac{20}{27}; -\frac{104}{81}\right)$.

2. АЛГЕБРАЇЧНІ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальне рівняння алгебраїчної лінії другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (8)$$

де A, B, C, D, E, F – задані числа, причому A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Таке рівняння задає одну з ліній: коло, еліпс, гіперболу, параболу.

2.1. Коло.

Означення. **Колом** називається множина (геометричне місце) точок площини відстань до яких від фіксованої точки (яка називається центром) є величина стала (ця величина називається радіусом кола).

Канонічне рівняння кола радіуса R з центром в точці $O(0; 0)$ має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (\text{рис. 5}) \quad (9)$$

а з центром в точці $C(x_0; y_0)$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. (рис. 6) (10)

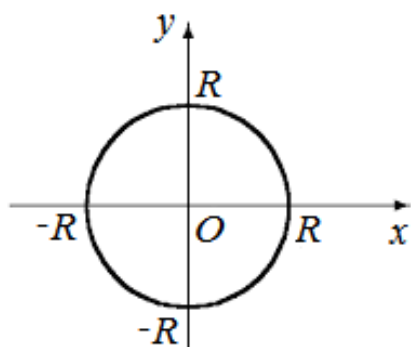


Рис. 5.

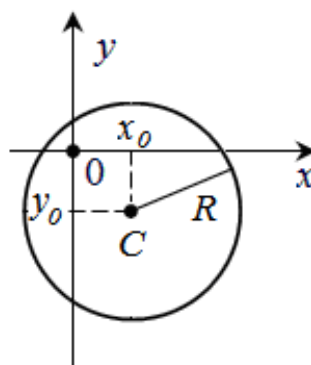


Рис. 6.

Приклад № 1. Записати рівняння кола з центром в точці $C(5; 0)$, радіус якого дорівнює 6.

Розв'язування. Використаємо рівняння (10). В нашому прикладі $x_0 = 5$, $y_0 = 0$, $R = 6$. Маємо: $(x - 5)^2 + y^2 = 6^2$.

Відповідь: $(x - 5)^2 + y^2 = 36$.

Самостійно. Записати рівняння кола з центром в точці

- а) $C(0; 0)$ радіус якого дорівнює 4;
- б) $C(0; 2)$ радіус якого дорівнює 3;
- в) $C(1; 0)$ радіус якого дорівнює 5;

г) $C(-3; 4)$ радіус якого дорівнює 2.

Відповідь: а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$ в) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$;
г) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Приклад № 2. Зобразити на рисунку коло, задане рівнянням:

а) $x^2 + y^2 = 4$;

б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$;

в) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$.

Розв'язування.

а) $x^2 + y^2 = 4$ – це рівняння кола з центром в точці $O(0; 0)$, радіус якого $R = 2$ (рис. 7).

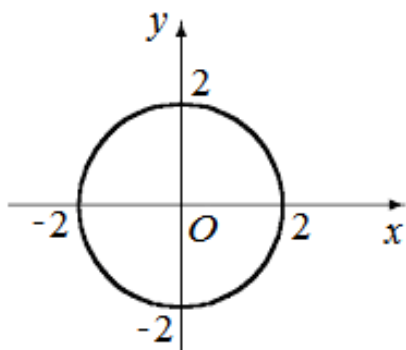


Рис. 7.

б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ – це рівняння кола з центром в точці $C(1; -2)$, радіус якого $R = 3$ (рис. 8).

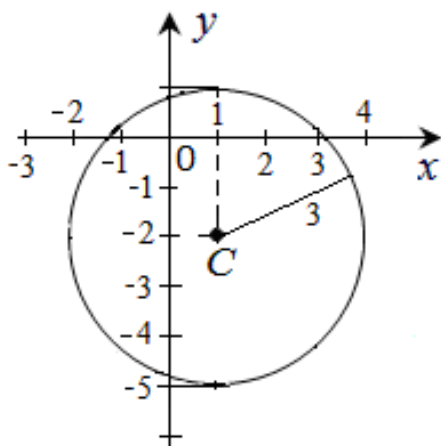


Рис. 8.

в) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = 0$.

Щоб знайти координати центра та радіус цього кола, виділимо повний квадрат $((x \pm m)^2 = x^2 \pm 2mx + m^2)$ по змінним x та y .

$$x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4,$$

$$y^2 - 6y = y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 - 3^2 = (y - 3)^2 - 9.$$

Підставимо ці вирази в задане рівняння: $(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 3 = 0$, звідки $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$. Це рівняння кола виду (10).

Отже центр $C(-2; 3)$, радіус $R=4$ (рис. 9).

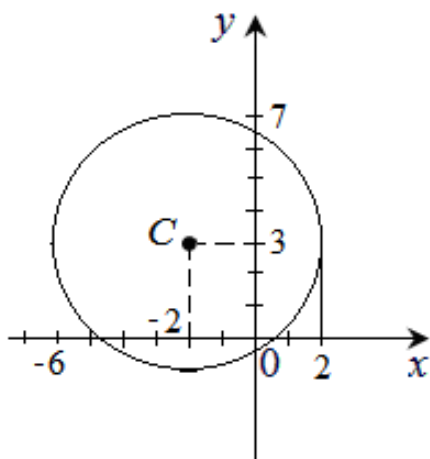


Рис. 9.

Самостійно.

Записати координати центра, значення радіуса та зобразити на рисунку коло задане рівнянням:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; в) $x^2 + 8x + y^2 + 7 = 0$.

Відповіді: а) $O(0; 0)$ – центр, радіус $R = 5$;

б) центр $C(0; 2)$, радіус $R = 2$; в) центр $C(-4; 0)$, радіус $R = 3$.

2.2. Еліпс.

Означення. **Еліпсом** називається множина точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є величина стала (яка позначається $2a$).

Якщо осі прямокутної декартової системи координат вибрано так, що фокуси еліпса знаходяться на осі Ox і симетричні відносно початку координат $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, то рівняння такого еліпса буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (11)$$

Тут через $2a$ позначено суму відстаней від будь-якої точки еліпса до його фокусів, тобто, за означенням, $F_1M + F_2M = 2a$, а $b^2 = a^2 - c^2$.

Еліпс, заданий рівнянням (11), перетинає вісь Ox при $x = \pm a$, а вісь Oy при $y = \pm b$ (переконайтесь самостійно), а точка $O(0; 0)$ центр цього еліпса.

Рівняння (11) називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Еліпс, заданий рівнянням (11) зображено на (рис. 10).

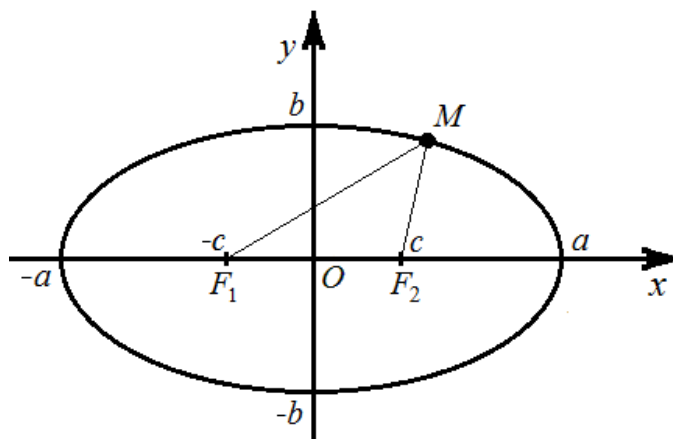


Рис. 10.

Зауваження. Якщо $a = b = R$, то рівняння (11) матиме вигляд $x^2 + y^2 = R^2$, а це є **рівняння кола** радіуса R , центр якого співпадає з початком координат (дивись рівняння 8).

На рис.11 зображено еліпс фокуси якого розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат: $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, а $F_1M + F_2M = 2b$. Тоді $a^2 = b^2 - c^2$ ($b > a$).

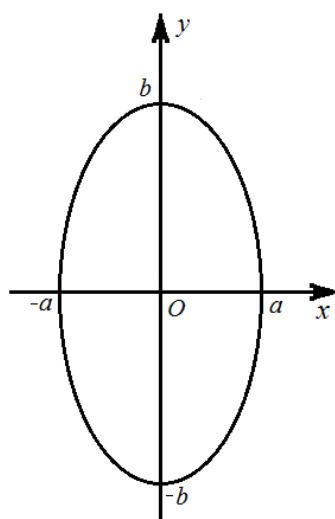


Рис. 11.

Якщо центр еліпса знаходиться в точці $M_0(x_0; y_0)$, а осі еліпса паралельні осям координат, то рівняння еліпса буде мати вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Еліпс, заданий рівнянням (12) у випадку, коли $b > a$, зображено на рис. 12а, а у випадку, коли $a > b$, на рис. 12б;

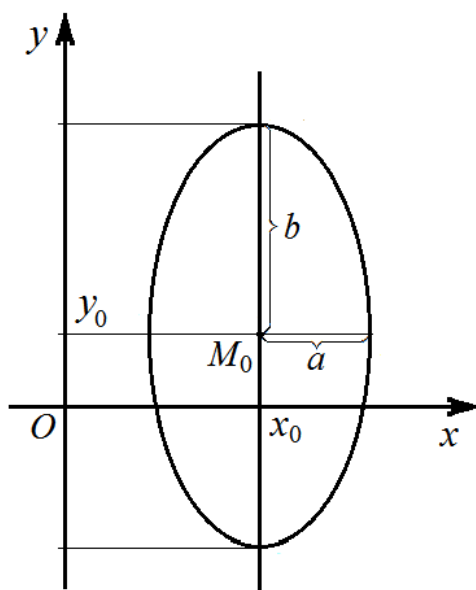


Рис. 12а.

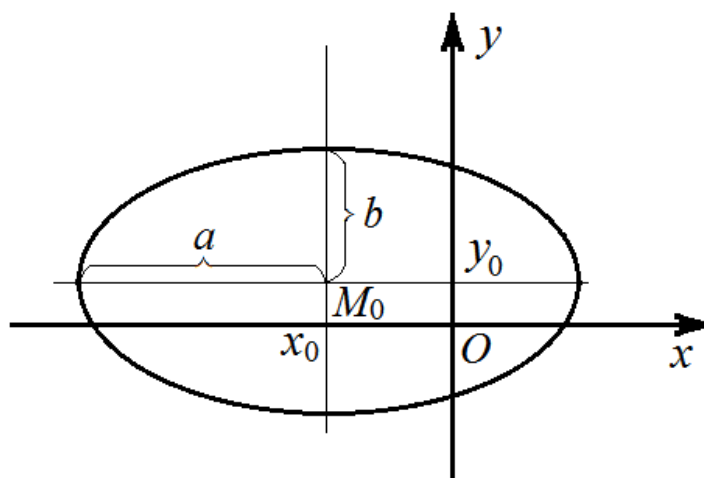


Рис. 12б

Приклад № 3. Зобразити на рисунку еліпси, задані рівняннями

$$1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \text{та} \quad 2) \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Розв'язування.

$$1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Маємо: $C(0; 0)$ – центр еліпса, $a = 3$; $b = 2$. (Рис. 13).

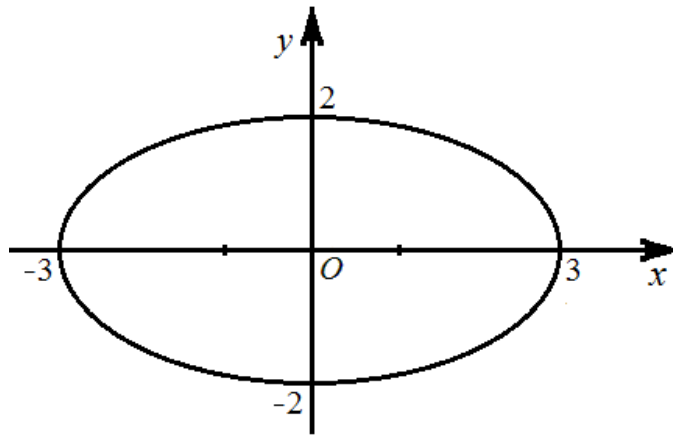


Рис. 13.

$$2) \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Центром цього еліпса є точка $C(2; -1)$, $a = 4$, $b = 3$. (Рис. 14).

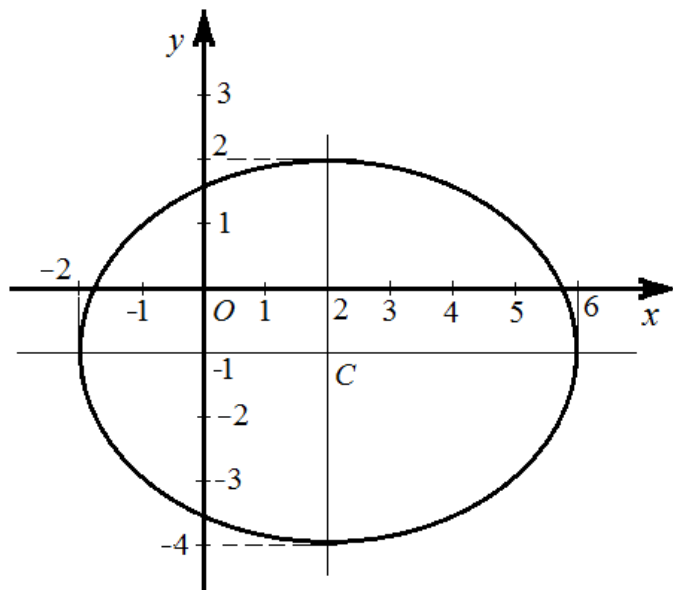


Рис. 14.

Самостійно. Записати координати центра, значення параметрів a і b та зобразити на рисунку еліпси, задані наступними рівняннями:

$$\text{а) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{б) } \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad \text{в) } \frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Відповіді: а) $C(0; 0)$, $a = 4$, $b = 3$; б) $C(3; 0)$, $a = 2$, $b = 5$;
в) $C(-1; 2)$, $a = 6$, $b = 2$.

Приклад № 4. Записати рівняння еліпса з центром в точці $C(-2; 4)$,
півосі якого $a = \sqrt{3}$, $b = 1$.

Розв'язування. Скористаємось рівнянням (12): $\frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$.

Самостійно. Записати рівняння еліпса, центр якого знаходиться в точці
 $C(3; -1)$ і півосі якого $a = 2$, $b = \sqrt{5}$.

Відповідь: $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$.

2.3. Гіпербола.

Означення. **Гіперболою** називається множина (геометричне місце) точок площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є величина стала (яка позначається $2a$).

Якщо осі прямокутної декартової системи координат вибрано так, що фокуси гіперболи знаходяться на осі Ox , симетрично відносно початку координат $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, то канонічне рівняння гіперболи буде мати

$$\text{вигляд} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (13)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

За означенням $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Гіпербола, задана рівнянням (12) перетинає вісь Ox при $x = \pm a$, і не перетинає вісь Oy . Вісь Ox називається **дійсною віссю** цієї гіперболи, а вісь Oy – **уявною**.

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називаються **асимптотами гіперболи**.

Зобразимо гіперболу, задану рівнянням (13) на рис. (15).

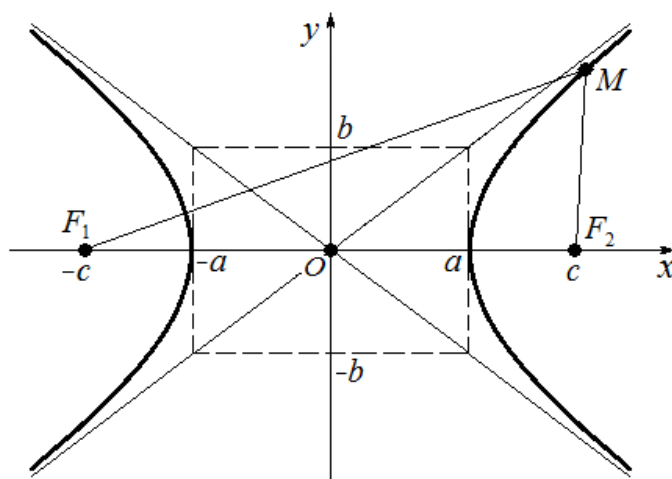


Рис. 15.

Якщо фокуси гіперболи знаходяться на осі Oy симетрично відносно початку координат і різниця відстаней від будь-якої точки гіперболи до її фокусів $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$ дорівнює $2b$, тоді $a^2 = c^2 - b^2$, а рівняння

цієї гіперболи матиме вигляд
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Ця гіпербола зображена на рис. 16. Її дійсною віссю є вісь Oy , а Ox – уявна вісь цієї гіперболи.

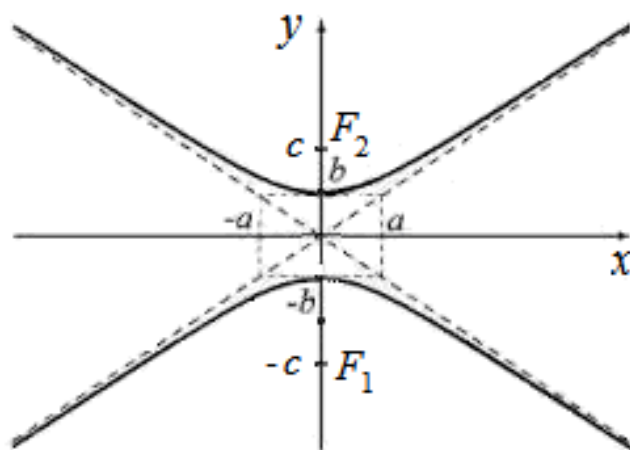


Рис. 16.

Центр гіперболи заданої рівнянням (13) чи (14) знаходиться в точці $O(0; 0)$.

Якщо центр гіперболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, а осі гіперболи паралельні осям координат, то рівняння гіперболи буде мати вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (15)$$

або

$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Приклад № 5. Зобразити на рисунку гіперболи, задані рівняннями

$$1) \quad -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad 2) \quad \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1.$$

Розв'язування

$$1) \quad -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

В цьому рівнянні $a = 3$, $b = 2$, $O(0; 0)$ – центр гіперболи,

Oy – дійсна, а Ox – уявна вісь гіперболи; $y = \pm \frac{2}{3}x$ – рівняння асимптот (рис. 17).

$$2) \quad \frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1.$$

Маємо рівняння гіперболи у якої $a = 4$, $b = 3$, $M_0(1; -3)$ – центр гіперболи. Дійсна вісь цієї гіперболи паралельна осі Ox , а – уявна вісь паралельна Oy . Прямі $y = \pm \frac{3}{5}x$ – асимптоти гіперболи (рис. 18).

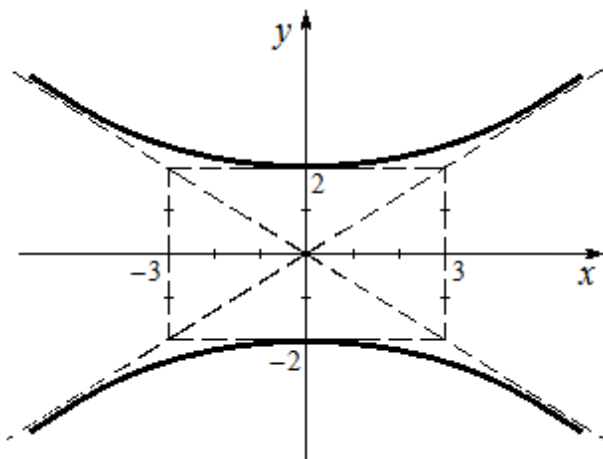


Рис. 17.

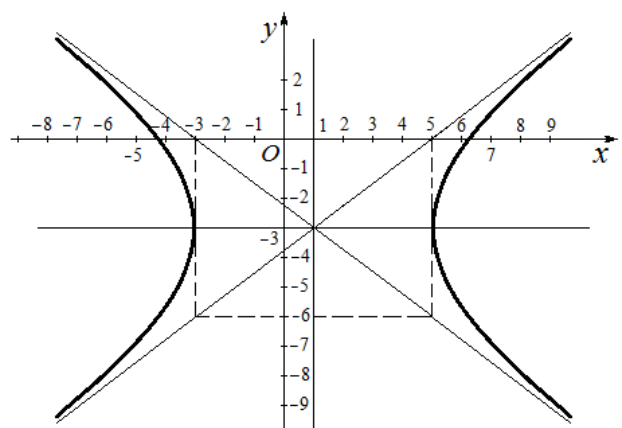


Рис. 18.

Самостійно. . Записати координати центра, значення параметрів a і b , визначити дійсну вісь та зобразити на рисунку гіперболи, які задані наступними

рівняннями: а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, б) $-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Відповіді: а) $C(0; 0)$, $a = 5$, $b = 2$, Ox – дійсна вісь ;

б) $C(1; 0)$, $a = 3$, $b = 3$, Oy – дійсна вісь.

Зазначимо, в шкільному курсі математики вивчалась гіпербола, яка задавалась рівнянням $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$. Осі цієї гіперболи не співпадають з осями координат і не є паралельними осям координат. Рисунок такої гіперболи буде таким:

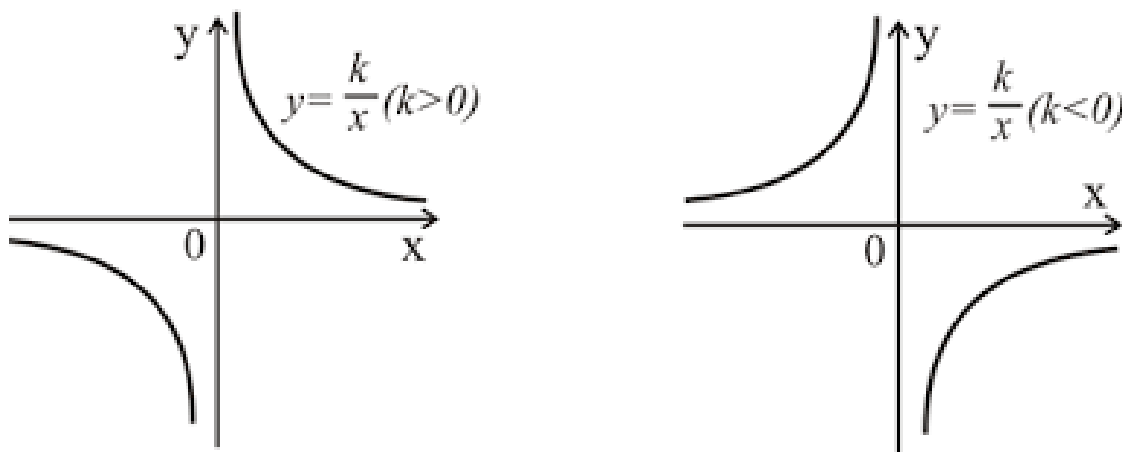


Рис. 19.

2.4. Парабола.

Означення. **Параболою** називається множина (геометричне місце) точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F цієї площини, яка називається **фокусом**, і фіксованої прямої, яка називається **директрисою**.

Якщо осі прямокутної декартової системи координат вибрати так, щоб вісь абсцис проходила через фокус перпендикулярно до директриси і напрямлена до фокуса, а початок координат ділив відстань між директрисою і фокусом навпіл, (цю відстань позначають p ($p > 0$)), то в цій системі координат рівняння параболи буде мати вигляд

$$y^2 = 2px. \quad (17)$$

Ця парабола зображена на рис. 20. Тут $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус,

а $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси.

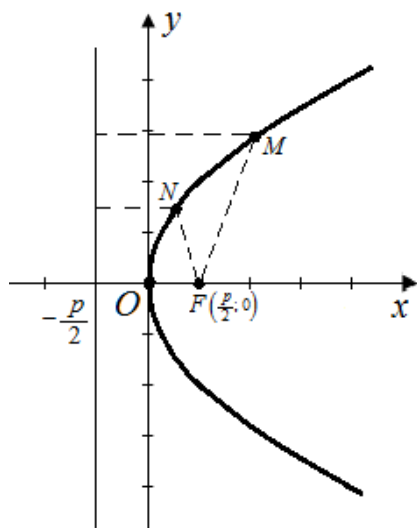


Рис. 20.

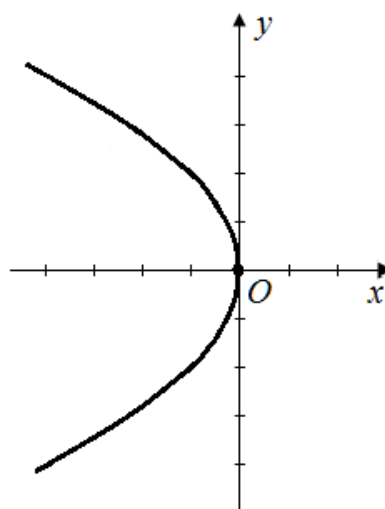


Рис. 21.

У параболи, заданої рівнянням (17) точка $O(0; 0)$ є вершиною, а вісь Ox – віссю параболи.

Якщо вершиною параболи є початок координат, віссю параболи – вісь Ox , але парабола розміщена в лівій півплощині відносно осі Oy (тобто $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, а $x = \frac{p}{2}$ – рівняння директриси), то рівняння такої параболи (рис. 21) буде мати вигляд

$$y^2 = -2px. \quad (18)$$

У випадку коли віссю параболи є вісь Oy , а вершина параболи знаходиться в точці $O(0; 0)$, канонічне рівняння параболи буде мати вигляд ($p > 0$):

$$x^2 = 2py, \quad (19)$$

або

$$x^2 = -2py. \quad (20)$$

Парабола, задана рівнянням (19) зображена на рис. 22, а рівнянням (20) – на рис. 23.

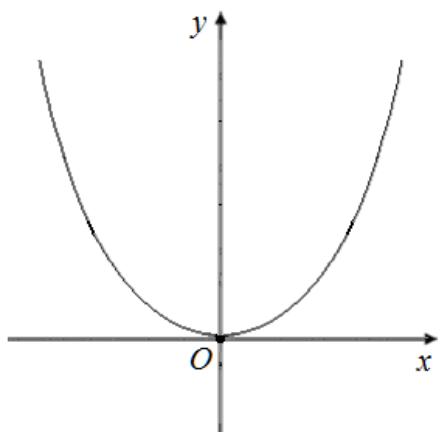


Рис. 22.

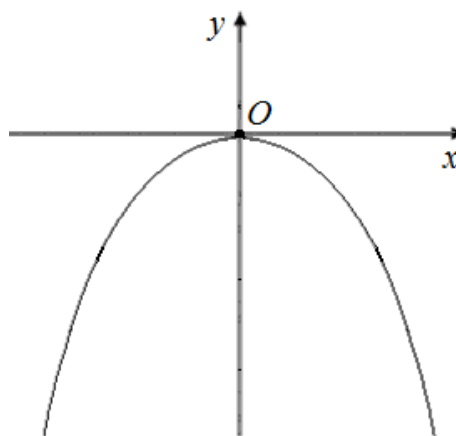


Рис. 23.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $C(x_0; y_0)$, а осі параболи паралельні осям координат, то відповідні рівняння параболи можна подати у вигляді

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \quad (21)$$

або

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (22)$$

Приклад №6.

Зобразити схематично на рисунку параболи, задані рівняннями

а) $x^2 = 2y$;

б) $(y - 2)^2 = -(x + 3)$.

Розв'язування.

а) $x^2 = 2y$,

$C(0; 0)$ – вершина параболи, віссю параболи є вісь Oy , вітки направлені в додатному напрямі осі Oy (рис. 24)

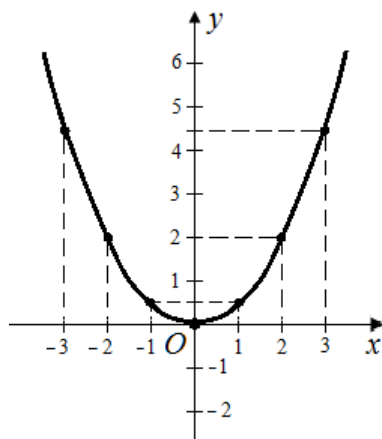


Рис. 24.

б) $(y - 2)^2 = -(x + 3)$,

$C(-3; 2)$ – вершина параболи, вісь параболи – пряма паралельна осі Ox , вітки направлені у від'ємному напрямі осі Ox (рис. 25)

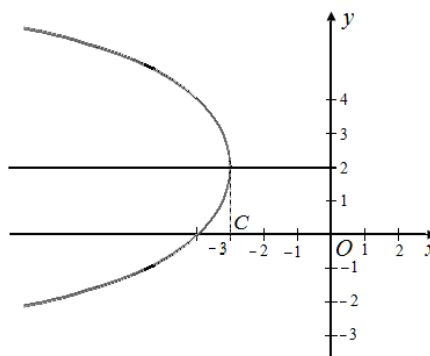


Рис. 25.

Самостійно. Записати координати вершини, координати фокуса, рівняння директриси та зобразити на рисунку параболи, які задані наступними рівняннями:

а) $x^2 = -6y$; б) $y^2 = 8x$; в) $y^2 = -5(x + 2)$; г) $(x - 2)^2 = 4(y + 1)$.

Відповіді:

а) вершина $C(0; 0)$, $F(0; -1,5)$ – фокус; $y = 1,5$ – рівняння директриси;

б) вершина $C(0; 0)$, $F(2; 0)$ – фокус; $x = -2$ – рівняння директриси;

в) вершина $C(-2; 0)$, $F(-0,75; 0)$ – фокус; $x = -3,25$ – рівняння директриси;

г) вершина $C(2; -1)$, $F(2; 0)$ – фокус; $y = 1$ – рівняння директриси.

Зауваження. Якщо проаналізувати канонічні рівняння розглянутих ліній (прямих і кривих), то слід відмітити, що по виду рівняння можна назвати відповідну лінію, а саме:

- 1) якщо рівняння містить обидві змінні тільки в першому, або одну в першому, а іншу в нульовому степені, то це рівняння прямої;
- 2) якщо рівняння містить одну змінну в другому степені, а іншу тільки в першому степені, то це рівняння параболи;
- 3) якщо в рівнянні виду $Ax^2 + By^2 + C = 0$ коефіцієнти при x^2 та y^2 мають різні знаки, то це рівняння гіперболи;
- 4) якщо в рівнянні виду $Ax^2 + By^2 + C = 0$ коефіцієнти при x^2 та y^2 одного знаку, то це буде рівняння кола (при $A = B$, $A \cdot C < 0$), або рівняння еліпса (коли $A \neq B$, $A \cdot C < 0$).
- 5) якщо в рівнянні виду $Ax^2 + By^2 + C = 0$ коефіцієнти A , B , C одного знаку, то дане рівняння не визначає жодної лінії.
- 6) Рівнянні виду $Ax^2 + By^2 = 0$ задає точку $O(0; 0)$, якщо коефіцієнти при x^2 та y^2 одного знаку і дві прямі, якщо вони мають різні знаки.

Приклад №7. Вияснити які лінії задані рівняннями:

а) $3x^2 + 3y^2 - 12 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 + 10 = 0$; в) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$;

г) $16x^2 - 4y^2 + 64 = 0$; д) $2y^2 - 5x = 0$; е) $3x^2 - 6x - 9 = 0$;

є) $x^2 - 6x + 5y - 1 = 0$; ж) $x^2 + 2y^2 = 0$; з) $36x^2 - 64y^2 = 0$.

Розв'язування.

а) $3x^2 + 3y^2 - 12 = 0$.

$A = B = 3$, $C = -12$, $A \cdot C < 0$. Отже маємо рівняння кола. Зведемо це рівняння до канонічного виду.

$3x^2 + 3y^2 = 12$, $\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. Це є канонічне рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $O(0; 0)$, а радіус $R = 2$.

б) $2x^2 + 2y^2 + 7 = 0$.

$A = B = 2$, $C = 7$. Коефіцієнти A , B , C одного знаку. А це означає, що дане рівняння не визначає жодної лінії (випадок 5).

в) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$.

Оскільки $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$, і $A \neq B$, це рівняння еліпса. Зведемо його до канонічного виду.

$2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$; $\Rightarrow 2x^2 + 3y^2 = 6$; $\Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, $\Rightarrow$ еліпс у якого центр знаходиться в точці $O(0; 0)$, $a^2 = 3$, $b^2 = 2$.

г) $16x^2 - 4y^2 + 64 = 0$.

$A > 0$, $B < 0$, $\Rightarrow$ це рівняння гіперболи.

Зведемо дане рівняння до канонічного виду. $16x^2 - 4y^2 = -64$. Розділивши це рівняння на (-64) , одержимо канонічне рівняння гіперболи $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, у якої точка $O(0; 0)$ є точкою симетрії (центром), Oy – дійсна вісь, а Ox – уявна вісь.

д) $2y^2 - 5x = 0$.

Рівняння містить тільки одну змінну другого степені, а іншу в першому степені. Отже це рівняння параболи. Її канонічне рівняння має вигляд $y^2 = 2,5x$. Вершина цієї параболи знаходиться в точці $O(0; 0)$, а вітки направлені в додатному напрямку осі Ox .

е) $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

Рівняння містить тільки одну змінну. Виділимо повний квадрат по цій змінній. $3(x^2 - 2x + 1 - 1 - 3) = 0$, $\Rightarrow (x - 1)^2 = 4$, звідки $x - 1 = \pm 2$.

Отже це рівняння задає дві прямі лінії: $x = 3$, $x = -1$.

є) $x^2 - 6x + 5y - 1 = 0$.

Аналіз рівняння дозволяє зробити висновок, що це рівняння параболи. Зведемо його до канонічного виду.

$$x^2 - 6x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 5y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 = -5y + 10 \Rightarrow (x-3)^2 = -5(y-2).$$

Вершина цієї параболи знаходиться в точці $C(3; 2)$, а вітки направлені в від'ємному напрямку осі Oy .

ж) $x^2 + 2y^2 = 0$.

Дане рівняння вірне тільки при $x = 0, y = 0$.

з) $36x^2 - 64y^2 = 0$.

Дане рівняння задає дві прямі. Дійсно, запишемо його у вигляді $(6x - 8y)(6x + 8y) = 0$, звідки маємо: $6x - 8y = 0, 6x + 8y = 0$.

Самостійно. Вияснити, які лінії задані рівняннями:

а) $2x^2 + 2y^2 - 18 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; в) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$;

г) $16x^2 - y^2 - 4 = 0$; д) $25x^2 - 100 = 0$; е) $y^2 + 2x = 0$; є) $2x = 1$.

ж) $3x^2 - 12y = 0$; з) $18x^2 - 2y^2 = 0$; і) $3x^2 + 7y^2 = 0$; ї) $5x = 1 + 3y$.

Відповіді: а) коло; б) $\emptyset$; в) еліпс; г), е) – гіперболи;
д), з) – рівняння двох прямих; е), ж) – параболи; є) ї) – прямі.

Теоретичні питання для самоперевірки.

1. Канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи з центром

а) в точці $O(0; 0)$; б) а точці $C(x_0; y_0)$.

2. Рівняння асимптот гіперболи, заданої рівняннями

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, б) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Канонічні рівняння, координати фокуса та рівняння директриси параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox , і вітки направлені а) в додатному напрямі осі Ox ;

б) у від'ємному напрямі осі Ox .

4. Канонічні рівняння параболи з вершиною в точці $M_0(x_0; y_0)$, віссю симетрії якої є вісь Ox , і вітки направлені
- а) в додатному напрямі осі Ox ;
 - б) у від'ємному напрямі осі Ox .
5. Канонічні рівняння, координати фокуса та рівняння директриси параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Oy , і вітки направлені
- а) в додатному напрямі осі Oy ;
 - б) у від'ємному напрямі осі Oy .
6. Канонічні рівняння параболи з вершиною в точці $M_0(x_0; y_0)$, віссю симетрії якої є вісь Oy , і вітки направлені
- а) в додатному напрямі осі Oy ;
 - б) у від'ємному напрямі осі Oy .

Приклади для самостійного розв'язування.

№1. З'ясувати, яку лінію задає рівняння і зобразити її на рисунку.

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1;$ | 2) $4x^2 + 9y^2 = 36;$ |
| 3) $x^2 + y^2 = 5;$ | 4) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16;$ |
| 5) $\frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1;$ | 6) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1;$ |
| 7) $-\frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 1;$ | 8) $x^2 - 9y^2 = -9;$ |
| 9) $\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1;$ | 10) $y^2 = -2x;$ |
| 11) $(y - 3)^2 = 5(x + 2);$ | 12) $x^2 = 3y;$ |
| 13) $(x - 1)^2 = 0,5(y + 1);$ | 14) $x^2 = -\frac{3}{2}y.$ |

№2. Записати рівняння асимптот гіпербол, заданих рівняннями

$$\text{а) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad \text{б) } \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

№3. Записати координати вершини, координати фокуса, рівняння директриси парабол, заданих рівняннями

- а) $y^2 = 4x;$
- б) $x^2 = -6(y + 2).$

Відповіді:

№1. 1), 2), 5) – еліпс; 3), 4) – коло; 6), 8), 9) – гіпербола;

10), 11), 12), 13), 14) – парабола; 7) пряма.

№2. а) $y = \pm 2x$; б) $y = \pm \frac{1}{3}x$.

№3. а) $C(0; 0)$ – вершина, $F(1; 0)$ – фокус, $x = -1$ – рівняння директриси;

б) $C(0; -2)$ – вершина, $F(0; -3,5)$ – фокус, $y = -0,5$ – рівняння директриси.

III. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

Розглянемо функцію $y = f(x)$ визначену на деякому проміжку. При кожному значенні x з цього проміжку функція $y = f(x)$ набуває певне значення. Надамо аргументу x деякий приріст Δx (додатний чи від'ємний не має значення). Тоді функція одержить приріст

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ по аргументу x називається границя, до якої прямує відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу довільним чином прямує до нуля.

Таким чином, за означенням

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad (1)$$

$$\text{або} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2)$$

Функція, яка має похідну в точці x називається **диференційовною** в цій точці.

Зауважимо, що для кожного значення x похідна $f'(x)$ приймає певне значення, тобто похідна є також функцією x .

Крім позначення $f'(x)$ використовуються і інші позначення похідної, наприклад: $y'(x)$; y' ; y'_x ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df}{dx}$.

Значення похідної, набуто при $x=a$, позначається $f'(a)$, або $y'|_{x=a}$.

Дія знаходження похідної від функції $f(x)$ називається **диференціюванням** цієї функції.

Задача 1. Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y = 2x - 3$.

Розв'язування. $f(x) = 2x - 3$.

Надамо аргументу x приріст Δx і знайдемо відповідний приріст функції. $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) - 3 - (2x - 3) = 2\Delta x$.

Тоді за означенням похідної $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$.

Самостійно: Знайти похідну функції $y = x^2 + 1$, використовуючи означення похідної.

Відповідь: $y'(x) = 2x$.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ПОХІДНОЇ

Знаходження похідної за означенням є досить об'ємним процесом. Значно простіше знаходити похідну, використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання (одержані із означення похідної), які дають чіткий алгоритм знаходження похідної тієї чи іншої функції.

ОСНОВНІ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Нехай c – стала величина, а $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, які мають похідні в точці x . Тоді:

$$1. (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x); \quad (\text{сталій множник виноситься за знак похідної})$$

$$2. (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (\text{похідна алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі похідних})$$

$$3. (u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad (\text{похідна добутку})$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad (\text{похідна частки})$$

$$\text{зокрема: } \left(\frac{u}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c} \cdot u\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$5. (f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x); \quad (\text{похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції помноженій на похідну внутрішньої функції}).$$

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

1. $c' = 0$;

2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$,

зокрема: $x' = 1$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,

зокрема $(e^x)' = e^x$, ($e \approx 2,71$);

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,

зокрема $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5. $(\sin x)' = \cos x$;

6. $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

8. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Задача 2. Знайти похідну.

№1. $y = 3x^2 - 4x + 5$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned}
 y' &= (3x^2 - 4x + 5)' = \quad (\text{скористаємось правилом 1}) \\
 &= (3x^2)' - (4x)' + (5)' = \quad (\text{використаємо правило 2}) \\
 &= 3(x^2)' - 4(x)' + (5)' = \quad (\text{тепер можна скористатись табличними формулою 2 при знаходженні похідної першого та другого доданків, та формулою 1 для третього доданку}) \\
 &= 3 \cdot 2x^{2-1} - 4x^{1-1} + 0 = 6x - 4.
 \end{aligned}$$

№ 2. $y = \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x} + 8.$

Розв'язування.

$$y' = \left(\frac{5}{x^3} - \frac{3}{x} + 8 \right)' = 5 \left(\frac{1}{x^3} \right)' - 3 \left(\frac{1}{x} \right)' + 8' =$$

(В першому та другому доданках перенесемо "x" в чисельник: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.)

$$= 5(x^{-3})' - 3(x^{-1})' + 8' = 5 \cdot (-3)x^{-3-1} - 3 \cdot (-1)x^{-1-1} = -15x^{-4} + 3x^{-2}.$$

При знаходженні похідної використовувались правила 1, 2 та табличні формули 1, 2.

№ 3. $y = 4\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[4]{x}.$

Розв'язування.

$$y' = \left(4\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[4]{x} \right)' = 4(\sqrt{x})' + 5(\sqrt[3]{x^2})' - 2(\sqrt[4]{x})' =$$

(Запишемо корені у вигляді степеня: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;

$\sqrt{x^k} = x^{\frac{k}{2}}$. Тоді можна буде скористатися табличною формулою 2.)

$$= 4 \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' + 5 \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' - 2 \left(x^{\frac{1}{4}} \right)' = 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} =$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}.$$

№4. $y = 4x^3 - 6\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^6}.$

Розв'язування.

Запишемо дану функцію у вигляді зручному для використання табличної формули 2.

$$y = 4x^3 - 6x^{\left(\frac{5}{3}\right)} + x^{\left(-\frac{1}{2}\right)} - 2x^{(-6)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Тоді } y' &= 4(x^3)' - 6(x^{(5/3)})' + (x^{(-1/2)})' - 2(x^{-6})' = \\
&= 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 6 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{(5/3-1)} - \frac{1}{2} x^{(-1/2-1)} - 2 \cdot (-6) \cdot x^{-6-1} = \\
&= 12x^2 - 5x^{(2/3)} - 0,5x^{(-3/2)} + 12x^{-7}.
\end{aligned}$$

Самостійно.№1 Знайти $y'(x)$:

Відповіді:

1) $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$;

1) $y' = 3x^2 - 8x + 3$;

2) $y = \frac{5}{x^4} - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{3x}$;

2) $y' = \frac{-20}{x^5} + \frac{8}{x^3} - \frac{7}{3x^2}$;

3) $y = 4\sqrt{x^3} - \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}$;

3) $y' = 6\sqrt{x} - x^{-3/5}$;

4) $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{8}{3\sqrt{x^7}}$;

4) $y' = \frac{-20}{3\sqrt[3]{x^7}} + \frac{28}{3\sqrt{x^9}}$;

5) $y = x^5 - \frac{4}{x^4} + \sqrt{x}$;

5) $y' = 5x^4 + \frac{16}{x^5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $y = 2\sqrt[4]{x} - \frac{x^5}{2} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} - 4$;

6) $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5x^4}{2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}$.

№ 5. $y = 3\sin x + 2\operatorname{tg} x - 4^x$.

Розв'язування.

$$y' = (3\sin x + 2\operatorname{tg} x - 4^x)' = 3(\sin x)' + 2(\operatorname{tg} x)' - (4^x)' =$$

(тепер скористаємось табличними інтегралами 5, 7, 3)

$$= 3\cos x + 2 \frac{1}{\cos^2 x} - 4^x \cdot \ln 4.$$

№ 6. $y = 7 \log_2 x - 5 \arccos x + 2$.

Розв'язування.

$$y' = (7 \log_2 x - 5 \arccos x + 2)' = 7(\log_2 x)' - 5(\arccos x)' + 2' =$$

(скористаємось табличними інтегралами 4, 10, 1)

$$= 7 \cdot \frac{1}{x \ln 2} - 5 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{7}{x \ln 2} + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Самостійно.

№2. Знайти $y'(x)$:

Відповіді:

1) $y = 2 \cos x - 3 \ln x - 1$;

1) $y' = -2 \sin x - \frac{3}{x}$;

2) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{3} - 2 \operatorname{arccotg} x$;

2) $y' = \frac{-1}{3 \sin^2 x} + \frac{2}{1+x^2}$;

3) $y = \frac{3 \arcsin x}{5} - 2^x$.

3) $y' = \frac{3}{5 \sqrt{1-x^2}} - 2^x \ln 2$.

№ 7. $y = (x^2 + 1) \cos x$.

Розв'язування.

Остання дія при обчисленні значень цієї функції – множення. Тому використовуємо правило похідної добутку: $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = \left((x^2 + 1) \cdot \cos x \right)' = (x^2 + 1)' \cos x + (x^2 + 1) (\cos x)' =$$

$$= 2x \cdot \cos x - (x^2 + 1) \cdot \sin x.$$

№ 8. $y = \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot 5^x$.

Розв'язування.

Для знаходження похідної даної функції скористаємось правилом диференціювання добутку.

$$y' = \left(\left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot 5^x \right)' = \left(x + \frac{1}{x} \right)' \cdot 5^x + \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot (5^x)' =$$

$$= \left(1 + (x^{-1})'\right) \cdot 5^x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 5^x \cdot \ln 5 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot 5^x + \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 5^x \cdot \ln 5.$$

№ 9. $y = \frac{2 - 3x}{x - 1}.$

Розв'язування.

Тут остання дія ділення. Тому використовуємо правило 4:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2 - 3x}{x - 1}\right)' = \frac{(2 - 3x)'(x - 1) - (2 - 3x)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{-3(x - 1) - (2 - 3x) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{-3x + 3 - 2 + 3x}{(x - 1)^2} = \frac{1}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

№10. $y = \frac{x^4}{\sin x};$

Розв'язування.

Для знаходження похідної даної функції скористаємось правилом диференціювання частки.

$$y' = \left(\frac{x^4}{\sin x}\right)' = \frac{(x^4)' \cdot \sin x - x^4 \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{4x^3 \sin x - x^4 \cos x}{\sin^2 x}.$$

№11. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{5}.$

Розв'язування.

Оскільки в знаменнику число, то при знаходженні похідної цієї функції винесемо сталий множник за знак похідної.

$$y' = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{5}\right)' = \frac{1}{5} (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{5 \cos^2 x}.$$

Самостійно.№3. Знайти $y'(x)$:

Відповіді:

1) $y = (2 - 2^x) \arcsin x$;

1) $y' = -2^x \ln 2 \cdot \arcsin x + \frac{2 - 2^x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

2) $y = \sqrt[3]{x} \lg x$;

2) $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \left(\frac{\lg x}{3} + \frac{1}{\ln 10} \right)$;

3) $y = \frac{x^3 - 7}{5x - 4}$;

3) $y' = \frac{10x^3 - 12x^2 + 35}{(5x - 4)^2}$;

4) $y = \frac{2}{x^2 - 9}$;

4) $y' = \frac{-4x}{(x^2 - 9)^2}$;

5) $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos x}$;

5) $y' = \frac{1 + \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^3 x}$;

6) $y = \frac{1 - \ln x}{x}$;

6) $y' = \frac{\ln x - 2}{x^2}$;

7) $y = \frac{x \sin x}{3}$;

7) $y' = \frac{\sin x + x \cos x}{3}$.

№ 12. $y = \sin 3x$.

Розв'язування.

Дана функція є складеною, оскільки аргумент у синуса не "x", а функція – "3x". Отже, використовуємо правило 5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, де $u = 3x$.

Маємо: $y' = (\sin 3x)' = \cos(3x) \cdot (3x)' = 3 \cos(3x)$.

№ 13. $y = \sin^2 x$.

Розв'язування.

Функція складена. Тепер зовнішня функція – піднесення до квадрата. Тоді $(u^2)' = 2u u'$, де $u = \sin x$.

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

№ 14. $y = \ln(3 - 2x + x^2)$.

Розв'язування.

Складена функція: $y = \ln u$, де $u = 3 - 2x + x^2$;

Скористаємось правилом 5: $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Отже,

$$y' = \left(\ln(3 - 2x + x^2) \right)' = \frac{1}{3 - 2x + x^2} \cdot (3 - 2x + x^2)' = \frac{-2 + 2x}{3 - 2x + x^2}.$$

№ 15. $y = \sqrt{3x - 5}$.

Розв'язування.

Тут: $y = \sqrt{u}$, де $u = 3x - 5$. $\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = \left(\sqrt{3x - 5} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x - 5}} \cdot (3x - 5)' = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}}.$$

№ 16. $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{3 + \cos^2 x}$.

Розв'язування.

Остання дія при обчисленні значення функції – ділення. Згідно правила 3

$$y' = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{3 + \cos^2 x} \right)' = \frac{\left(\sin \frac{x}{2} \right)' (3 + \cos^2 x) - \sin \frac{x}{2} (3 + \cos^2 x)'}{(3 + \cos^2 x)^2} =$$

(при знаходженні похідних функцій $\sin \frac{x}{2}$, $\cos^2 x$ використовуємо правило 5)

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' (3 + \cos^2 x) - \sin \frac{x}{2} \cdot (2 \cos x \cdot (\cos x)')}{(3 + \cos^2 x)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 + \cos^2 x) - \sin \frac{x}{2} \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{(3 + \cos^2 x)^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} (3 + \cos^2 x) + \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x}{(3 + \cos^2 x)^2}.
\end{aligned}$$

Самостійно.Знайти $y'(x)$:

Відповіді:

1) $y = (2 - 5x)^6$;

1) $y' = -30(2 - 5x)^5$;

2) $y = \frac{1}{(x^3 - 5x)^2}$;

2) $y' = \frac{10 - 6x^2}{(x^3 - 5x)^3}$;

3) $y = \sqrt[3]{2x - x^2 + 1}$;

3) $y' = \frac{2 - 2x}{3\sqrt[3]{(2x - x^2 + 1)^2}}$;

4) $y = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x - 3}}$;

4) $y' = \frac{9x^2 - 18x + 7}{(\sqrt{2x - 3})^3}$;

5) $y = x^3 \cdot \cos \frac{2x}{3}$;

5) $y' = 3x^2 \cdot \cos \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}x^3 \cdot \sin \frac{2x}{3}$;

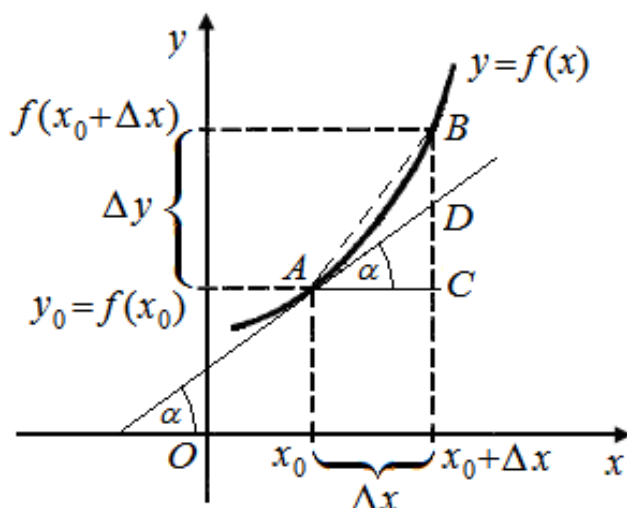
6) $y = \frac{1}{(x^2 - 3x)^3}$;

6) $y' = \frac{9 - 6x}{(x^2 - 3x)^4}$;

7) $y = e^{3x} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x}$;

7) $y' = e^{3x} \left(3 \operatorname{tg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}} \right)$.

3. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ



На кривій $y = f(x)$, що зображена на рисунку, візьмемо точки A та B і проведемо січну AB . Якщо точку B наближати вздовж лінії до точки A , то січна AB повертається навколо точки A до певного граничного положення AD . Очевидно пряма AD є дотичною до лінії в точці A .

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\text{з } \triangle ABC: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle BAC \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} \angle BAC) = \operatorname{tg} (\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \angle BAC) = \operatorname{tg} \angle DAC = \operatorname{tg} \alpha.$$

Похідна функції $y = f(x)$, обчислена в точці x_0 чисельно дорівнює тангенсу кута, який утворює дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , з додатною віссю Ox :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Зауваження. Кут між дотичною і віссю Ox визначається як поворот від додатної півосі Ox до дотичної проти годинникової стрілки.

Задача 1. До кривої $y = -\frac{2}{x}$ проведено дотичну в точці з абсцисою

$x_0 = \sqrt{2}$. Знайти кут нахилу цієї дотичної до додатної півосі Ox .

Розв'язування.

З геометричного змісту похідної випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$, тобто, $k = f'(x_0)$.

$$f'(x) = -2 \left(x^{-1} \right)' = \frac{2}{x^2}, \text{ тоді } k = f'(\sqrt{2}) = 1.$$

Отже, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^\circ$.

Відповідь: Кут нахилу цієї дотичної до додатної півосі Ox дорівнює 45° .

Задача 2. Знайти точку параболи $y = x^2$, в якій дотична нахилена до додатної півосі абсцис під кутом 135° .

Розв'язування.

За геометричним змістом похідної $k = f'(x_0) = 2x_0$. За умовою $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Тоді маємо $2x_0 = -1, \Rightarrow x_0 = -0,5$, $y_0 = (-0,5)^2 = 0,25$.

Відповідь: $(-0,5; 0,25)$.

Задача 3. Знайти точку графіка функції $y = 1 - x^2$, дотична в якій паралельна прямій $y = 2x + 3$.

Розв'язування.

З умови паралельності прямих випливає, що кутовий коефіцієнт шуканої дотичної $k = 2$. Але $k = f'(x_0) = -2x_0$ (геометричний зміст похідної).

З рівності $-2x_0 = 2$ знаходимо $x_0 = -1$. Тоді $y_0 = 1 - (-1)^2 = 0$.

Відповідь: $(-1; 0)$.

Задача 4. Під яким кутом перетинається функція $y = x^3 - 3x^2$ з віссю абсцис в кожній точці перетину.

Розв'язування.

Кутом перетину ліній (l_1) і (l_2) називається кут між дотичними до цих ліній проведених в точці їх перетину.

Знайдемо точки перетину даної функції з віссю Ox .

$$x^3 - 3x^2 = 0, \Rightarrow x^2(x - 3) = 0, \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Скористаємось геометричним змістом похідної: $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0)$.

$$y'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x.$$

$$M_1(0; 0): y'(x_1) = y'(0) = 0. \text{ Маємо } \operatorname{tg} \alpha_1 = 0, \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

$$M_2(3; 0): y'(x_2) = y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 9, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} 9.$$

Відповідь:

В точці $M_1(0; 0)$ функція перетинається з віссю Ox під кутом 0^0 ($M_1(0; 0)$ – точка дотику).

Кут перетину даної функції з віссю Ox в точці $M_2(3; 0)$ $\alpha_2 = \arctg 9$.

Самостійно.

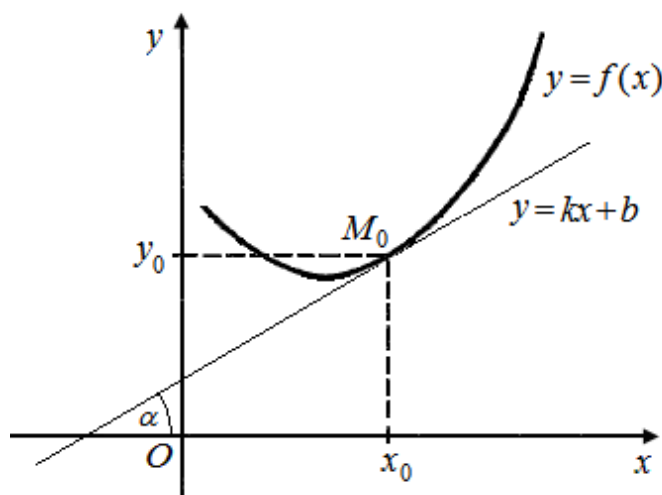
№1. Знайти кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y = \frac{4x - x^2}{4}$ в точці $O(0; 0)$.

№2. Під яким кутом перетинається з осями координат функція $y = 0,5(x - 1)^2$?

Відповіді: №1. $\alpha = 45^0$.

№2. в точці перетину з віссю Ox : $\alpha = 0^0$, $\beta = 90^0$;
в точці перетину з віссю Oy : $\alpha = 135^0$, $\beta = 45^0$.

4. РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА НОРМАЛІ ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x)$ В ТОЧЦІ $M_0(x_0; y_0)$.



Шукатимемо рівняння дотичної у вигляді прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \quad (4)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – геометричний зміст кутового коефіцієнта.

Оскільки $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ –

геометричний зміст похідної, то маємо:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Підставимо вираз для "k" в рівняння (4): $y = f'(x_0)x + b$

Оскільки шукана дотична проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої: $y_0 = f'(x_0)x_0 + b$, звідки

$b = y_0 - f'(x_0)x_0$. Одержимо $y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$. Тоді шукане рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (5)$$

Означення. Нормаллю до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ називається пряма, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно дотичній, проведеній до графіка функції в цій точці.

$$\text{Тоді } k_d \cdot k_n = -1, \Rightarrow k_n = -\frac{1}{k_d} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Отже, рівняння нормалі до функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0). \quad (6)$$

Задача 5. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці $M_0(x_0; y_0)$.

Приклад № 1. $f(x) = x^3 - 5x$, $M_0(2; -2)$.

Розв'язування.

Рівняння дотичної задано формулою (5), а нормалі формулою (6). У нас $x_0 = 2$, $y_0 = -2$. Потрібно знайти $f'(x_0)$.

$$f'(x) = (x^3 - 5x)' = 3x^2 - 5; \quad f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 = 7.$$

Підставивши $x_0 = 2$, $y_0 = -2$ та знайдене значення $f'(x_0) = 7$ у формулу (5), одержимо рівняння дотичної: $y + 2 = 7(x - 2)$, звідки $y = 7x - 16$. Рівняння нормалі згідно (6) буде таким: $y + 2 = -\frac{1}{7}(x - 2)$, звідки $x + 7y + 12 = 0$.

Відповідь: $y = 7x - 16$ – рівняння дотичної,
 $x + 7y - 12 = 0$ – рівняння нормалі.

Приклад № 2. $y = \frac{1}{x}$ в точці, де $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Розв'язування.

Щоб скористатись рівняннями (5) та (6), знайдемо y_0 та $f'(x_0)$.

$$y_0 = f(x_0), \Rightarrow y_0 = 1 : \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}; \quad f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2} = \frac{-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

Згідно (5): $y + 2 = -4 \left(x + \frac{1}{2}\right)$, або $y = -4x - 4$ – рівняння дотичної

Скористаємось рівнянням (6): $y + 2 = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2}\right)$, $\Rightarrow$

$$y + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}, \Rightarrow 2x - 8y - 15 = 0 \text{ – рівняння нормалі.}$$

Відповідь: $y = -4x - 4$ – рівняння дотичної;
 $2x - 8y - 15 = 0$ – рівняння нормалі.

Приклад № 3. $y = x^2 + \frac{2}{x}$; $x_0 = 1$.

Розв'язування.

Рівняння дотичної задано формулою (5), а нормалі формулою (6). Знайдемо спочатку y_0 та $f'(x_0)$.

$$\text{У нас } x_0 = 1, \text{ тоді } y_0 = 1^2 + \frac{2}{1} = 3.$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}; \quad f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 - \frac{2}{1^2} = 0.$$

Маємо: $y = 3$ – рівняння дотичної, тобто дотична паралельна осі абсцис.

Оскільки $f'(x_0) = 0$, то рівнянням (6) скористатись неможливо.

Тоді запишемо рівняння нормалі, як прямої, що проходить через точку $(1; 3)$ перпендикулярно осі Ox : $x = 1$.

Відповідь: $y = 3$ – рівняння дотичної;
 $x = 1$ – рівняння нормалі.

Приклад № 4. $y = \sqrt{x}$, $y_0 = 2$.

Розв'язування.

Щоб скористатись формулами (5) та (6), потрібно знайти x_0 та $f'(x_0)$.

Оскільки $y = \sqrt{x}$, $\Rightarrow x = y^2$. Якщо $y_0 = 2$, то $x_0 = 2^2 = 4$.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Рівняння дотичної: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, $4(y - 2) = x - 4$, $\Rightarrow x - 4y + 4 = 0$.

Рівняння нормалі: $y - 2 = -4(x - 4)$, $\Rightarrow 4x + y - 18 = 0$.

Відповідь: $x - 4y + 4 = 0$ – рівняння дотичної;
 $4x + y - 18 = 0$ – рівняння нормалі.

Самостійно: Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці: 1) $y = 2x - x^2$ в точці $(-1; -3)$;

2) $y = x^4 - 4x^2 + 8$ в точці де $x_0 = 1$;

3) $y = x^3 - 1$ в точці де $y_0 = 7$.

Відповіді:

1) $y = 4x + 1$ – рівняння дотичної, $x + 4y + 13 = 0$ – рівняння нормалі;

2) $y = -4x + 9$ – рівняння дотичної, $x - 4y + 19 = 0$ – рівняння нормалі;

3) $y = 12x - 15$ – рівняння дотичної, $x + 12y - 86 = 0$ – рівняння нормалі.

Приклад № 5. Записати рівняння дотичної до лінії $y = x^2 - 5x + 6$ в точках її перетину з осями координат.

Розв'язування.

Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат

$$Ox: \begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}; \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x_1 = 2; \quad x_1 = 3 \end{bmatrix}; \Rightarrow \begin{matrix} M_1(2; 0) \\ M_2(3; 0) \end{matrix} \Bigg\},$$

$$Oy: x = 0 \Rightarrow y = 6; \Rightarrow M_3(0; 6).$$

Рівняння дотичної має вигляд: $y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

$$f'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5;$$

$$\underline{M_1(2; 0):} \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 0; \quad f'(x_0) = f'(2) = -1,$$

$$\Rightarrow y = -(x - 2), \quad \Rightarrow y = -x + 2 \text{ — рівняння дотичної в точці } M_1$$

$$\underline{M_2(3; 0):} \quad x_0 = 3; \quad y_0 = 0; \quad f'(x_0) = f'(3) = 1,$$

$$\Rightarrow y = x - 3 \text{ — рівняння дотичної в точці } M_2.$$

$$\underline{M_3(0; 6):} \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 6; \quad f'(x_0) = f'(0) = -5,$$

$$\Rightarrow y = 6 - 5x \text{ — рівняння дотичної в точці } M_3.$$

Самостійно. Записати рівняння дотичної до лінії $y = x^2 - 4x + 3$ в точках її перетину з осями координат.

Відповідь: $y = -2x + 2; \quad y = 2x - 6; \quad y = -4x + 3.$

Приклад № 6. Записати рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $y = e^x + e^{-x}$.

Розв'язування.

Горизонтальна пряма паралельна осі Ox , отже $k = 0$, а рівняння дотичної буде таким: $y = y_0$.

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 чисельно дорівнює $f'(x_0)$. Отже, абсцису точки, в якій дотична паралельна осі абсцис, знайдемо, використовуючи те, що $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = e^x - e^{-x}; \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = e^{x_0} - e^{-x_0}, \quad \Rightarrow \quad e^{x_0} - e^{-x_0} = 0;$$

$$\text{Розв'яжемо це рівняння.} \quad e^{-x_0}(e^{2x_0} - 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad e^{2x_0} - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad e^{2x_0} = 1, \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0. \quad \text{Тоді} \quad y_0 = f(x_0) = f(0) = e^0 + e^0 = 2.$$

$$\text{Рівняння дотичної:} \quad y = 2.$$

$$\text{Відповідь:} \quad y = 2.$$

Самостійно: Записати рівняння горизонтальних дотичних до графіка заданих функцій: 1) $y = x(x - 4)^3$; 2) $y = 2 \cos x + x$.

$$\text{Відповідь:} \quad 1) y = 0, \quad y = -27; \quad 2) y = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

5. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Означення. **Похідною другого порядку** або другою похідною називається похідна від похідної першого порядку. Позначення: y'' , $(y')'$, $f''(x)$.

Приклад **№1.** Знайти похідну другого порядку функції $y = x^4 + \ln x$.

Розв'язування. Маємо: $y' = 4x^3 + \frac{1}{x}$,

$$y'' = (y')' = \left(4x^3 + \frac{1}{x}\right)' = 12x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Означення: **Похідною n -го порядку** називається похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку. Позначення: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

З означення випливає метод обчислення.

Приклад **№2.** Знайти похідну 4-го порядку функції $y = \sin^2 x$:

Розв'язування.

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$

$$y'' = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x,$$

$$y''' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x,$$

$$y^{(4)} = (-4 \sin 2x)' = -8 \cos 2x.$$

Самостійно: Знайти похідну вказаного порядку:

1) $y = \cos 4x$, $y'' = ?$

2) $y = x^3 \cdot e^x$, $y''' = ?$

Відповідь:

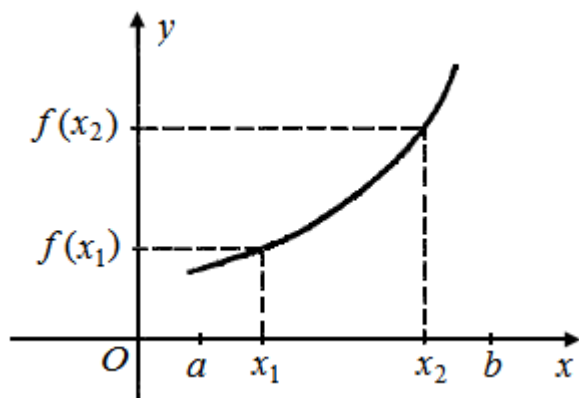
1) $y' = -16 \cos 4x$; 2) $y''' = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$.

6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ

Монотонні функції

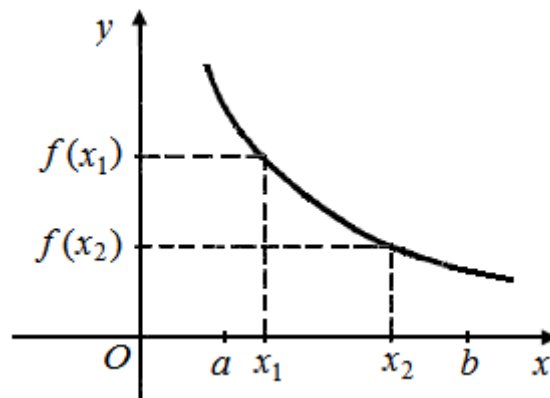
Означення. Нехай функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a; b]$. Якщо для кожної пари точок x_1, x_2 з $[a; b]$ при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ називається **зростаючою** на $[a; b]$.

Означення. Функція $f(x)$ називається **спадною** на цьому відрізку, якщо при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.



$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$f(x)$ зростає на $[a; b]$



$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

$f(x)$ спадає на $[a; b]$.

Означення. Зростаючі і спадні функції називаються **монотонними**.

Теорема (достатня умова монотонності функції).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$. Тоді:

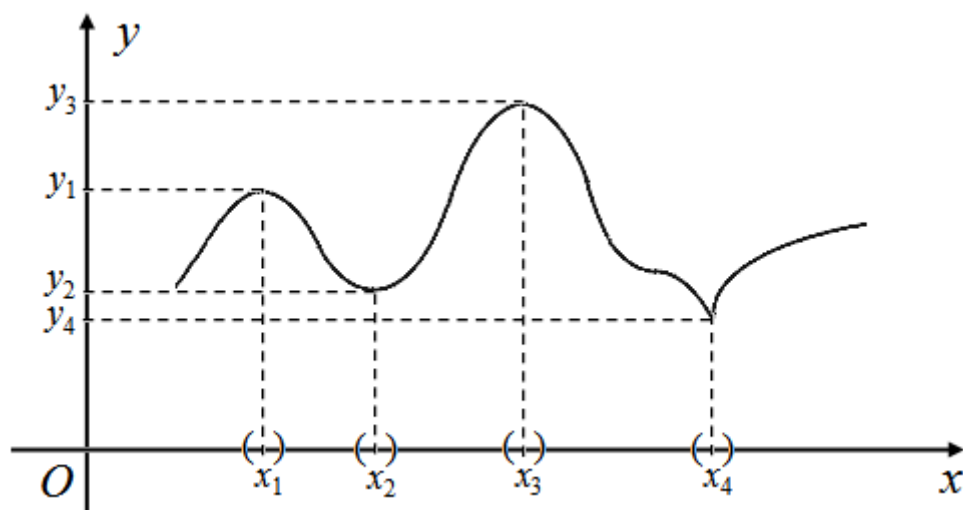
а) якщо $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$;

б) якщо $f'(x) < 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ спадає на $[a; b]$.

Екстремуми функції

Означення. Точка x_0 називається точкою **максимуму** (**мінімуму**) функції $y = f(x)$, якщо в цій точці функція приймає найбільше (найменше) значення в порівнянні зі значеннями функції з деякого околу цієї точки.

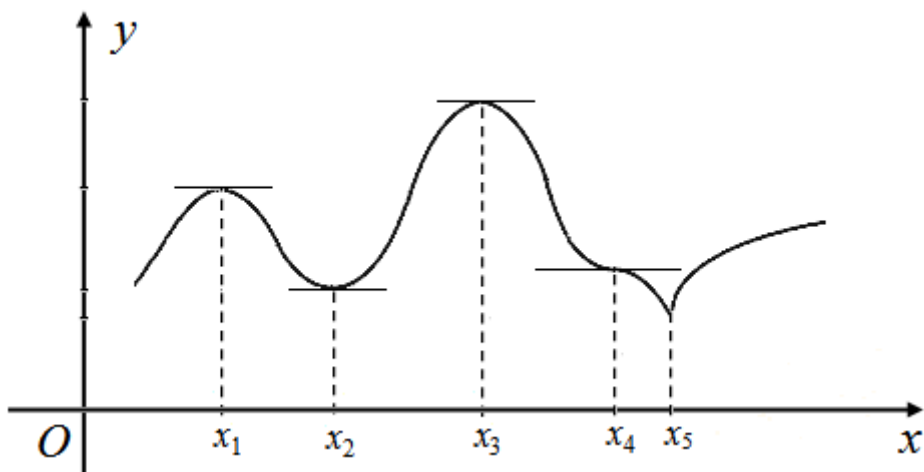
Означення. Точки максимуму і мінімуму називаються **точками екстремуму** функції.



На рисунку x_1, x_3 – точки максимумів (max); x_2, x_4 – точки мінімумів (min).

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму).

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0 і похідна в цій точці існує, то вона дорівнює нулю (тобто $f'(x_0) = 0$).



На рисунку x_1, x_3 – точки максимумів; x_2, x_5 – точки мінімумів.

$y'(x_1) = y'(x_2) = y'(x_3) = y'(x_4) = 0$, $y'(x_5)$ не існує.

x_4 не є точкою екстремуму.

Означення. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, або похідна не існує ($y' = 0$, або y' не існує), називаються **критичними точками**.

На рисунку x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – критичні точки.

Теорема (достатня умова екстремуму).

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі критичної точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 і неперервна в точці x_0 .

Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює свій знак, то точка x_0 є точкою екстремуму цієї функції. При цьому, якщо знак змінюється з $"-"$ на $"+"$, то це точка мінімуму, а якщо з $"+"$ на $"-"$, то це точка максимуму.

На попередньому рисунку x_1, x_3 – точки максимумів,

x_2, x_5 – точки мінімумів,

точка x_4 не є точкою екстремуму.

Задача . Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції $y = f(x)$.

Метод розв'язання:

- 1) Знайти область визначення функції;
- 2) Знайти похідну y' ;
- 3) Знайти критичні точки (тобто точки в яких $y' = 0$, або y' не існує);
- 4) Визначити знаки похідної на проміжках, на які область визначення функції розбивають її критичні точки;
- 5) Зробити висновки, використовуючи достатні умови.

Приклади.

№ 1. Знайти проміжки спадання функції $y = 2x^3 + 2,5x^2 - x$.

Розв'язування.

1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $y' = 6x^2 + 5x - 1$.

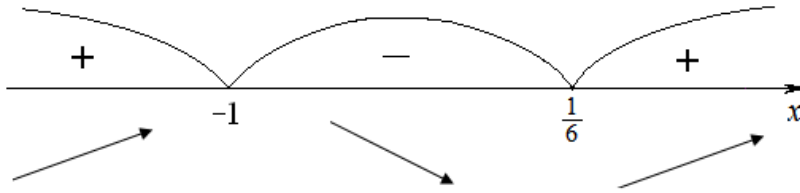
3) Знайдемо критичні точки.

$$\begin{array}{lll} y' = 0, & \text{або} & y' \text{ не існує} \\ 6x^2 + 5x - 1 = 0, & & x \in \emptyset, \end{array}$$

$$D = 25 + 24 = 49,$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{12} = -1, \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{12} = \frac{1}{6}.$$

4) Знаки y' :



5) Відповідь: Функція спадає при $x \in [-1; \frac{1}{6}]$.

№ 2. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2 - \frac{2}{x}$.

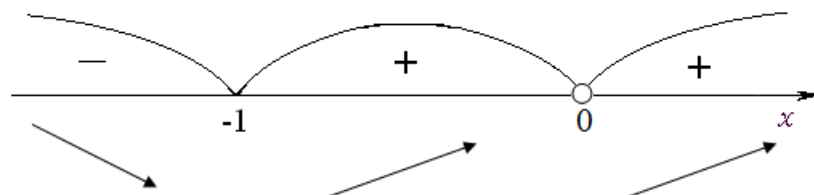
Розв'язування.

1) $D(y)$: $x \neq 0$, $\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$$\begin{aligned} 2) \quad y' &= \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)' = \left(\frac{x^3 - 2}{x} \right)' = \frac{(x^3 - 2)' \cdot x - (x^3 - 2) \cdot x'}{x^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 - 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 2}{x^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}. \end{aligned}$$

3) $y' = 0$, або y' не існує:
 $x^3 + 1 = 0$, $\Rightarrow x = -1$. $x = 0$.

4) Знаки y' :



5) Відповідь: Функція зростає при $x \in [-1; 0)$ і при $x \in (0; +\infty)$.

№ 3. Знайти точки екстремуму функції $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$.

Розв'язування.

1) $D(y)$: $x \neq 3$.

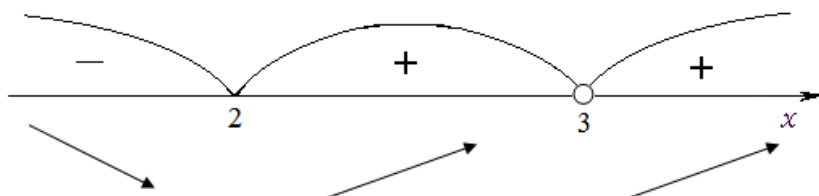
$$2) \quad y' = \frac{(e^{3-x})'(3-x) - e^{3-x}(3-x)'}{(3-x)^2} =$$

$$= \frac{e^{3-x}(-1)(3-x) - e^{3-x}(-1)}{(3-x)^2} = \frac{e^{3-x}(x-2)}{(3-x)^2};$$

$$3) \quad y' = 0, \quad \text{або} \quad y' \text{ не існує}$$

$$x - 2 = 0, \Rightarrow x = 2, \quad 3 - x = 0, \Rightarrow x = 3.$$

4) Знаки y' :



5) Відповідь: $x = 2$ – точка мінімуму.

№ 4. Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції :

$$а) \quad y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3; \quad б) \quad y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$

Розв'язування.

$$\text{№ 4(а).} \quad y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3.$$

$$1) \quad D(y) = (-\infty; +\infty).$$

$$2) \quad y' = -x^2 + x + 2.$$

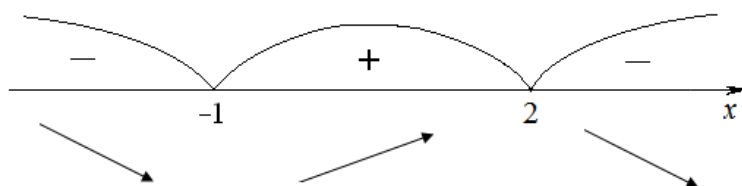
3) Критичні точки:

$$y' = 0, \quad \text{або} \quad y' \text{ не існує}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0; \quad x \in \emptyset$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

4) Знаки y' :



5) Відповідь: Функція зростає при $x \in [-1; 2]$, спадає при $x \in (-\infty; -1]$ і при $x \in [1; +\infty)$; $x = -1$ – точка мінімуму, $x = 2$ – точка максимуму.

№ 4(б). $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

Розв'язування.

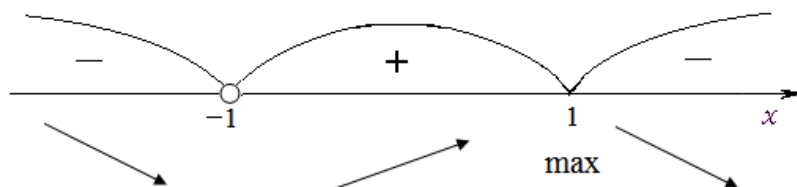
1) $D(y): x+1 \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$2) y' = 4 \cdot \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right)' = 4 \cdot \frac{x' \cdot (x+1)^2 - x((x+1)^2)'}{(x+1)^4} =$$

$$= 4 \cdot \frac{(x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = 4 \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+1-2x)}{(x+1)^4} = 4 \cdot \frac{1-x}{(x+1)^3};$$

3) Критичні точки: $y' = 0$, або y' не існує:
 $1-x = 0$, $x+1 = 0$,
 $x = 1$; $x = -1$.

4) Знаки y' :



$x = -1$ не є точкою екстремуму, оскільки $x = -1 \notin D(y)$.

5) Відповідь: Функція зростає при $x \in (-1; 1]$, спадає при $x \in (-\infty; -1)$ і при $x \in [1; +\infty)$; $x = 1$ – точка максимуму.

№ 5. Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції
 $y = \sqrt{x^2 + 2x}$.

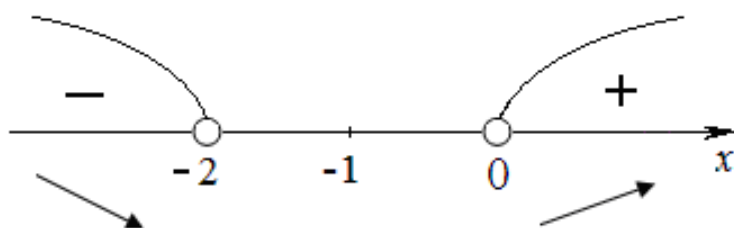
Розв'язування.

1) $D(y): x^2 + 2x \geq 0$. $x^2 + 2x = 0, \Rightarrow x = 0, x = -2$;
 $\Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot (x^2 + 2x)' = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

3) Критичні точки. $y' = 0$, або y' не існує:
 $x + 1 = 0$, $x^2 + 2x = 0$,
 $x = -1$; $x = 0, x = -2$.

4) Знаки y' :



5) Відповідь: Функція зростає на $(0; +\infty)$, спадає при $x \in (-\infty; -2)$.
Точок екстремуму не існує.

Самостійно:

Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функцій:

1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 2) $y = (x - 5)^2 \cdot (x + 3)^2$;

3) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$; 4) $y = \frac{x}{(x + 2)^2}$.

Відповіді:

1) $x = 1$ – min, $x = 0$ – max; проміжки зростання: $(-\infty; 0]$,
 $[1; +\infty)$; проміжок спадання: $[0; 1]$.

2) $x = -3, x = 5$ – точки мінімуму, $x = 1$ – точки максимуму.
Функція зростає при $x \in [-3; 1]$ і при $x \in [5; +\infty)$, спадає при
 $x \in (-\infty; -3]$ і при $x \in [1; 5]$.

3) $x = -1$ – точка мінімуму, $x = -5$ – точка максимуму; проміжки зростання: $(-\infty; -5]$, $[-1; +\infty)$; проміжки спадання: $[-5; -3)$, $(-3; -1]$.

4) $x = 2$ – точка максимуму, $(-2; 2]$ – проміжок зростання, проміжки спадання: $(-\infty; -2)$, $[2; +\infty)$.

7. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Розв'язок багатьох прикладних задач зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції.

Теорема Вейерштрасса

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ набуває на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень.

У випадку, коли $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і має на цьому відрізку певне число критичних точок, можна вказати правило знаходження найбільшого та найменшого її значень.

Щоб знайти найбільше та найменше значення неперервної на $[a; b]$ функції $f(x)$, потрібно:

- 1) Перевірити, що $f(x)$ неперервна на $[a; b]$;
- 2) Знайти $f'(x)$;
- 3) Знайти критичні точки, тобто точки, де $f'(x) = 0$, або $f'(x)$ не існує;
- 4) Обчислити значення функції $y = f(x)$ в критичних точках, які належать $[a; b]$, та на його кінцях;
- 5) Вибрати найбільше та найменше з одержаних значень і записати відповідь.

Завдання. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на $[a; b]$.

Приклади.

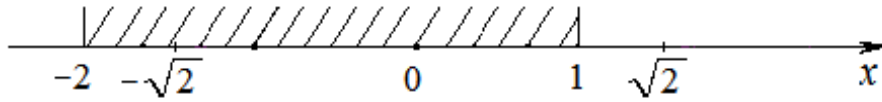
№ 1. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, на $[-2; 1]$.

Розв'язування.

1) $D(y) = R$.

2) $f'(x) = (x^4 - 4x^2 + 2)' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$.

- 3) $f'(x) = 0$, або $f'(x)$ не існує
 $4x(x^2 - 2) = 0$, $\emptyset$.
 $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.
- 4) Обчислимо значення функції в критичних точках, які належать відрізку $[-2; 1]$ та на його кінцях.



$$f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^2 + 2 = 2;$$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 + 2 = -2;$$

$$f(0) = 2;$$

$$f(1) = (1)^4 - 4(1)^2 + 2 = -1.$$

- 5) Відповідь: $\max_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = f(0) = 2$,
 $\min_{[-2; 1]} f(x) = f(-\sqrt{2}) = -2$.

№2. $y = (x - 1)^2 \cdot (x - 3)^3$, $x \in [2; 4]$.

Розв'язування.

- 1) Функція неперервна на $[2; 4]$.
- 2) Знайдемо y' .

$$y' = ((x - 1)^2)' \cdot (x - 3)^3 + (x - 1)^2 \cdot ((x - 3)^3)' =$$

$$= 2(x - 1) \cdot (x - 3)^3 + (x - 1)^2 \cdot 3(x - 3)^2 =$$

$$= (x - 1) \cdot (x - 3)^2 \cdot (2(x - 3) + 3(x - 1)) = (x - 1) \cdot (x - 3)^2 \cdot (5x - 9).$$
- 3) Знайдемо критичні точки.
 $y' = 0$, або y' не існує
 $(x - 1) \cdot (x - 3)^2 \cdot (5x - 9) = 0$, $\emptyset$.
 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{9}{5}$.
- 4) Обчислимо значення функції в критичних точках, які належать відрізку $[2; 4]$ та на його кінцях.



$$f(2) = (2-1)^2 \cdot (2-3)^3 = -1 \text{ — найменше ;}$$

$$f(3) = (3-1)^2 \cdot (3-3)^3 = 0;$$

$$f(4) = (4-1)^2 \cdot (4-3)^3 = 3^2 \cdot 1^3 = 9 \text{ — найбільше .}$$

$$5) \text{ Відповідь: } \max_{[2; 4]} f(x) = f(4) = 9, \quad \min_{[2; 4]} f(x) = f(2) = -1.$$

Самостійно.

Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на $[a; b]$:

$$1) f(x) = x^2 + 3x, \quad [-2; 1]; \quad 2) f(x) = x^3 - 3x, \quad [-2; 2];$$

$$3) f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad [1; 4]; \quad 4) f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad [-3; 4].$$

$$\text{Відповідь: } 1) \max_{[-2; 1]} f(x) = f(1) = 4, \quad \min_{[-2; 1]} f(x) = f(-1,5) = -2,25;$$

$$2) \max_{[-2; 2]} f(x) = f(-1) = f(2) = 2, \quad \min_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = f(1) = -2;$$

$$3) \max_{[1; 4]} f(x) = f(4) = 3, \quad \min_{[1; 4]} f(x) = f(1) = -1;$$

$$4) \max_{[-3; 4]} f(x) = f(0) = 5, \quad \min_{[-3; 4]} f(x) = f(4) = 3.$$

8. Застосування похідної 2-го порядку

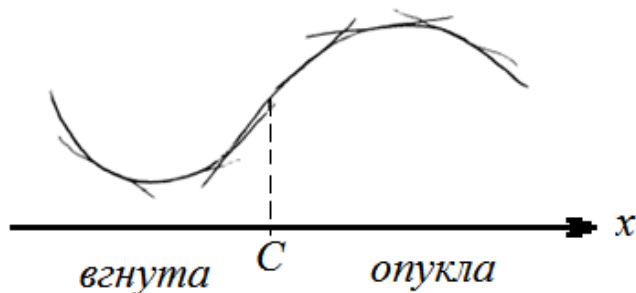
Опуклість, вгнутість і точки перегину графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в інтервалі $(a; b)$. Тоді її графік має дотичну в кожній своїй точці $M(x; f(x))$, $x \in (a; b)$.

Означення.

1. Графік функції $y = f(x)$ називається **опуклим** на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований **не вище** будь-якої своєї дотичної на цьому інтервалі.

2. Графік функції $y = f(x)$ називається **вгнутиим** на інтервалі $(a; b)$, якщо він розташований **не нижче** будь-якої своєї дотичної на цьому інтервалі.



Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ двічі диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) в кожній точці $(a; b)$, то графік функції $y = f(x)$ **опуклий (вгнутий)** на $(a; b)$.

Означення. **Точкою перегину** називається така точка графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину від вгнутої (на рис. точка C), якщо в цій точці графік функції має дотичну.

В точці перегину дотична перетинає графік функції, тому що з одного боку цієї точки графік лежить нижче, а з другого – вище дотичної.

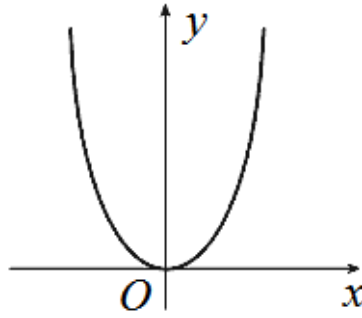
Теорема. (необхідна умова точки перегину)

Якщо графік диференційовної функції $f(x)$ має точку перегину $M_0(x_0; f(x_0))$, і друга похідна $f''(x)$ в цій точці існує, то вона дорівнює нулю.

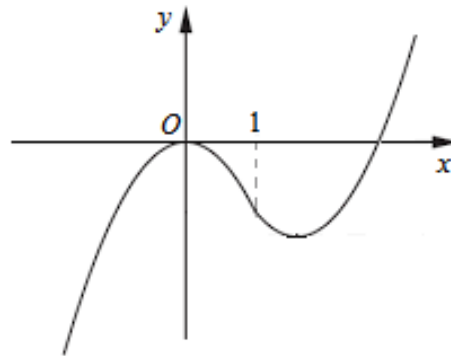
Означення. Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю, або не існує, називають **критичними точками II-го роду функції $f(x)$** .

Отже, якщо x_0 – абсциса точки перегину графіка функції $f(x)$, то x_0 є критичною точкою II-го роду цієї функції. Але не всяка критична точка II-го роду є абсцисою точки перегину. Розглянемо приклади, які це підтверджують.

№ 1. Функція $f(x) = x^4$ має другу похідну $f''(x) = 12x^2$, яка дорівнює нулю, при $x = 0$. Але критична точка $x = 0$ не є абсцисою точки перегину графіка (див. рис. на якому схематично зображено графік цієї функції).



№ 2. $f(x) = x^3 - 3x^2$; $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow x = 1$ – критична точка II-го роду. Ця точка є точкою перегину (графік цієї функції теж зображено на рисунку).



Теорема (достатня умова точки перегину).

Нехай x_0 – критична точка II-го роду функції $f(x)$ і функції $f(x)$ двічі диференційовна в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Якщо при переході через точку x_0 похідна другого порядку $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $f(x)$.

Щоб знайти точки перегину графіка функції, треба знайти критичні точки II-го роду і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Зазначимо, що в наведеному прикладі №1 друга похідна $f''(x) = 12x^2$, при переході через точку $x = 0$ знак не змінює, а в прикладі №2 $f''(x) = 6x - 6$ при переході через точку $x = 1$ змінює свій знак.

Задача. Знайти проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину функції $y = f(x)$.

Метод розв'язання:

- 1) Знайти область визначення функції;
- 2) Знайти похідні y' , y'' ;
- 3) Знайти критичні точки другого роду ($y'' = 0$, або y'' не існує);
- 4) Визначити знаки другої похідної на проміжках, на які область визначення функції розбивають її критичні точки другого роду;
- 5) Зробити висновки, використовуючи достатні умови.

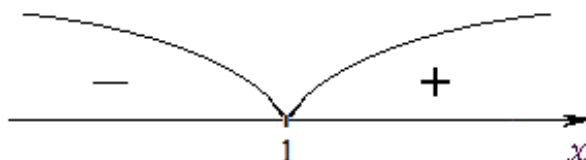
Завдання 1. Знайти точки перегину заданих функцій.

Приклади.

№ 1. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

Розв'язування.

- 1) $D(y): x \in R$;
- 2) $y' = 3x^2 - 6x + 2$, $y'' = 6x - 6$;
- 3) $y'' = 0: 6x - 6 = 0$ при $x = 1$.
- 4) Визначимо знаки y'' на проміжках, на які розбивають область визначення функції критичні точки другої похідної:



При переході через точку $x = 1$ y'' змінює знак. $y(1) = 1$.

- 5) Відповідь: $(1; 1)$ – точка перегину.

№ 2. $y = \frac{4}{2x - x^2}$.

Розв'язування.

- 1) $D(y): 2x - x^2 \neq 0, \Rightarrow x \neq 0, x \neq 2$.

$$2) \ y' = \frac{0 - 4(2x - x^2)'}{(2x - x^2)^2} = \frac{-4(2 - 2x)}{(2x - x^2)^2} = \frac{8(x - 1)}{(2x - x^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{8(x - 1)}{(2x - x^2)^2} \right)' = 8 \frac{(x - 1)' \cdot (2x - x^2)^2 - (x - 1) \cdot ((2x - x^2)^2)'}{(2x - x^2)^4} = \\ &= 8 \frac{(2x - x^2)^2 - (x - 1) \cdot 2(2x - x^2) \cdot (2 - 2x)}{(2x - x^2)^4} = \\ &= 8 \frac{(2x - x^2) \cdot (2x - x^2 - (x - 1) \cdot 2 \cdot (2 - 2x))}{(2x - x^2)^4} = \\ &= 8 \frac{2x - x^2 + 4x^2 - 8x + 4}{(2x - x^2)^3} = 8 \frac{3x^2 - 6x + 4}{(2x - x^2)^3}. \end{aligned}$$

$$3) \ y'' = 0: \quad 3x^2 - 6x + 4 = 0; \quad D = 36 - 48 < 0; \quad \Rightarrow \quad y'' \neq 0.$$

4) y'' не існує в точках, які належать області визначення функції.

5) Відповідь: Точок перегину не існує.

Самостійно. Знайти точки перегину заданих функцій:

$$1) y = x^3 + 6x^2 + 5x - 7; \quad 2) y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 7x + 3; \quad 3) y = \frac{2}{x^3}.$$

Відповідь: 1) $(-2; -1)$; 2) $(-1; -17)$, $(3; -165)$; 3) Не існує.

Завдання 2. Знайти проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину графіка функції.

Приклади.

$$\text{№ 1. } y = \frac{x^2 - 9}{x + 4}.$$

Розв'язування.

$$1) \ D(y): \quad x + 4 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad x \neq -4.$$

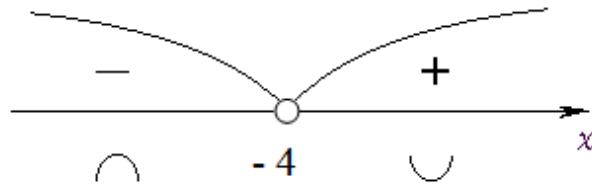
$$2) \ y' = \frac{(x^2 - 9)'(x + 4) - (x^2 - 9)(x + 4)'}{(x + 4)^2} =$$

$$= \frac{2x(x+4) - (x^2-9) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 8x - x^2 + 9}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 9}{(x+4)^2}.$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^2 + 8x + 9)'(x+4)^2 - (x^2 + 8x + 9)((x+4)^2)'}{(x+4)^4} = \\ &= \frac{(2x+8)(x+4)^2 - (x^2 + 8x + 9) \cdot 2(x+4)}{(x+4)^4} = \\ &= \frac{(2x+8)((x+4)^2 - (x^2 + 8x + 9))}{(x+4)^4} = \\ &= \frac{2(x+4)(x^2 + 8x + 16 - x^2 - 8x - 9)}{(x+4)^4} = \frac{2 \cdot 7}{(x+4)^3} = \frac{14}{(x+4)^3}. \end{aligned}$$

3) $y'' \neq 0$, y'' не існує при $x = -4$.

4) Знаки y''



Відповідь: Функція ввігнута на $(-4; +\infty)$, опукла при $x \in (-\infty; -4)$.
Точок перегину не існує ($x = -4 \notin D(y)$).

№ 2. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

Розв'язування.

1) $D(y)$: $x \in \mathbb{R}.$

$$2) y' = \frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2};$$

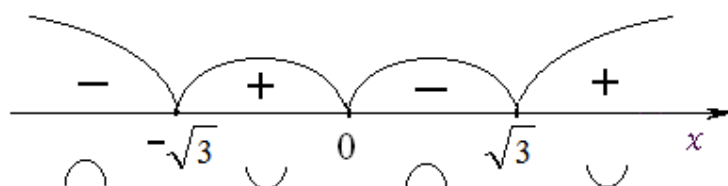
$$y'' = \left(\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{(1 - x^2)'(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)((x^2 + 1)^2)'}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + 1)(-x^2 - 1 - 2 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}.$$

3) $y'' = 0$, або y'' не існує:
 $x(x^2 - 3) = 0$, $x \in \emptyset$.
 $x_1 = 0$; $x^2 - 3 = 0$; $\Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

4) Знаки y'' :



5) Відповідь: Функція опукла при $x \in (-\infty; -\sqrt{3}]$ і при $x \in [0; \sqrt{3}]$, ввігнута при $x \in [-\sqrt{3}; 0]$ і при $x \in [\sqrt{3}; +\infty]$. Точки з абсцисами $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ є точками перегину графіка функції.

Самостійно.

Знайти проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину графіка наступних функцій: 1) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$; 2) $y = \sqrt[3]{x + 2}$; 3) $y = \arctg x + x$.

Відповіді:

1) Функція опукла при $x \in (-\infty; 2]$, ввігнута при $x \in [2; +\infty)$. Точка $(2; 12)$ є точкою перегину графіка функції.

2) Функція опукла при $x \in (-2; +\infty)$, ввігнута при $x \in (-\infty; -2)$. Точок перегину не існує.

3) Функція опукла при $x \in [0; +\infty)$, ввігнута при $x \in (-\infty; 0]$. Точка $(0; 0)$ є точкою перегину графіка функції.

Теоретичні питання для самоперевірки.

1. Означення похідної.
2. Правила диференціювання.
3. Таблиця похідних.
4. Геометричний зміст похідної.

5. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$.
6. Означення похідних вищих порядків.
7. Які функції називаються зростаючими, спадними, опуклими, ввігнутими на проміжку?
8. Які точки називаються точками: мінімуму, максимуму, екстремуму, перегину графіка функції?
9. Необхідні і достатні умови екстремуму.
10. Необхідні і достатні умови точок перегину графіка функції.
11. Схема дослідження графіка функції на зростання, спадання, точки екстремуму.
12. Схема дослідження графіка функції на опуклість, вгнутість, точки перегину.
13. Як знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізьку $[a; b]$.
14. Теорема Вейерштрасса.

Завдання 3. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Схема дослідження:

- 1) Знайти область визначення функції;
- 2) Знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
- 3) Знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції;
- 4) Знайти проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину графіка функції;
- 5) Побудувати графік функції.

Приклади.

№ 1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Розв'язування.

1) $D(y) = R$;

2) Точки перетину графіка функції з осями координат:

З віссю Ox : $y = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

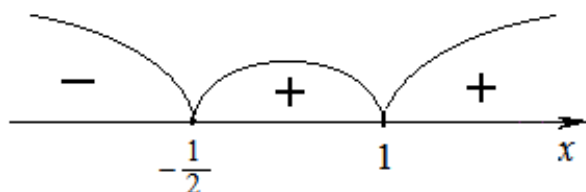
Очевидно, що $x = 1$ задовольняє це рівняння. Виділимо множник $(x - 1)$.

$$2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 = 2x^2(x - 1) - (x^2 - 1) = 2x^2(x - 1) - (x - 1)(x + 1) = (x - 1)(2x^2 - x - 1).$$

Отже, $(x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0$, якщо $x - 1 = 0$, або $2x^2 - x - 1 = 0$,

звідки $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$.

Знаки y :

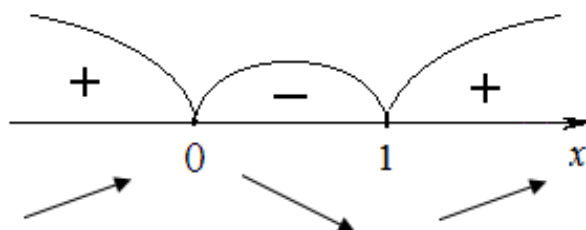


З віссю Oy : $x = 0 \Rightarrow y = 1, \Rightarrow$ точка $M(0; 1)$.

3) Знайдемо проміжки зростання, спадання та точки екстремуму графіка функції.

$$y' = 6x^2 - 6x; \quad y' = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Знаки y' :



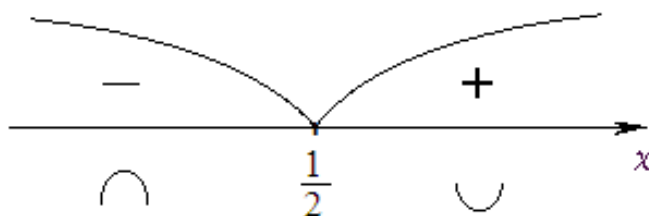
$y(0) = 1$, $(0; 1)$ – точка максимуму; $y(1) = 0$, $(1; 0)$ – точка мінімуму.

Проміжки зростання: $(-\infty; 0]$, $[1; +\infty)$; проміжок спадання: $[0; 1]$.

4) Знайдемо проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину графіка функції.

$$y'' = 12x - 6. \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Знаки y'' :

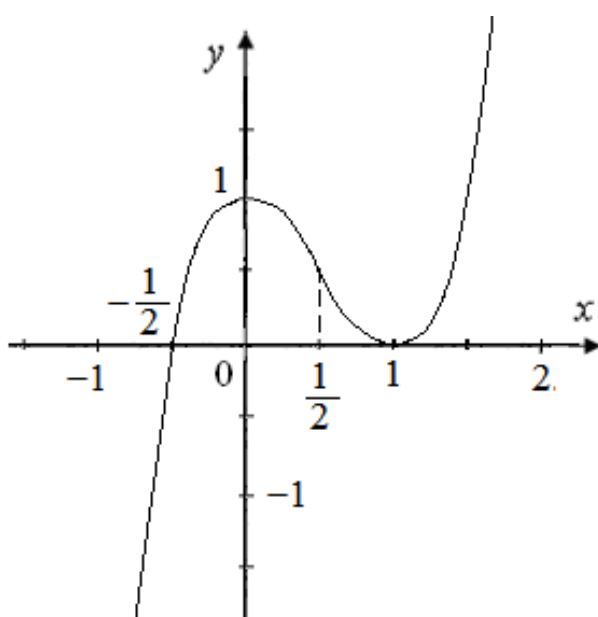


Функція опукла при $x \in (-\infty; 0.5]$, ввігнута при $x \in [0.5; +\infty)$;

$y(0.5) = 0.5$. $(0.5; 0.5)$ – точка перегину графіка функції.

5) Зведемо результати дослідження в таблицю і побудуємо (схематично) графік даної функції.

x	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 0)$	0	$(0; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y	-	0	+	+	+	+	+	0	+
y'	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	-	-	0	+	+	+
y				1 max			$\frac{1}{2}$ переги	0 min	



№ 2. $y = \frac{2x^2}{2x + 1}$.

Розв'язування.

1) $D(y): 2x + 1 \neq 0, \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}; \Rightarrow$

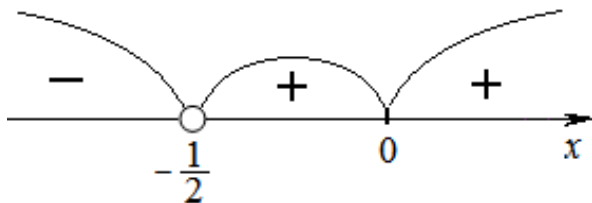
$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

2) Точки перетину графіка функції з осями координат:

З віссю Ox : $y = 0 \Rightarrow x = 0$.

З віссю Oy : $x = 0 \Rightarrow y = 0, \Rightarrow$ точка $O(0; 0)$.

Знаки $y(x)$;



3) Знайдемо проміжки зростання, спадання та точки екстремуму графіка функції.

$$y' = \left(\frac{2x^2}{2x+1} \right)' = 2 \left(\frac{x^2}{2x+1} \right)' = 2 \frac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = 4 \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2};$$

$$y' = 0,$$

або

$$y' \text{ не існує}$$

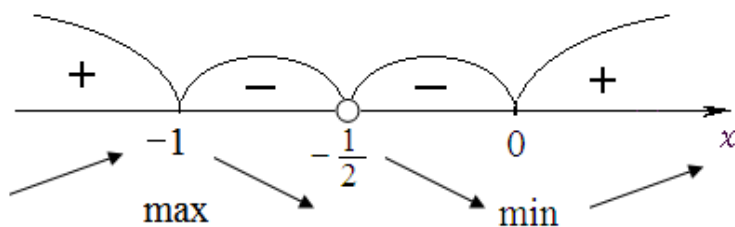
$$x(x+1) = 0,$$

$$2x+1 = 0,$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Знаки y' :



$$y(-1) = \frac{2}{-2+1} = -2, \Rightarrow (-1; -2) - \text{точка максимуму};$$

$$y(0) = 0, \Rightarrow (0; 0) - \text{точка мінімуму}.$$

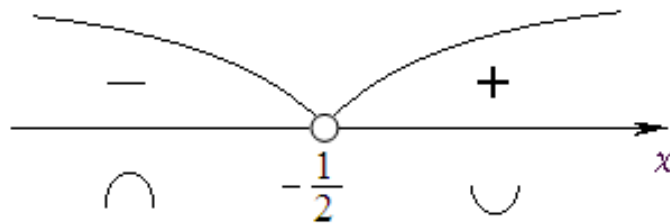
4) Знайдемо проміжки опуклості, ввігнутості та точки перегину графіка функції.

$$y'' = \left(4 \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right)' = 4 \left(\frac{x^2+x}{(2x+1)^2} \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{(x^2 + x)' (2x + 1)^2 - (x^2 + x) \left((2x + 1)^2 \right)'}{(2x + 1)^4} = \\
&= 4 \frac{(2x + 1) (2x + 1)^2 - (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2}{(2x + 1)^4} = \\
&= 4 \frac{(2x + 1) (4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x)}{(2x + 1)^4} = \frac{4}{(2x + 1)^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y'' = 0, \quad \text{або} \quad y'' \text{ не існує} \\
&\emptyset; \quad 2x + 1 = 0, \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Знаки y'' :

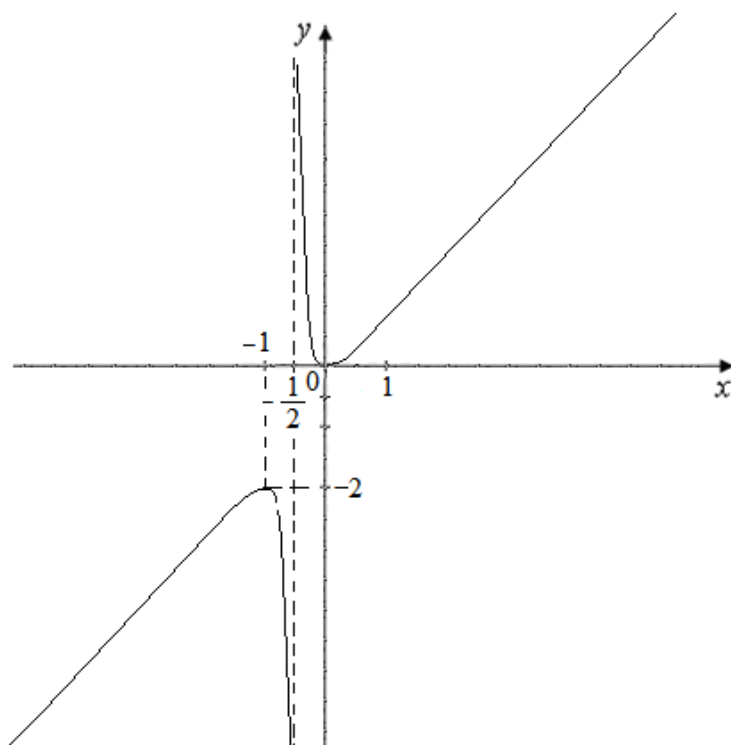


Точок перегину не існує, оскільки $x = -\frac{1}{2} \notin D(y)$.

4) Графік функції (схематично).

Зведемо результати дослідження в таблицю, яка допомагає побудувати графік.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; \frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	-	не існує	-	0	+
y''	-	-	-	не існує	+	+	+
y		-2 max		не існує		0 min	



Самостійно. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

1) $y = x^3 - 3x^2 - 2$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3 + 2$; 3) $y = x - x^3$; 4) $y = 2x + \frac{1}{x^2}$.

9. Використання поняття похідної в економіці.

Задача про продуктивність праці.

Нехай функція $u = u(t)$ відображає кількість виробленої продукції u за час t . Необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0 .

Розв'язування.

За проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від $u(t_0)$ до $u + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тоді середня продуктивність праці

за період Δt : $z_{\text{сер}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, що продуктивність праці в момент t_0

можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, тобто $z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$.

Отже, **продуктивність праці в момент t_0 дорівнює похідній об'єму виробленої продукції по часу, тобто $u'(t_0)$.**

Розглянемо ще одне поняття, що відображає **економічний зміст похідної**. Витрати на виробництво y можна розглядати як функцію кількості виробленої продукції x . Нехай Δx – приріст продукції. Тоді Δy – приріст затрат виробництва а $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – середній приріст затрат виробництва на одиницю

продукції. Похідна $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ виражає граничні витрати виробництва і характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від кількості продукції x , що виробляється і визначається не постійними виробничими затратами, а тільки змінними (на сировину, паливо і тому подібне).

Приклад. Об'єм продукції u , виробленої бригадою працівників, може

$$\text{бути описане рівнянням } u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \text{ (од.)},$$

$1 \leq t \leq 8$, де t – робочий час в годинах. Обчислити продуктивність праці, швидкість її вимірювання через годину від початку роботи і за глітну до її завершення.

Розв'язування.

Продуктивність праці виражається похідною

$$z = u'(t) = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \right)' = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ (од/год}^2\text{)}.$$

$$\text{Швидкість змінення продуктивності } z'(t) = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \right)' = -5t + 15.$$

В момент часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 7$ відповідно маємо:

$$z(1) = -\frac{5}{2} + 15 + 100 = 112,5 \text{ (од/год.)},$$

$$z'(1) = -5 + 15 = 10 \text{ (од/год.}^2\text{)}.$$

$$z(7) = -\frac{5}{2} \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 85,2 \text{ (од/год.)},$$

$$z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20 \text{ (од/год.}^2\text{)}.$$

Зміна знаку $z'(t)$ свідчить про те, що продуктивність на кінець робочого часу знижується.

IV. Первісна і невизначений інтеграл

Задача. Дана функція $f(x)$. Потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $[a; b]$, якщо $\forall x \in [a; b]$ має місце рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад: Нехай $f(x) = x^2$. Тоді $F(x) = \frac{x^3}{3}$ буде первісною цієї функції, оскільки $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Очевидно, якщо у функції $y = f(x)$ існує первісна, то вона не єдина. Так в наведеному прикладі первісною для функції x^2 можна було взяти, наприклад, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$, або $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$ і взагалі

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, де $C - const$. З іншої сторони можна довести, що функція

$\frac{1}{3}x^3 + C$ описує всі первісні для функції x^2 .

Теорема. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ дві первісні для функції $f(x)$ на $[a; b]$, то різниця між ними є сталою величиною, тобто $F_1(x) - F_2(x) = const$.

З даної теореми випливає, що якщо для функції $f(x)$ знайдено яку-небудь первісну $F(x)$, то будь-яка інша первісна має вигляд $F(x) + C$, де C довільна стала.

Означення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x) dx$.

Таким чином, за означенням: $\int f(x) dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$. При цьому функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, а $f(x) dx$ – підінтегральним виразом; знак $\int$ – знаком інтеграла.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл це сукупність кривих, кожен з яких можна одержати шляхом паралельного переносу однієї з них в напрямі осі Oy .

Виникає питання: для яких функцій існує первісна, а, значить, і невизначений інтеграл?

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то для неї існує первісна.

Знаходження первісної називається **інтегруванням функції**.

З означення первісної випливають такі **властивості**:

1) Похідна від невизначеного інтегралу співпадає з підінтегральною функцією, тобто, $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$.

2) Диференціал від невизначеного інтегралу співпадає з підінтегральним виразом: $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$.

3) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції відрізняється від цієї функції на довільну сталу: $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто,

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx.$$

5) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

6) Вигляд первісної не залежить від змінної інтегрування, тобто, якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = u(x)$, то $\int f(u) du = F(u) + C$.

Розглянуті властивості дозволяють сформулювати наступні **правила інтегрування**:

1) $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$, де $C - const$;

2) $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$;

3) $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$.

Таблиця інтегралів (впливає з означення) :

$$1) \int dx = x + C ; \quad \Rightarrow \quad \int a \cdot dx = ax + C ;$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (\text{де } n \neq -1);$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \left(\frac{1}{x} = x^{-1}, \text{ тут } n = -1 \right);$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \text{зокрема: } \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C ;$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C ;$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C ;$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C ;$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C ;$$

$$10) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C ; \quad (\text{Високий логарифм})$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C ;$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C. \quad (\text{Довгий логарифм})$$

Методи інтегрування

1. Табличне інтегрування

Табличне інтегрування базується на використанні основних властивостей невизначеного інтеграла, елементарних перетворень та таблиці інтегралів.

Довідковий матеріал (дії зі степенями) :

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n; \quad (a^n)^k = a^{n \cdot k}; \quad a^0 = 1;$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n};$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \quad \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}; \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{a^k} = a^{\frac{k}{2}}.$$

Розглянемо приклади використання цього метода.

Завдання. Знайти невизначені інтеграли.

№ 1. $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C.$ (Використано табличну формулу 2.)

№ 2. $\int \frac{2}{x} dx =$

(Винесемо сталий множник за знак інтеграла (правило 1) після чого скористаємось табличною формулою 3.)

$$= 2 \int \frac{dx}{x} = 2 \ln|x| + C.$$

№ 3. $\int (3x^2 - 4x + 5) dx =$

(Скористаємось правилами 2 і 1 та табличними формулами 2 і 1.)

$$= \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5 \cdot x + C = x^3 - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C.$$

№ 4. $\int \left(5 \cos x + \frac{3}{\cos^2 x} - 4^x \right) dx = 5 \int \cos x dx + 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int 4^x dx =$

$$= 5 \sin x + 3 \operatorname{tg} x - \frac{4^x}{\ln 4} + C.$$

При обчисленні використано правила 1 і 2 та табличні формули 6, 7, 4.

$$\text{№ 5. } \int \left(\frac{6}{x^4} - \frac{2}{5x} + \frac{8}{x^2} \right) dx =$$

(Підготуємо підінтегральний вираз до використання табличних формул 2 та 3, використовуючи правила інтегрування та довідковий матеріал.)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{6}{x^4} dx - \int \frac{2}{5x} dx + \int \frac{8}{x^2} dx = 6 \int x^{-4} dx - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x} + 8 \int x^{-2} dx = \\ &= 6 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} - \frac{2}{5} \ln|x| + 8 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -2x^{-3} - \frac{2}{5} \ln|x| - 8 \cdot x^{-1} + C. \end{aligned}$$

$$\text{№ 6. } \int \left(4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x^5} \right) dx =$$

(Підготуємо підінтегральні вирази до використання табличної формули 2, записавши корені у вигляді степеня.)

$$\begin{aligned} &= \int 4\sqrt[3]{x} dx - \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx - \int 3\sqrt{x^5} dx = \\ &= 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{5}{2}} dx = \\ &= 4 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 3 \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = 4 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \\ &= 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{7}{2}} + C = 3\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x^3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{№ 7. } \int \frac{(2+3x)^2}{x^3} dx = \quad (\text{Виконаємо дії вказані під знаком інтеграла})$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{4+12x+9x^2}{x^3} dx = \int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{12x}{x^3} + \frac{9x^2}{x^3} \right) dx = \\ &4 \int x^{-3} dx + 12 \int x^{-2} dx + 9 \int \frac{dx}{x} = \end{aligned}$$

(Тепер скористаємось табличними формулами 2, 3.)

$$= 4 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 12 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 9 \ln|x| + C = \frac{-2}{x^2} - \frac{12}{x} + 9 \ln|x| + C.$$

$$\begin{aligned}
 \text{№ 8. } \int e^x \left(5^{-x} + \frac{1}{e^x \sqrt{x}} \right) dx &= \int \left(e^x 5^{-x} + \frac{e^x}{e^x \sqrt{x}} \right) dx = \\
 &= \int \left(\frac{e}{5} \right)^x dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\frac{e}{5} \right)^x}{\ln \left(\frac{e}{5} \right)} + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{e^x \cdot 5^{-x}}{\ln e - \ln 5} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \\
 &= \frac{e^x \cdot 5^{-x}}{1 - \ln 5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{e^x \cdot 5^{-x}}{1 - \ln 5} + 2\sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{№9. } \int 2^x \cdot 3^{x+1} dx = \int 2^x \cdot 3^x \cdot 3 dx = 3 \int (2 \cdot 3)^x dx = 3 \int 6^x dx = 3 \frac{6^x}{\ln 6} + C.$$

$$\text{№ 10. } \int \frac{dx}{x^2 - 16} = \quad \text{(Скористаємось табличною формулою 10.)}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2 - 4^2} = \frac{1}{2 \cdot 4} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + C.$$

$$\text{№ 11. } \int \frac{3}{2x^2 + 8} dx =$$

(Підготуємо підінтегральний вираз до використання формули 9)

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{3 dx}{2(x^2 + 4)} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = \\
 &= \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{№ 12. } \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

При обчисленні цього інтегралу використано табличну формулу 11.

$$\text{№ 13. } \int \frac{7 dx}{\sqrt{2x^2 + 5}} =$$

(Підготуємо підінтегральний вираз до використання формули 12.)

$$\begin{aligned} &= 7 \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2 + \frac{5}{2}\right)}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{5}{2}}} = \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{№ 14. } \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} =$$

(Можна використати табличний інтеграл 11. Підготуємо підінтегральний вираз.)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{4}{9} - x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{\frac{4}{9} - x^2}} = \int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} = \\ &= \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2/3} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{№ 15. } \int \frac{dx}{25 - 4x^2} =$$

(Підготуємо підінтегральний вираз до використання табличного інтеграла 10)

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dx}{-4\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2}}{x + \frac{5}{2}} \right| + C = -\frac{1}{20} \ln \left| \frac{2x - 5}{2x + 5} \right| + C = \\ &= \frac{1}{20} \ln \left| \frac{2x + 5}{2x - 5} \right| + C. \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання.

- 1) $\int (7x^3 - 4x + 8) dx$; 2) $\int (x+5) \cdot (3x+8) dx$; 3) $\int (6\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x^5}) dx$;
 4) $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{2}{x} - 3 \right) dx$; 5) $\int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$; 6) $\int (x-4) \cdot \left(\sqrt[3]{x} - \frac{3}{x} \right) dx$;
 7) $\int \frac{(x+2)^3}{x} dx$; 8) $\int \frac{4^x + 5 \cdot 2^x}{2^x} dx$; 9) $\int e^x \left(\frac{3^x}{5} - \frac{4^x}{e^x} \right) dx$;
 10) $\int \left(2 - \frac{3}{\sin^3 x} \right) \sin x dx$; 11) $\int \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx$; 12) $\int \frac{4 dx}{\sqrt{5x^2 + 6}}$;
 13) $\int \left(\frac{5}{x^2 + 9} - \frac{9}{5x^2 - 10} \right) dx$; 14) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{5}{\sqrt{3x^2 - 9}} \right) dx$.

Відповіді:

- 1) $1,75x^4 - 2x^2 + 8x + C$; 2) $x^3 + 11,5x^2 + 40x + C$;
 3) $\frac{24}{5}(\sqrt[4]{x})^5 + \frac{4}{7}(\sqrt{x})^7 + C$; 4) $2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} - 3x + C$;
 5) $\frac{2}{7}x^{3,5} - 2x^{1,5} + 10x^{0,5} + C$; 6) $\frac{3}{7}x^{7/3} - 3x^{4/3} - 3x + 12 \ln|x| + C$;
 7) $\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8 \ln x + C$; 8) $\frac{2^x}{\ln 2} + 5x + C$; 9) $\frac{3^x e^x}{5(1 + \ln 3)} - \frac{4^x}{\ln 4} + C$;
 10) $3 \operatorname{ctg} x - 2 \cos x + C$; 11) $x - \cos x + C$;
 12) $\frac{4}{\sqrt{5}} \ln|x + \sqrt{x^2 + 1,2}| + C$; 13) $\frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{9}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C$;
 14) $3 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{5}{\sqrt{3}} \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C$.

2. Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Одним з найбільш розповсюджених методів інтегрування є **заміна змінної**. Цей метод базується на властивості 5: вигляд первісної не залежить від змінної інтегрування.

Нова змінна може бути введена за допомогою однієї з двох формул: $x = \varphi(t)$, (1) або $t = \psi(x)$, (2). При цьому бажано функцію вибирати так, щоб підінтегральний вираз став зручним для інтегрування.

Одним з видів заміни змінної є метод «**підведення під знак диференціала**». Його застосовують тоді, коли підінтегральна функція є добутком двох множників, один з яких залежить від деякої функції $g(x)$, а другий співпадає з похідною цієї функції, або відрізняється від неї тільки сталим множником.

Розглянемо на прикладах цей метод у вигляді, який носить ще назву «**метод підстановки**».

$$\text{№ 1. } \int (3x + 5)^7 dx = \left[\begin{array}{l} t = 3x + 5, \Rightarrow t' = 3 \\ dt = (3x + 5)' dx = 3 dx \end{array} \right]$$

Щоб отримати під знаком інтеграла вираз, який дорівнює dt , помножимо і розділимо dx на "3".

$$\begin{aligned} &= \int (3x + 5)^7 \frac{3 dx}{3} = \quad (\text{винесемо "3" із знаменника за знак інтеграла}) \\ &= \frac{1}{3} \int (3x + 5)^7 \cdot 3 dx = \quad (\text{тепер перейдемо до змінної } t) \\ &= \frac{1}{3} \int t^7 dt = \frac{1}{3} \frac{t^8}{8} + C = \quad (\text{повернемось до старої змінної}) \\ &= \frac{1}{24} (3x + 5)^8 + C. \end{aligned}$$

$$\text{№ 2. } \int \frac{dx}{1 - 5x} = \left[\begin{array}{l} t = 1 - 5x \\ dt = -5 dx \end{array} \right]$$

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{-5 dx}{1 - 5x} = -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{5} \ln|t| + C = -\frac{1}{5} \ln|1 - 5x| + C.$$

Зауваження. Враховуючи, що $d(kx + b) = k dx$, одержимо правило 3:

Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$.

Знайдемо наступні інтеграли, використовуючи це правило.

№ 3. $\int 3^{2x-5} dx =$

Показник степеня $2x - 5$ – лінійна функція. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$;

$kx + b = 2x - 5, \Rightarrow k = 2$. Тоді згідно з правилом 3:

$$\int 3^{2x-5} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x-5}}{\ln 3} + C.$$

№ 4. $\int \sin\left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \left[\begin{array}{l} \int \sin x dx = -\cos x + C; \\ kx + b = 1 - \frac{x}{4}, \Rightarrow k = -\frac{1}{4}, \Rightarrow \frac{1}{k} = -4. \end{array} \right]$

$$= 4 \cos\left(1 - \frac{x}{4}\right) + C.$$

№ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}} = \int (4-3x)^{-\frac{1}{3}} dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C \\ kx + b = 4 - 3x, \Rightarrow k = -3 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{-3} \cdot \frac{(4-3x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{1}{2} (4-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$\text{№ 6. } \int \frac{dx}{7x+8} = \frac{1}{7} \ln|7x+8| = C.$$

$$\text{№ 7. } \int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}(1-2x) + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання

$$1) \int (8x+5)^4 dx; \quad 2) \int e^{-x} dx; \quad 3) \int \cos(5+4x) dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{(5-6x)^3}; \quad 5) \int \sqrt[3]{(7-x)^2} dx; \quad 6) \int 0,2^{3x+5} dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{9x+8}; \quad 8) \int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}; \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$$

Відповіді:

$$1) \frac{1}{40} (8x+5)^5 + C; \quad 2) -e^{-x} + C; \quad 3) 0,25 \sin(5+4x) + C;$$

$$4) \frac{1}{12(5-6x)^2} + C; \quad 5) -0,6 \sqrt[3]{(7-x)^5} + C; \quad 6) \frac{0,2^{3x+5}}{3 \ln 0,2} + C;$$

$$7) \frac{1}{9} \ln|9x+8| + C; \quad 8) 3 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C; \quad 9) -\frac{2}{3} \sqrt{4-3x} + C.$$

Згадаємо: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

$$\text{№ 8. } \int \frac{x dx}{\cos^2(x^2)} =$$

(Оскільки $(x^2)' = 2x$, то під знаком інтеграла множником при dx стоїть похідна від x^2 з точністю до сталого множника. Помноживши чисельник і знаменник на 2, одержимо в чисельнику диференціал від x^2 .)

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2x dx}{2 \cos^2(x^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\cos^2(x^2)} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} t + C = \quad (\text{Тепер повернемося до старої змінної } x.) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg} x^2 + C.
\end{aligned}$$

№ 9. $\int \frac{x dx}{4 - 3x^2} =$

(Під знаком інтеграла множником при dx стоїть похідна від x^2 з точністю до сталого множника $((x^2)' = 2x)$. Але через t тут краще позначити весь знаменник, враховуючи, що $(4 - 3x^2)' = -6x$.)

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{l} t = 4 - 3x^2 \\ dt = -6x dx \end{array} \right] = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x dx}{4 - 3x^2} = -\frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \\
&= -\frac{1}{6} \ln|t| + C = -\frac{1}{6} \ln|4 - 3x^2| + C.
\end{aligned}$$

№ 10. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^4}} =$

("x" – похідна з точністю до const від x^2 . Тому через t позначимо x^2 , а x^4 запишемо як $(x^2)^2$.)

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{4 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \\
&= \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

№ 11. $\int x^2 \sqrt{5 + 4x^3} dx =$

(x^2 – похідна з точністю до $const$ від x^3 , а, отже, і від $5 + 4x^3$.)

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} t = 5 + 4x^3 \\ dt = 12x^2 dx \end{array} \right] &= \frac{1}{12} \int (5 + 4x^3)^{\frac{1}{2}} 12x^2 dx = \frac{1}{12} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{12} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{18} (5 + 4x^3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання:

1) $\int x \cdot 5^{(x^2)} dx$; 2) $\int \frac{x^3 dx}{2x^4 + 7}$; 3) $\int \frac{x^2 dx}{e^{x^3-1}}$; 4) $\int \frac{6x^2 dx}{x^6 + 1}$.

Відповіді: 1) $\frac{5^{(x^2)}}{2 \ln 5} + C$; 2) $0,125 \ln |2x^4 + 7| + C$; 3) $-\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C$; 4) $2 \arctg x^3 + C$.

№ 12. $\int \frac{1 - 7 \ln x}{x} dx =$

Згадаємо, що $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Отже, під знаком інтеграла маємо з точністю до сталого множника похідну

від чисельника. $\left[\begin{array}{l} t = 1 - 7 \ln x \\ dt = -\frac{7 dx}{x} \end{array} \right]$.

Підготуємо підінтегральний вираз до переходу до нової змінної t .

$$= \int \frac{1 - 7 \ln x}{x} \left(\frac{-7 dx}{-7} \right) = -\frac{1}{7} \int (1 - 7 \ln x) \left(\frac{-7 dx}{x} \right) = -\frac{1}{7} \int t dt =$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{14} (1 - 7 \ln x)^2 + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$1) \int \frac{dx}{x \log_3 x}; \quad 2) \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}; \quad 3) \int \frac{dx}{x (3 \lg x + 5)^2}; \quad 4) \int \frac{1 - \log_2^3 x}{x} dx.$$

$$\text{Відповіді:} \quad 1) \ln 3 \cdot \ln |\log_3 x| + C; \quad 2) \arcsin(\ln x) + C;$$

$$3) \frac{-\ln 10}{3 \lg x + 5} + C; \quad 4) \ln |x| - 0,25 \ln 2 \cdot \log_2^4 x.$$

$$\text{№ 13.} \quad \int 3^x \sqrt{3 - 3^x} dx =$$

(Згадаємо, що $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$).

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 - 3^x, \\ dt = -3^x \cdot \ln 3 dx \end{array} \right] = -\frac{1}{\ln 3} \int (3 - 3^x)^{\frac{1}{2}} (-3^x \cdot \ln 3 dx) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{\ln 3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = -\frac{2}{3 \ln 3} \sqrt{(3 - 3^x)^3} + C.$$

$$\text{№ 14.} \quad \int \frac{2^x dx}{4^x + 4} = \left[\begin{array}{l} t = 2^x; \quad 4^x = (2^x)^2; \\ dt = 2^x \ln 2 dx; \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{2^x \ln 2 dx}{(2^x)^2 + 4} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2 \ln 2} \operatorname{arctg} \frac{2^x}{2} + C = \frac{1}{\ln 4} \operatorname{arctg} 2^{x-1} + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$1) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 3}}; \quad 2) \int \frac{5^x dx}{25^x + 9}; \quad 3) \int 7^x \sqrt[3]{7^x - 4} dx; \quad 4) \int \frac{dx}{1 - 2 \cdot 3^{-x}}.$$

Відповіді: 1) $\ln \left| e^x + \sqrt{e^{2x} + 3} \right| + C;$ 2) $\frac{1}{3 \ln 5} \operatorname{arctg} \frac{5^x}{3} + C;$

3) $\frac{3}{4 \ln 7} \left(\sqrt[3]{7^x - 4} \right)^4 + C;$ 4) $\frac{\ln |3^x - 2|}{\ln 3} + C.$

Нагадаємо: $\left(\sqrt{x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$ $\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$

$$\begin{aligned} \text{№ 15.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x}; \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right] \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{2dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \\ &= 2 \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = 2 \operatorname{tg} t + C = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{№ 16.} \quad \int \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{x}; \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right] \\ &= \int -\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} dx \right) = - \int \sin t dt = -(-\cos t) + C = \cos \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$1) \int \frac{5^{(x^{-1})}}{x^2} dx; \quad 2) \int \frac{(1 + \cos \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}};$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}; \quad 4) \int \frac{3}{x^2} \sin \frac{2}{x} dx.$$

Відповіді:

$$1) \frac{-5^{(x^{-1})}}{\ln 5} + C; \quad 2) 2\sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C; \quad 3) \frac{-2}{e^{\sqrt{x}}} + C; \quad 4) \frac{3}{2} \cos \frac{2}{x} + C.$$

Відомо: $(\cos x)' = -\sin x; \quad (\sin x)' = \cos x;$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$$\text{№ 17.} \quad \int 4^{\sin x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x; \\ dt = \cos x dx \end{array} \right]$$

$$= \int 4^t dt = \frac{4^t}{\ln 4} + C = \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^{\sin x} + C.$$

$$\text{№ 18.} \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 - \cos x; \\ dt = \sin x dx \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3t^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{1 - \cos x} + C.$$

$$\text{№ 19} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right]$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(\operatorname{tg} x) + C.$$

№ 20. $\int \operatorname{tg} x \, dx =$

Похідної від $\operatorname{tg} x$ під знаком інтеграла нема. Але $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Тоді

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x; \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right]$$

$$= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{dt}{t} = - \ln|t| + C = - \ln|\cos x| + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$1) \int \frac{\cos x \, dx}{3 + \sin^2 x}; \quad 2) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - \operatorname{ctgx}} \cdot \sin^2 x};$$

$$4) \int \frac{1 + e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx.$$

Відповіді: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + C$; 2) $\frac{2}{\cos x} + C$;

3) $2\sqrt{3 - \operatorname{ctgx}} + C$; 4) $\operatorname{tg} x + e^{\operatorname{tg} x} + C$.

Пам'ятаємо: $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$$(\operatorname{arctg} x)' = (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

№ 21. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}} \, dx = \int \frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \arccos x; \\ dt = \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} \end{array} \right]$

$$= - \int \sqrt{t} \, dt = - \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = - \frac{2}{3} \sqrt{\arccos^3 x} + C.$$

$$\begin{aligned}
 \text{№ 22. } \int \frac{x + 3 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \int \frac{x dx}{1 + x^2} + 3 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \\
 &\left[\begin{array}{ll} t = 1 + x^2; & u = \operatorname{arctg} x; \\ dt = 2x dx; & du = \frac{dx}{1 + x^2}. \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + 3 \int u du = \frac{1}{2} \ln|t| + 3 \frac{u^2}{2} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.
 \end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання .

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx; & \qquad 2) \int \frac{dx}{(1 + x^2) \sqrt{\operatorname{arctg}^2 x - 1}}; \\
 3) \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \arccos^3 x}}; & \qquad 4) \int \frac{dx}{(4x^2 + 1)(3 \operatorname{arctg} 2x + 5)}.
 \end{aligned}$$

Відповіді:

$$\begin{aligned}
 1) 0,25 \arcsin^4 x + C; \quad 2) -\ln \left| \operatorname{arctg} x + \sqrt{\operatorname{arctg}^2 x - 1} \right| + C; \\
 3) \frac{2}{\sqrt{\arccos x}} + C; \quad 4) \frac{1}{6} \ln |3 \operatorname{arctg} 2x + 5| + C.
 \end{aligned}$$

3. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **зводяться до**
табличних виділенням повного квадрата у квадратного тричлена:

$$(x \pm m)^2 = x^2 \pm 2mx + m^2.$$

Приклади:

$$\begin{aligned}\text{№ 1. } \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} &= \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 5} = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 4 + 5} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x - 2) + C.\end{aligned}$$

При обчисленні інтегралу використано правило 3 і табличну формулу 9.

$$\begin{aligned}\text{№ 2. } \int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 48} &= \int \frac{dx}{3(x^2 - 8x + 16)} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x - 4)^2} = \frac{1}{3} \int (x - 4)^{-2} dx =\end{aligned}$$

(Скористаємось правилом 3 та табличною формулою 2.)

$$= \frac{1}{3} \frac{(x - 4)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{-1}{3(x - 4)} + C.$$

$$\begin{aligned}\text{№ 3. } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 6x + 10}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2 + 3x + 5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}} =\end{aligned}$$

(При обчисленні цього інтегралу використаємо правило 3 і табличну формулу 12.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 1,5 + \sqrt{x^2 + 3x + 5} \right| + C.$$

№ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}} =$

(Підготуємо підінтегральний вираз до використання табличної формули 11.)

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 6x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-3)^2 + 3^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - (x-3)^2}} = \arcsin \frac{x-3}{3} + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 12x + 40}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$;

3) $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x - 15}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 40x - 80}}$.

Відповіді. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+6}{2} + C$; 2) $\arcsin \frac{x-1}{2} + C$;

3) $\frac{1}{18} \ln \left| \frac{x-5}{x+1} \right| + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x+4 + \sqrt{x^2 + 8x - 16} \right| + C$.

4. Інтеграли виду $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$; $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

При обчисленні такого виду інтегралів потрібно:

- 1) зробити в чисельнику похідну від квадратного тричлена;
- 2) розбити інтеграл на суму двох інтегралів так, щоб в чисельнику першого стояла похідна від квадратного тричлена;
- 3) обчислити кожен з одержаних інтегралів (один з них матиме вигляд $\int \frac{dt}{t}$, або $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$, а інший – $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$).

Нагадаємо, що $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c$, а $\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c$.

Приклади:

$$\text{№ 1. } \int \frac{x-2}{x^2+5x+4} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + 5x + 4 \\ t' = 2x + 5 \\ dt = (2x + 5) dx \end{array} \right]$$

(Зробимо в чисельнику похідну від квадратного тричлена.)

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2(x-2)}{x^2+5x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4+5-5}{x^2+5x+4} dx =$$

(Розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів так, щоб в чисельнику першого стояла похідна від квадратного тричлена, а саме: $(2x+5)$.)

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x+5}{x^2+5x+4} dx + \int \frac{-4-5}{x^2+5x+4} dx \right) =$$

(В першому інтегралі перейдемо до змінної t , у другому виділимо повний квадрат у квадратного тричлена.)

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t} - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4} \right) =$$

(Одержимо табличні інтеграли.)

$$= \frac{1}{2} \left(\ln|t| - 9 \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\ln |x^2 + 5x + 4| - 9 \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| \right) + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C.
\end{aligned}$$

Одержаний вираз можна спростити, скориставшись властивостями логарифмів:

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C =$$

$$\begin{aligned}
&\left[x^2 + 5x + 4 = 0 \text{ при } x_1 = -1, x_2 = -4. \text{ тоді } x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln |(x+1)(x+4)| + 3 \ln \left| \frac{x+4}{x+1} \right| \right) + C = \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{(x+1)(x+4)(x+4)^3}{(x+1)^3} \right| \right) + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+4)^4}{(x+1)^2} + C = \ln \left| \frac{(x+4)^2}{x+1} \right| + C.
\end{aligned}$$

№ 2. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-6x+7}} dx =$

$$\left[\begin{array}{l} t = x^2 - 6x + 7 \\ t' = 2x - 6 \\ dt = (2x - 6) dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2 \left(x + \frac{5}{3} \right) dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 7}} = \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{10}{3} - 6 + 6}{\sqrt{x^2 - 6x + 7}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \left(\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+7}} dx + \int \frac{\frac{10}{3}+6}{\sqrt{x^2-6x+7}} dx \right) = \\
&= \frac{3}{2} \left(\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{28}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+7}} \right) = \\
&= \frac{3}{2} \left(2\sqrt{t} + \frac{28}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-2}} \right) = \\
&= 3\sqrt{x^2-6x+7} + \frac{3}{2} \cdot \frac{28}{3} \ln \left| x-3 + \sqrt{(x-3)^2-2} \right| + C = \\
&= 3\sqrt{x^2-6x+7} + 14 \ln \left| x-3 + \sqrt{x^2-6x+7} \right| + C.
\end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$\begin{aligned}
&1) \int \frac{4x+8}{x^2-10x+25} dx; \quad 2) \int \frac{2x+1}{3x^2-5x} dx; \quad 3) \int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx; \\
&4) \int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} dx.
\end{aligned}$$

$$\text{Відповіді: } 1) \quad 2 \ln |x^2-10x+25| - \frac{28}{x-5} + C;$$

$$2) \quad \frac{1}{3} \ln |3x^2-5x| + \frac{8}{15} \ln \left| \frac{3x-5}{3x+1} \right| + C;$$

$$3) \quad 5 \sqrt{x^2+2x+5} - 6 \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x+5} \right| + C;$$

$$4) \quad 3 \arcsin \frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2} + C.$$

5. Інтеграли виду $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ –

многочлени і степінь чисельника не менша за степінь знаменника ($n \geq m$), після виділення цілої частини зводяться до інтегралів, які розглядались раніше.

Ми розглянемо тільки випадки, коли степінь знаменника не перевищує 2 ($m = 1$, або $m = 2$).

Приклади.

№1. $\int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 4} dx$

(степінь чисельника = 2, степінь знаменника = 1 ($n > m$))

Виділимо цілу частину, розділивши «куточком» чисельник на знаменник.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 7 \mid x - 4 \\ \underline{2x^2 - 8x} \mid 2x + 5 \\ 5x + 7 \\ \underline{5x - 20} \\ 27 \end{array}$$

Тоді . $\int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 4} dx = \int \left(2x + 5 + \frac{27}{x - 4} \right) dx =$

$$= \int 2x dx + \int 5 dx + \int \frac{27}{x - 4} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + 27 \ln|x - 4| + C = x^2 + 5x + 27 \ln|x - 4| + C.$$

№2. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + x}{2x - 1} dx =$

Степінь чисельника більша за степінь знаменника. Виділимо цілу частину.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 4x^2 + x & 2x - 1 \\
 \hline
 x^3 - \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{13}{8} \\
 \hline
 \frac{9}{2}x^2 + x & \\
 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{4}x & \\
 \hline
 \frac{13}{4}x & \\
 - \frac{13}{4}x - \frac{13}{8} & \\
 \hline
 \frac{13}{8} &
 \end{array}$$

Маємо: $\int \frac{x^3 + 4x^2 + x}{2x - 1} dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{13}{8} + \frac{13/8}{2x - 1} \right) dx =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{13}{8}x + \frac{13}{8} \cdot \frac{1}{2} \ln|2x - 1| + C =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{13}{16} \ln|2x - 1| + C.$$

№3. $\int \frac{x^3 - 12x + 7}{x^2 - 3x - 4} dx =$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 12x + 7 & x^2 - 3x - 4 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 - 4x & x + 3 \\
 \hline
 3x^2 - 8x + 7 & \\
 - 3x^2 - 9x - 12 & \\
 \hline
 x + 19 &
 \end{array}$$

$$= \int \left(x + 3 + \frac{x + 19}{x^2 - 3x - 4} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{x + 19}{x^2 - 3x - 4} dx =$$

$$\left[t = x^2 - 3x + 4; \quad t' = 2x - 3; \quad dt = (2x - 3) dx \right]$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \int \frac{2x + 38 - 3 + 3}{x^2 - 3x - 4} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x - 4} dx + \int \frac{38 + 3}{x^2 - 3x - 4} dx \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t} + 41 \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \left(\ln|t| + 41 \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2} \left(\ln|x^2 - 3x - 4| + 41 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}} \right| \right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 0,5 \ln|x^2 - 3x - 4| + 4,1 \ln \left| \frac{x - 4}{x + 1} \right| + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

№1. Виділити цілу частину:

$$\text{а) } \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x + 3}; \quad \text{б) } \frac{x^4 - 3x^2 + 5x - 14}{x - 2}.$$

$$\text{Відповіді: а) } 2x - 9 + \frac{15x + 23}{x^2 + 2x + 3}; \quad \text{б) } x^3 + 2x^2 + x + 7.$$

$$\text{№2. Знайти інтеграли: а) } \int \frac{3x^2 + 5x - 1}{x + 2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x} dx.$$

Відповіді:

$$\text{а) } 1,5x^2 - x + \ln|x + 2| + C; \quad \text{б) } 2x - 5 \ln|x^2 + 3x| + 6 \ln\left|\frac{x}{x + 3}\right| + C.$$

6. Метод інтегрування частинами.

Формула «інтегрування частинами» має вигляд:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du, \quad \text{де } du = u' dx; \quad v = \int dv.$$

Зауваження. При знаходженні $v = \int dv$ можна брати довільну сталу $C = 0$ (або будь-якому іншому числу), оскільки вона не входить в кінцевий результат.

Цей метод використовується якщо інтеграли $\int dv$ і $\int v du$ обчислюються простіше, ніж заданий $\int u dv$.

За допомогою метода «інтегрування частинами» обчислюються інтеграли таких видів:

$$6.1. \int P_n(x) \begin{cases} a^x \\ \cos x \\ \sin x \end{cases} dx, \text{ де } P_n(x) - \text{многочлен степеня "n"}.$$

При цьому через u позначимо многочлен $P_n(x)$, а добуток $a^x dx$, чи $\cos x dx$, чи $\sin x dx$ через dv .

Розглянемо приклади.

№1. $\int (x + 4) \cdot \cos x \, dx =$

Щоб скористатись формулою інтегрування частинами

$$\left[\begin{array}{ll} \text{позначимо :} & \text{знайдемо :} \\ u = (x + 4); & du = dx; \\ dv = \cos x \, dx; & v = \int \cos x \, dx = \sin x. \end{array} \right]$$

Тепер скористаємось формулою інтегрування частинами.

$$= (x + 4) \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = (x + 4) \cdot \sin x + \cos x + C.$$

№ 2. $\int (x^2 - 1) e^{-x} \, dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 - 1; & du = 2x \, dx \\ dv = e^{-x} \, dx; & v = \int e^{-x} \, dx = -e^{-x} \end{array} \right]$

$$= (x^2 - 1) (-e^{-x}) - \int -e^{-x} 2x \, dx = -(x^2 - 1) e^{-x} + 2 \int x e^{-x} \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = e^{-x} \, dx; & v = -e^{-x} \end{array} \right] = (1 - x^2) e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} - \int -e^{-x} \, dx \right) =$$

$$= (1 - x^2) e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) + C = e^{-x} (1 - x^2 - 2x - 2) + C =$$

$$= -e^{-x} (x^2 + 2x + 1) + C = -e^{-x} (x + 1)^2 + C.$$

Приклади для самостійного розв'язання.

1) $\int (2 - 4x) \cdot \sin x \, dx;$ 2) $\int (5x - 4) \cdot 2^x \, dx;$

3) $\int (x^2 + 4) \cdot \cos \frac{x}{2} \, dx.$

Відповіді: 1) $(4x - 2) \cdot \cos x - 4 \sin x + C;$

2) $\left(\frac{5x - 4}{\ln 2} - \frac{5}{\ln^2 2} \right) \cdot 2^x + C;$ 3) $(2x^2 - 8) \cdot \sin \frac{x}{2} + 8x \cdot \cos \frac{x}{2} + C.$

$$6.2. \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \log_a x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arcctg} x \end{array} \right\} dx.$$

В цьому випадку через u позначається одна з обернених функцій, а добуток $P_n(x)dx$ через dv .

$$\text{№ 3. } \int (3x^2 + 2x - 1) \cdot \ln x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}, \\ dv = (3x^2 + 2x - 1) dx, & v = \int dv = x^3 + x^2 - x \end{array} \right]$$

$$= (x^3 + x^2 - x) \cdot \ln x - \int (x^3 + x^2 - x) \frac{dx}{x} =$$

$$= (x^3 + x^2 - x) \cdot \ln x - \int (x^2 + x - 1) dx =$$

$$= (x^3 + x^2 - x) \cdot \ln x - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right) + C.$$

$$\text{№ 4. } \int \operatorname{arctg} 4x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} 4x, & du = (\operatorname{arctg} 4x)' dx = \frac{4 dx}{1 + (4x)^2}, \\ dv = dx, & v = x. \end{array} \right]$$

$$= x \operatorname{arctg} 4x - \int \frac{4x dx}{1 + 16x^2} = \left[\begin{array}{l} t = 1 + 16x^2 \\ dt = 32x dx \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \int \frac{8 \cdot 4x dx}{1 + 16x^2} = x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = \\
&= x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \ln|t| + C = x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \ln|1 + 16x^2| + C.
\end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання.

$$1) \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx; \quad 2) \int \arcsin \frac{x}{3} dx; \quad 3) \int x \cdot \lg x dx; \quad 4) \int \ln(x^2 + 5) dx.$$

$$\text{Відповіді: } 1) \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C; \quad 2) x \arcsin \frac{x}{3} - 3\sqrt{9 - x^2} + C;$$

$$3) \frac{x^2}{2} \lg x - \frac{x^2}{4 \ln 10} + C; \quad 4) x \cdot \ln(x^2 + 5) - 2 \left(x - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C.$$

Ми зупинились лише на двох видах інтегралів, при обчисленні яких використовується метод «інтегрування частинами». Цей метод використовується і при обчисленні інтегралів інших видів.

Теоретичні питання для самоперевірки.

1. Означення первісної та невизначеного інтеграла функції $f(x)$.
2. Правила інтегрування.
3. Таблиця похідних.
4. Методи інтегрування: табличне інтегрування, метод підстановки, метод інтегрування частинами.

$$5. \text{ Знаходження інтегралів виду: } \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx; \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx; \quad \int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx.$$

V. Визначний інтеграл та його застосування.

1. Означення визначеного інтеграла та його обчислення.

Вираз виду $\int_a^b f(x) dx$ називається **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на $[a; b]$.

Для обчислення визначеного інтеграла використовується **Формула Ньютона-Лейбніца**:

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, а $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Для зручності використовується наступний запис формули **Ньютона-Лейбніца**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int_a^a f(x) dx = 0;$
2. $\int_a^b dx = b - a;$
3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$
4. $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx;$
5. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx;$

6. Якщо $a < c < b$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Зауваження. Властивість 6 має місце і за умови, що $c \notin [a; b]$.

7. Якщо для всіх $x \in [a; b]$:

1) $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$,

2) $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Приклади. Обчислити:

№ 1.

$$\int_{-2}^0 (x^2 + 6x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2)^2 \right) = \frac{8}{3} - 12 = -\frac{28}{3}.$$

№ 2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(4+5x)^3} = \int_{-2}^{-1} (4+5x)^{-3} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(4+5x)^{-2}}{-2} \Big|_{-2}^{-1} =$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(4+5x)^2} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{(4-5)^2} - \frac{1}{(4-10)^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{36} \right) = -\frac{1}{10} \cdot \frac{35}{36} = -\frac{7}{72}.$$

№ 3. $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx = \int_4^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} dx = \int_4^9 (\sqrt{x}+1) dx =$

$$= \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + x \right) \Big|_4^9 = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x \right) \Big|_4^9 =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{9^3} + 9 - \left(\frac{2}{3} \sqrt{4^3} + 4 \right) = \frac{2}{3} \cdot 3^3 + 9 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 4 =$$

$$= 18 + 9 - \frac{16}{3} = 27 - 5\frac{1}{3} = 21\frac{2}{3}.$$

№ 4. $\int_2^7 \left(\frac{6}{2x+1} - x \right) dx = \left(\frac{6}{2} \ln|2x+1| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^7 =$

$$= 3 \ln 15 - \frac{49}{2} - (3 \ln 5 - 2) = 3(\ln 15 - \ln 5) - 24,5 + 2 = 3 \ln 3 - 22,5.$$

№ 5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\arcsin \frac{\pi}{4} - \arcsin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}.$$

№ 6. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2 + 5} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} =$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1-1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-1-1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1)) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

Приклади для самостійного розв'язання:

1) $\int_{-1}^1 x^6 dx$; 2) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 3) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; 4) $\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$;

$$\begin{aligned}
 &5) \int_{-1}^0 \frac{2^x + 5 \cdot 3^x}{6^x} dx; \quad 6) \int_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx; \quad 7) \int_{20}^{84} \frac{dx}{\frac{x}{4} - 1}; \quad 8) \int_{\frac{1}{3}}^{1,5} \sqrt[3]{6x-1} dx; \\
 &9) \int_1^2 \frac{x^2 + e^x}{x^2 e^x} dx; \quad 10) \int_{-2}^{-1} \frac{4x^3 - x - 3}{x^4} dx; \quad 11) \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}.
 \end{aligned}$$

Відповіді: 1) $\frac{2}{7}$; 2) -1 ; 3) 2 ; 4) $\frac{2}{5}$; 5) $\frac{2}{\ln 3} + \frac{5}{\ln 2}$; 6) $3,75 - 2 \ln 4$;
 7) $4 \ln 5$; 8) $1,875$; 9) $\frac{e-1}{e^2} + \frac{1}{2}$; 10) $-4 \ln 2 - \frac{1}{2}$; 11) $\ln 3$.

Заміна змінної при обчисленні визначеного інтеграла

Теорема . Нехай дано $\int_a^b f(x) dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку

$[a; b]$. Введемо нову змінну $x = \varphi(t)$. Якщо:

- 1) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;
- 2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на $[\alpha; \beta]$;
- 3) $f(\varphi(t))$ існує і неперервна на $[\alpha; \beta]$,

$$\text{то} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (3)$$

Зауваження.

1) Слід мати на увазі, що при обчисленні визначеного інтеграла за формулою (3) ми не повертаємось до старої змінної. Обчисливши праву частину (3) ми отримаємо число, яке дорівнює і лівій частині.

2) Досить часто замість заміни $x = \varphi(t)$ зручно зробити заміну $t = \psi(x)$. При такій заміні необхідно, щоб існувала обернена функція $x = g(t)$ для функції $t = \psi(x)$ і для неї виконувались умови теореми.

Приклади:

$$\text{№ 1.} \quad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x; \quad \alpha = t_{\text{H}} = \ln 1 = 0 \\ dt = \frac{1}{x} dx; \quad \beta = t_{\text{B}} = \ln e = 1 \end{array} \right]$$

$$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{№ 2.} \quad \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x; \quad \alpha = t_{\text{H}} = e^0 = 1; \\ dt = e^x dx; \quad \beta = t_{\text{B}} = e; \end{array} \right]$$

$$= \int_1^e \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^e = \operatorname{arctg} e - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{№ 3.} \quad \int_1^3 x^3 \cdot \sqrt{x^2 - 1} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 - 1; \quad \Rightarrow x^2 = t + 1; \\ dt = 2x dx; \\ t_{\text{H}} = 1^2 - 1 = 0; t_{\text{B}} = 3^2 - 1 = 8; \end{array} \right]$$

$$= \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^8 (t + 1) \cdot \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^8 \left(t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^8 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right) \Big|_0^8 = \frac{(\sqrt{8})^5}{5} + \frac{(\sqrt{8})^3}{3} = (\sqrt{8})^3 \left(\frac{8}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{464\sqrt{2}}{15}.$$

Приклади для самостійного розв'язання:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx; & 2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos^2 x dx; & 3) \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \\
4) \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx; & 5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x} dx; & 6) \int_0^1 x^2 \cdot 5^{x^3} dx.
\end{array}$$

Відповіді: 1) $0,5 \ln 2$; 2) $\frac{7}{24}$; 3) $e - \sqrt{e}$; 4) $0,8 \cdot (2 \sqrt[4]{2} - 1)$;
 5) $0,25 \cdot \ln 3$; 6) $\frac{4}{3 \ln 5}$.

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du \quad (4)$$

Приклади

$$\text{№ 1. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos \frac{x}{2} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = \cos \frac{x}{2} dx; & v = 2 \sin \frac{x}{2} \end{array} \right]$$

$$= 2x \cdot \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = 2x \cdot \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - 0 \cdot \sin 0 \right) + 4 \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} - 4.$$

$$\text{№ 2.} \quad \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x+1); & du = \frac{dx}{x+1}; \\ dv = dx; & v = x; \end{array} \right]$$

$$= x \cdot \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = x \cdot \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx =$$

$$= x \cdot \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= x \cdot \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - (x - \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} =$$

$$= (e-1) \ln e - 0 - (e-1 - \ln e - 0 + \ln 1) = e-1 - (e-1-1) = 1.$$

Приклади для самостійного розв'язання:

$$1) \int_0^{\pi} x \cdot \sin 2x dx; \quad 2) \int_1^2 (3x-2) \ln x dx. \quad 3) \int_0^1 5x \cdot e^x dx; \quad 4) \int_0^1 \operatorname{arccotg} x dx.$$

$$\text{Відповіді:} \quad 1) -\frac{\pi}{2}; \quad 2) \frac{9}{4}; \quad 3) 2 \ln 2 - 0,25; \quad 4) \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

2. Застосування визначеного інтеграла .

2.1. Обчислення площі плоскої фігури.

При обчисленні площі плоскої фігури використовується геометричний зміст визначеного інтеграла. Як відомо що визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометрично виражає **площу криволінійної трапеції** – фігури обмеженої віссю абсцис, прямими $x = a$, $x = b$ і кривою $y = f(x)$, якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$ (рис.1).

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

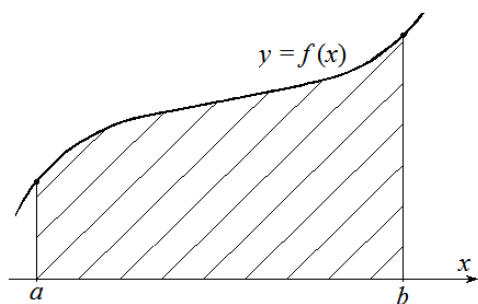


Рис. 1.

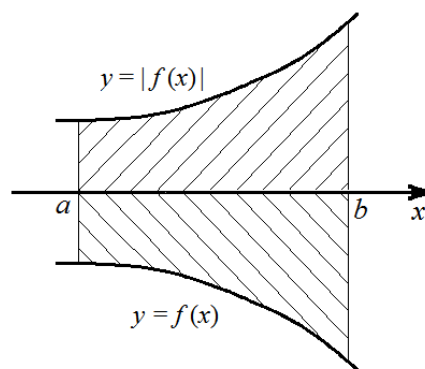


Рис. 2.

Зауваження. Якщо $f(x) \leq 0$ для $a \leq x \leq b$, то, враховуючи, що графік такої функції симетричний до графіка функції $y = |f(x)|$ відносно осі Ox , і,

що $\int_a^b f(x) dx < 0$ на $[a; b]$ (рис. 2), маємо:

$$S = \int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

Більш загальною для обчислення площі криволінійної трапеції є формула

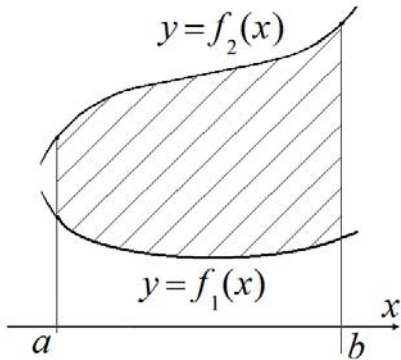
$$S = \int_a^b |f(x)| dx, \quad (7)$$

яка має місце і для функції, що змінює знак на $[a; b]$.

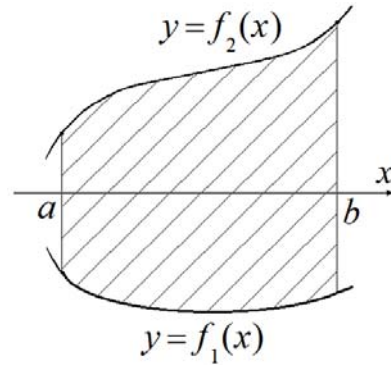
Якщо фігура обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

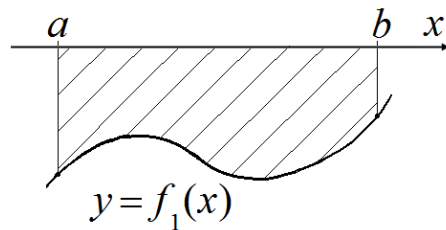
Пояснення геометричне:



$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = \\ &= \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \\ &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \\ &= \int_a^b f_2(x) dx + \int_a^b |f_1(x)| dx = \\ &= \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \\ &= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \end{aligned}$$



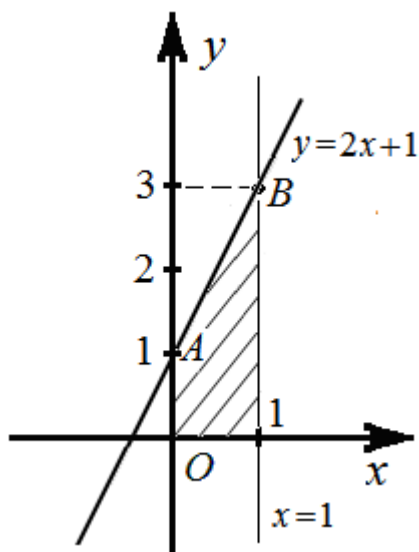
$$S = \int_a^b |f_1(x)| dx = - \int_a^b f_1(x) dx = 0 - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad \text{де}$$

$$f_2(x) = 0.$$

Приклади: Обчислити площу фігури, обмеженої вказаними лініями.

№ 1. $y = 2x + 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

Розв'язування. Зробимо схематичний рисунок фігури, площу якої потрібно обчислити. $y = 2x + 1$ – пряма. Щоб зробити рисунок, знайдемо координати точок перетину цієї прямої з прямими $x = 0$ та $x = 1$. Нехай $x = 0$, тоді $y = 1$, $\Rightarrow A(0; 1)$. При $x = 1$, одержимо $y = 3$, $\Rightarrow B(1; 3)$.



Очевидно, що фігура, площу якої потрібно знайти, є криволінійною трапецією. Функція $y = 2x + 1$ на $[0; 1]$ приймає тільки додатні значення. Отже, можна скористатись формулою (5).

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad S &= \int_0^1 (2x + 1) dx = \left(2 \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \\ &= (x^2 + x) \Big|_0^1 = 1 + 1 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 2$ (кв. од.).

№2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos x$; $y = 0$;

$$x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Розв'язування. Зробимо схематичний рисунок фігури, площу якої потрібно обчислити.

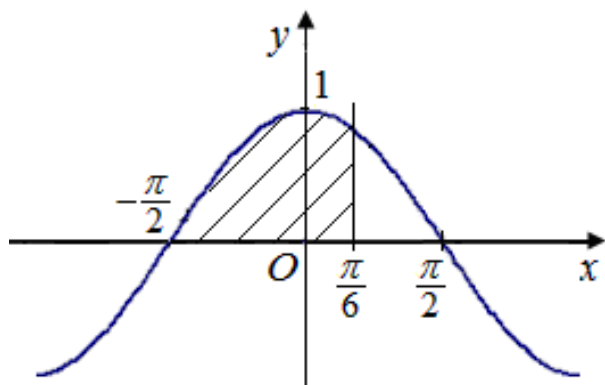
$y = \cos x$ – косинусоїда;

$y = 0$ – вісь Ox ;

$x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{6}$ – прямі паралельні осі Oy .

Маємо криволінійну трапецію. Функція $y = \cos x$ приймає тільки невід'ємні значення при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$. Скористаємось формулою (5):

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

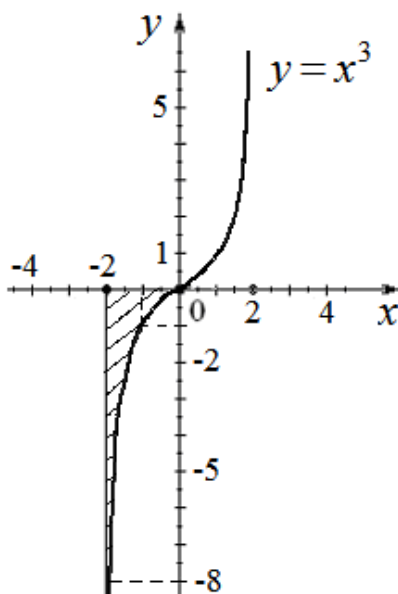


$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \sin \frac{\pi}{6} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} - (-1) = 1,5. \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 1,5$ (кв. од.).

№ 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3$; $y = 0$; $x = -2$.

Розв'язування. Зобразимо схематичний рисунок фігури, площу якої потрібно обчислити. $y = x^3$ – кубічна парабола; $y = 0$ – вісь Ox ; $x = -2$ – пряма паралельна осі Oy . Парабола і пряма перетинаються в точці $(-2; -8)$.



Очевидно, що на проміжку $[-2; 0]$, $x^3 \leq 0$, то скористаємось формулою (6).

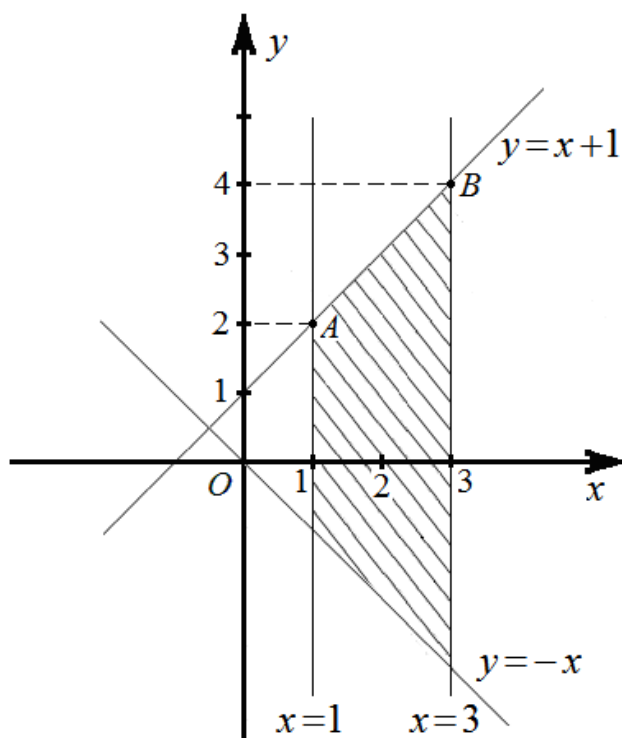
$$S = - \int_a^b f(x) dx = - \int_{-2}^0 x^3 dx = - \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 = - \left(0 - \frac{(-2)^4}{4} \right) = 4.$$

Відповідь: $S = 4$ (кв. од.).

№ 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x$; $y = x + 1$; $x = 1$; $x = 3$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.

$x = 1$ – пряма, яка паралельна осі Oy і перетинає вісь Ox при $x = 1$;
 $x = 3$ – пряма, яка паралельна осі Oy і перетинає вісь Ox при $x = 3$;
 $y = -x$ – бісектриса 2-го та 4-го координатних кутів;
 $y = x + 1$ – пряма, яка проходить через точки $A(1; 2)$ та $B(3; 4)$.



Площу даної фігури обчислимо за формулою (8).

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 ((x + 1) - (-x)) dx = \int_1^3 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_1^3 = \\ &= (3^2 + 3) - (1 + 1) = 10. \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 10$ (кв. од.).

№ 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x + 1$ та

$$y = x + 3.$$

Розв'язування. Знайдемо точки перетину заданих ліній.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}, \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x + 3;$$

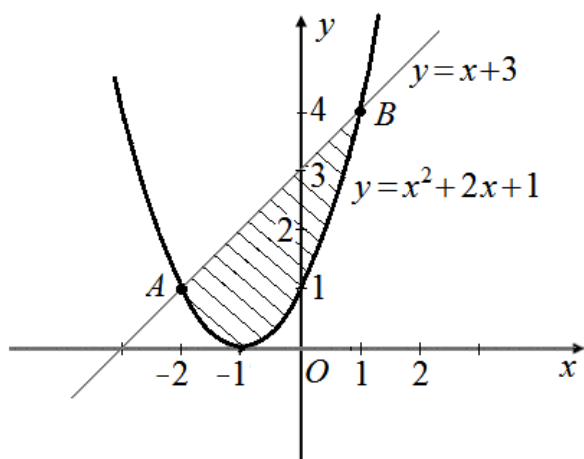
$$x^2 + x - 2 = 0; \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 1;$$

Оскільки $y = x + 3$, то $y_1 = -2 + 3 = 1$, $y_2 = 1 + 3 = 4$; $\Rightarrow A(-2; 1); B(1; 4)$.

Зробимо рисунок.

$y = x + 3$ – пряма, яка проходить через знайдені точки A та B ;

$y = x^2 + 2x + 1$ (або $y = (x + 1)^2$) – парабола з вершиною в точці $C(-1; 0)$, гілки якої направлені вгору і проходять через точки A та B .



За формулою (8):

$$S = \int_{-2}^1 \left((x + 3) - (x^2 + 2x + 1) \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^1 (x + 3 - x^2 - 2x - 1) dx =$$

$$= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 6 =$$

$$-3 - \frac{1}{2} + 8 = 4,5.$$

Відповідь: $S = 4,5$ (кв. од.).

№ 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 0$; $y = x$;

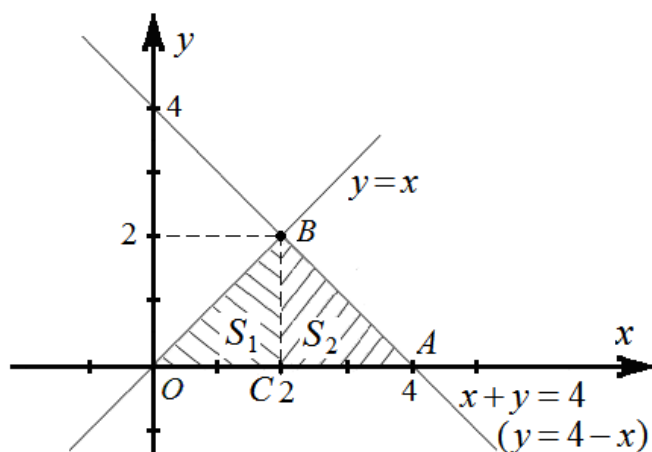
$$x + y = 4.$$

Розв'язування. Знайдемо точки перетину заданих прямих і зробимо рисунок.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x \end{cases}, \Rightarrow x = 0; \Rightarrow O(0; 0);$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}, \Rightarrow x = 4; \Rightarrow A(4; 0);$$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 4 \end{cases}, \Rightarrow 2x = 4; \Rightarrow x = 2, y = 2; B(2; 2).$$



З рисунка:

$$\begin{aligned} S_{\triangle OBA} &= S_{\triangle OBC} + S_{\triangle CBA} = \\ &= \int_0^2 x dx + \int_2^4 (4 - x) dx = \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^4 = \\ &= 2 + (16 - 8 - 8 + 2) = 4. \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 4$ (кв. од.).

Приклади для самостійного розв'язання.

Обчислити площу фігури, обмеженої вказаними лініями:

1) $y = 2^{-x}$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$;

2) $y = x^2 - 2x$; $y = 0$; $x = 4$;

3) $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{1}{3}x$;

4) $y = \sqrt{x+1}$; $y = \sqrt{7-x}$; $y = 0$;

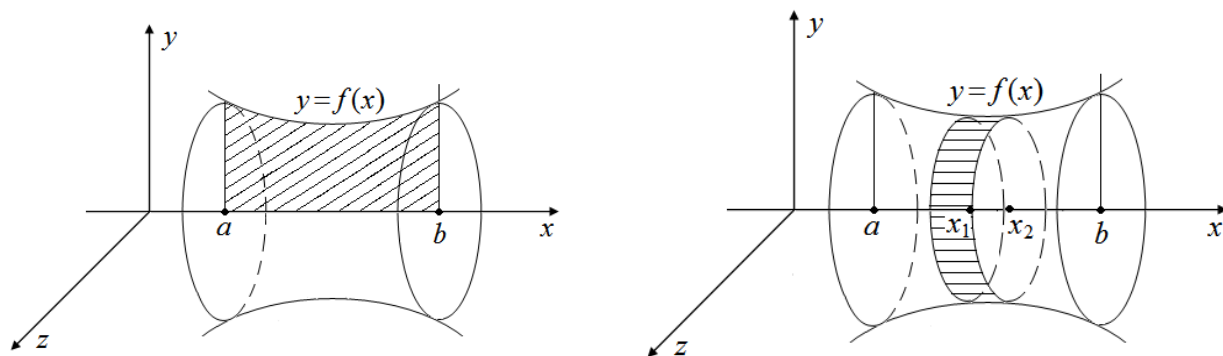
5) $y = x^2 - 4x + 5$; $y = -x^2 + 2x + 1$.

Відповіді:

1) $\frac{7}{4 \ln 2}$ кв.од.; 2) 8 кв.од.; 3) 4,5 кв.од.; 4) $10\frac{2}{3}$ кв.од., 5) $\frac{1}{3}$ кв.од.

2.2. Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ обертається навколо осі Ox .



Тоді об'єм одержаного тіла обчислюється за формулою

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (9)$$

Приклади.

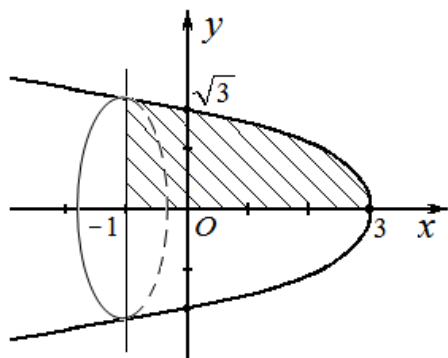
№1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболою $y = \sqrt{3-x}$, віссю Ox та прямою $x = -1$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.

$y = \sqrt{3-x}$ – парабола; $D(y): x \leq 3$; $E(y): y \geq 0$. Ця парабола перетинає вісь Ox при $x = 3$.

$x = -1$ – пряма, яка паралельна осі Oy і перетинає вісь Ox при $x = -1$.

Фігура, обмежена вказаними лініями, є криволінійною трапецією (вона заштрихована на рисунку). Тоді шуканий об'єм обчислимо за формулою (9).



$$V = \pi \int_{-1}^3 \left(\sqrt{3-x} \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^3 (3-x) dx = \pi \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^3 =$$

$$= \pi \left(9 - \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} \right) = 8\pi.$$

Відповідь: $V = 8\pi$ (куб.од.).

№2. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = x + 2$ та віссю абсцис.

Розв'язування. Зобразимо на рисунку фігуру, обмежену вказаними лініями.

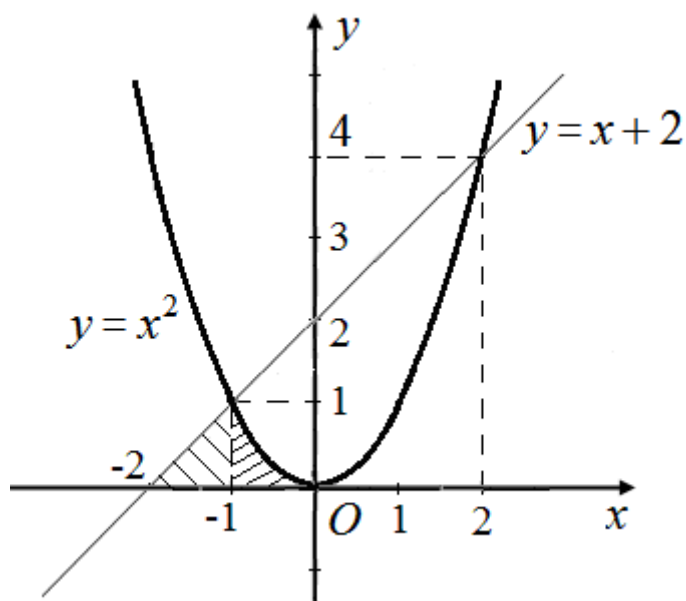
$y = x^2$ – парабола, з вершиною в початку координат, гілки якої направлені в додатному напрямі осі Oy ;

$y = x + 2$ – пряма, яка перетинає вісь Ox при $x = -2$, а вісь Oy при $y = 2$.

Знайдемо точки перетину заданих ліній.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad \begin{cases} x_1 = -1, & x_2 = 2, \\ y_1 = 1; & y_2 = 4. \end{cases}$$

Фігура, обмежена вказаними лініями, на рисунку заштрихована.



Очевидно, що шуканий об'єм $V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-2}^{-1} (x+2)^2 dx + \pi \int_{-1}^0 x^4 dx =$

$$= \pi \frac{(x+2)^3}{3} \Big|_{-2}^{-1} + \pi \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^0 = \pi \frac{1-0}{3} + \pi \left(0 + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15} \pi.$$

Відповідь: $V = \frac{8}{15} \pi$ (куб. од.).

№ 3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ та $y = 0,5x$.

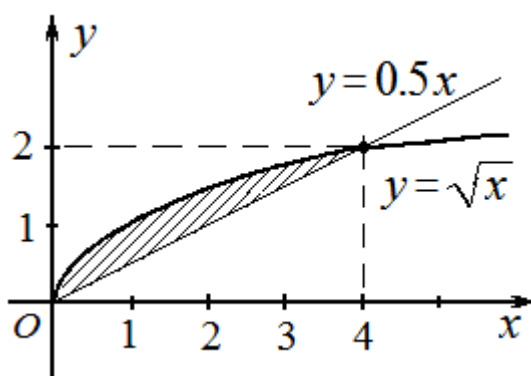
Розв'язування. Знайдемо точки перетину заданих ліній і зобразимо задану фігуру на рисунку.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 0,5x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 0,5x \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \Rightarrow 4x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0, \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

При $x_1 = 0$, $y_1 = \sqrt{0} = 0$; Якщо $x_2 = 4$, то $y_2 = \sqrt{4} = 2$.

Зробимо рисунок.



В даному випадку $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx =$

$$= \pi \int_0^4 x dx - \pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi.$$

Відповідь: $V = \frac{8}{3}\pi$ (куб. од.).

Приклади для самостійного розв'язання.

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої вказаними лініями :

1) $y = \sqrt[3]{x}$, $y=0$, $x=8$;

№ 2. $y = 3x - x^2$, $y=0$;

№ 3. $y = x$; $y = 2x$; $x=1$;

№ 4. $y = 3^x$; $y = 1-x$; $y=0$; $x=-1$; $x=1$.

Відповіді:

1) $19,2\pi$ (куб.од.); 2) $8,1\pi$ (куб.од.); 3) π (куб.од.); 4) $\frac{8}{9 \ln 9} + \frac{1}{3}$ (куб.од.).

Теоретичні питання для самоперевірки.

1. Означення визначеного інтеграла.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
4. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
5. Застосування визначеного інтеграла при обчисленні площі та об'єму.

Приклади задач, які виникають в економіці

Задача 1. Граничний прибуток підприємства описується функцією $y'(x) = 400 - 0,25x$, де x – кількість реалізованої продукції. Знайти функцію прибутку враховуючи, що нульовій кількості продукції відповідає нульовий прибуток.

Розв'язування. Згідно умові потрібно знайти функцію $y(x)$, якщо $y'(x) = 400 - 0,25x$ і $y(0) = 0$.

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int (400 - 0,25x) dx = 400x - 0,125x^2 + C.$$

Враховуючи, що $y(0) = 0$, маємо $0 = 0 + C$, звідки $C = 0$.

Відповідь: $y(x) = 400x - 0,125x^2$.

Задача 2. Нехай функції максимального прибутку і максимальних витрат мають вигляд $f(x) = 80 - 3x$, $g(x) = 20 + x$ відповідно.

Знайти: 1) прибуток при випуску 10 одиниць продукції;

2) максимальний прибуток, тобто прибуток, що відповідає випуску такого об'єму продукції при якому граничний прибуток дорівнює граничним витратам.

Розв'язування.

1) Прибуток при випуску 10 одиниць продукції зводиться до

$$\begin{aligned} \text{обчислення} \quad \int_0^{10} (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^{10} ((80 - 3x) - (20 + x)) dx = \\ &= \int_0^{10} (60 - 4x) dx = (60x - 2x^2) \Big|_0^{10} = 600 - 200 = 400. \end{aligned}$$

2) Оскільки граничний прибуток дорівнює граничним витратам, то маємо:

$$f(x) = g(x), \Rightarrow 80 - 3x = 20 + x \text{ звідки } 4x = 60, \Rightarrow x_g = 15.$$

Максимальний прибуток обчислюється як

$$\begin{aligned} \int_0^{15} (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^{15} ((80 - 3x) - (20 + x)) dx = \int_0^{15} (60 - 4x) dx = \\ &= (60x - 2x^2) \Big|_0^{15} = 900 - 450 = 450. \end{aligned}$$

Відповідь: При випуску 10 одиниць продукту прибуток складає 400 ум. од., а максимальний прибуток розміром в 450 ум. од. буде досягнуто при випуску 15 одиниць продукції.